Физика волновых процессов и радиотехнические системы
2021. Т. 24, № 4. С. 72–80

DOI 10.18469/1810-3189.2021.24.4.72-80
УДК 55-77

Дата поступления 22 сентября 2021
Дата принятия 25 октября 2021

Алгоритмические решения в задаче оценки информационного воздействия на электорат при проведении выборных кампаний

И.С. Полянский, И.В. Полянская, К.О. Логинов

Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации
302015, Россия, г. Орел,
ул. Приборостроительная, 35

Аннотация – В статье для решения задачи оценки информационного воздействия на электорат при проведении выборных кампаний сформированы алгоритмические решения, включающие математическую модель, численную схему и алгоритмические реализации. Указанная оценка сводится к определению мгновенных значений числа избирателей, отдающих предпочтение кандидату (партии) при учете: положительного или отрицательного стохастического характера воздействия средств масс-медиа; межличностного взаимодействия; двухшагового усвоения информации; наличия многообразия средств масс-медиа, социальных групп и списка кандидатов. Математическая модель базируется на обобщенной модели информационного противоборства в структурированном социуме и при введении стохастических компонент в интенсивностях агитации сводится к решению уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова. Для его исследования в постановке метода Галеркина предложена численная схема и определен порядок ее сходимости. В отношении основных процедур численной схемы уточнены особенности алгоритмической реализации.

Ключевые слова – оценка информационного воздействия; избирательная кампания; алгоритмические решения; уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова; Гауссовы базисные функции; оценка сходимости; триангуляция многомерного многогранника; численное интегрирование по многомерному симплексу.

Введение

На сегодняшний день избирательные процедуры – неотъемлемая часть демократических государств. Несмотря на существенные различия исторических путей становления и развития электоральных институтов в различных странах, в настоящий момент содержание избирательных кампаний неизменно базируется на понятиях профессионализма и эффективного менеджмента. Основу для реализации указанных принципов составляет качественное информационно-аналитическое сопровождение выборных кампаний, необходимое как конкурирующим кандидатам, так и организаторам выборов. При этом обеспечение подобного сопровождения с учетом текущего уровня развития систем коммуникации, вычислительной техники и методов математического моделирования [1] невозможно без применения эффективных алгоритмических решений, позволяющих формировать точную оценку информационного воздействия. Основные особенности, которые необходимо принять во внимание при разработке алгоритмических решений в указанной предметной области, связаны с учетом: 1) воздействия средств масс-медиа на избирателей и межличностного взаимодействия; 2) положительного и отрицательного влияния на общественное мнение средствами масс-медиа; 3) двухшагового усвоения информации [5]; 4) наличия многообразия средств масс-медиа, социальных групп и списка кандидатов (партий); 5) стохастического характера воздействия средств масс-медиа.

Принимая во внимание основные результаты работ [2–6] по математическому моделированию информационного влияния, управления и противоборства в социуме и выделенные особенности, цель настоящей статьи состоит в разработке алгоритмических решений в задаче оценки информационного воздействия на электорат при проведении выборных кампаний.

1. Математическая модель оценки информационного воздействия на электорат при проведении выборных кампаний

В соответствии с [6] электорат представим группой взаимодействующих индивидов численностью N_0, составленной из M подгрупп. Обозначим N_m $\left(m=\overline{1,M}\right)$ число индивидов в m-й подгруппе при $N_m < N_0$, $N_m \ge 1$ и $\sum_{m=1}^{M} N_m = N_0$. Предпочтения у индивидов формируются в отношении K кандидатов с учетом распространя-

✉ van341@mail.ru (*Полянский Иван Сергеевич*)

емой информации через L внешних источников (средства масс-медиа) и за счет межличностной коммуникации. Внешний l-й $\left(l=\overline{1,L}\right)$ источник в момент времени $t\in\left[0,T_0\right]$ пропагандирует k-го кандидата с интенсивностями $\alpha_{kl}\left(t\right)$ и $\gamma_{kl}\left(t\right)$, формируя положительное и отрицательное отношение соответственно. Разнородность влияния на m-ю подгруппу индивидов l-го внешнего источника характеризуется коэффициентом восприятия $\chi_{ml}\in\left[0,1\right]$.

Следуя [6], общую группу индивидов разделим на три класса: 1) неохваченные; 2) предадепты; 3) адепты. У неохваченных индивидов отсутствуют предпочтения в отношении какого-либо кандидата.

Предадептами mk назовем индивидов m-й подгруппы, отдающих предпочтение k-му кандидату, но не распространяющих о нем информации при межличностной коммуникации. Число предадептов mk в момент времени t обозначим $y_{mk}\left(t\right)\in\left[0,N_m\right]$.

Адептами mk назовем индивидов m-й подгруппы, отдающих предпочтение k-му кандидату и распространяющих положительную информацию в его отношении среди индивидов m'-й $\left(m'=\overline{1,M}\right)$ подгруппы путем межличностной коммуникации с интенсивностью $\beta_{m'm}\geq 0$. Число адептов mk в момент времени t обозначим $x_{mk}\left(t\right)\in\left[0,N_m\right]$. Уточним, что адепт mk в отношении k'-го кандидата $\left(k,k'\in\left\{\overline{1,K}\right\}\right)$ не распространяет отрицательной информации.

Переход неохваченных индивидов в адепты осуществляется за два шага [6]. Под воздействием положительной информации из внешних источников и за счет межличностной коммуникации первоначально индивид m-й подгруппы становится предадептом mk, а затем – адептом mk. Под воздействием негативной информации из внешних источников в отношении k-го кандидата происходит обратный переход. Уточним, что адептом кандидата может стать только предадепт соответствующего кандидата, а неохваченным индивидом – предадепт.

Для введенных представлений задача оценки сводится к выбору k'-го кандидата, способного по итогам выборной кампании набрать наибольшее число голосов

$$k'=\arg\max_{k\in\left[1,K\right]}\hat{N}_k,$$

где $\hat{N}_k=\sum_{m=1}^{M}\left[\hat{x}_{mk}\left(T_0\right)+\hat{y}_{mk}\left(T_0\right)\right]$.

Ее решение требует максимально правдоподобного определения числа адептов $\hat{x}_{mk}\left(t\right)$ и предадептов $\hat{y}_{mk}\left(t\right)$.

Для заданного содержательного представления математическую модель сформируем, принимая во внимание основные предположения о скорости изменения $x_{mk}\left(t\right)$, $y_{mk}\left(t\right)$ [6] и допущения.

1. Значения χ_{ml}, $\beta_{m'm}$ не зависят от t и определяются экспертным оцениванием.

2. Переменные $x_{mk}\left(t\right)$, $y_{mk}\left(t\right)$ составляют непрерывный векторный марковский процесс.

3. Интенсивности $\alpha_{kl}\left(t\right)$, $\gamma_{kl}\left(t\right)$ складываются из соответствующих истинных значений $0\leq\alpha_{kl}^0\left(t\right)$, $\gamma_{kl}^0\left(t\right)<\infty$ и ошибок наблюдения $\tilde{\alpha}_{kl}\left(t\right)$, $\tilde{\gamma}_{kl}\left(t\right)$, являющихся белым шумом с соответствующими характеристиками: $\mathbb{E}\left[\tilde{\alpha}_{kl}\right]=\mathbb{E}\left[\tilde{\gamma}_{kl}\right]=0$; $\operatorname{cov}\left[\tilde{\alpha}_{kl}\right]=\operatorname{cov}\left[\tilde{\gamma}_{kl}\right]=\delta\left(t-\tau\right)$; $\operatorname{cov}\left[d\tilde{\alpha}_{kl}\right]=\left[\varepsilon_{kl}^{\alpha}\right]^2$; $\operatorname{cov}\left[d\tilde{\gamma}_{kl}\right]=\left[\varepsilon_{kl}^{\gamma}\right]^2$.

Для заданных представлений решение задачи оценки $\hat{x}_{mk}\left(t\right)$ и $\hat{y}_{mk}\left(t\right)$ выполним усреднением:

$$\hat{\vec{Z}}\left(t\right)=\int_{\Omega}\vec{Z}p\left(\vec{Z},t\right)d\vec{Z}, \tag{1}$$

где

$$\vec{Z}=\left(Z_i\right)_d=\left(\vec{z}^{(1)},\ldots,\vec{z}^{(M)}\right);$$

$$\vec{z}^{(m)}=\left(z_k^{(m)}\right)_{2K}=\left(x_{m1},y_{m1},\ldots,x_{mK},y_{mK}\right);$$

$\Omega=\varepsilon^{(1)}\times\ldots\times\varepsilon^{(M)}\subset\mathbb{R}^d$ – d-мерный выпуклый многогранник $(d=2MK)$; $\varepsilon^{(m)}\subset\mathbb{R}^{2K}$ – симплекс с $2K+1$ вершинами $P_1^{(m)}=\left(0,0,\ldots,0\right)$, $P_2^{(m)}=$ $=\left(N_m,0,\ldots,0\right)$, ..., $P_{2K+1}^{(m)}=\left(0,0,\ldots,N_m\right)$; $p\left(\vec{Z},t\right)$ – функция плотности распределения вероятности, удовлетворяющая уравнению Фоккера – Планка – Колмогорова (ФПК):

$$dp\left(\vec{Z},t\right)/dt=\mathbf{L}\left[p\left(\vec{Z},t\right)\right], \tag{2}$$

где

$$\mathbf{L}\left[p\right]=-\sum_{l=1}^{d}\frac{\partial}{\partial Z_l}\left(A_lp\right)+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{d}\sum_{l'=1}^{d}\frac{\partial^2\left(D_{ll'}p\right)}{\partial Z_l\partial Z_{l'}}$$

– диффузионный оператор; $\mathbf{D}=\left(D_{ll'}\right)_{d\times d}$ и $\vec{A}=\left(A_l\right)_d$ – тензор диффузии и вектор сноса соответственно, компоненты которых формируются из следующих представлений:

1) для вектора сноса:

$$\vec{A}=\left(A_l\right)_d=\left(\vec{a}^{(1)},\ldots,\vec{a}^{(M)}\right);$$

$$\vec{a}^{(m)} = \left(a_i^{(m)}\right)_{2K} = \left(f_{m1}^{(1)}, f_{m1}^{(2)}, \dots, f_{mK}^{(1)}, f_{mK}^{(2)}\right);$$

$$f_{mk}^{(2)}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, t) = \left(x_{mk} - y_{mk}\right)\Gamma_{mk}^0 + \left[\mathrm{A}_{mk}^0 + \sum_{m'=1}^{M} x_{m'k}\beta_{m'm}\right] \times \left[N_m - \sum_{k'=1}^{K}\left(x_{mk'} + y_{mk'}\right) - y_{mk}\right];$$

$$f_{mk}^{(1)}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, t) = y_{mk}\left[\mathrm{A}_{mk}^0 + \sum_{m'=1}^{M} x_{m'k}\beta_{m'm}\right] - x_{mk}\Gamma_{mk}^0;$$

$$\Gamma_{mk}^0 = \sum_{l=1}^{L}\chi_{ml}\gamma_{kl}^0; \quad \mathrm{A}_{mk}^0 = \sum_{l=1}^{L}\chi_{ml}\alpha_{kl}^0;$$

$$\mathbf{X} = \left(x_{mk}\right)_{M\times K}; \quad \mathbf{Y} = \left(y_{mk}\right)_{M\times K};$$

2) для тензора диффузии:

$$\mathbf{D} = \mathbf{\Sigma}\mathbf{\Sigma}^{\mathrm{T}}; \quad \mathbf{\Sigma} = \left(\Sigma_{ll'}\right)_{d\times d} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}^{(11)} & \dots & \boldsymbol{\sigma}^{(1M)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{\sigma}^{(M1)} & \dots & \boldsymbol{\sigma}^{(MM)} \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(mm')} = \left(\sigma_{ii'}^{(mm')}\right)_{2K} \text{ при } m' = \overline{1,M} \text{ и } k = \lceil i/2 \rceil:$$

$$\sigma_{ii'}^{(mm')} = \begin{cases} -x_{mk}\sqrt{\sum_{l=1}^{L}\left(\chi_{ml}\varepsilon_{kl}^{\gamma}\right)^2}, \\ \text{if } m = m' \wedge i \bmod 2 \neq 0 \wedge i = i'; \\ y_{mk}\sqrt{\sum_{l=1}^{L}\left(\chi_{ml}\varepsilon_{kl}^{\alpha}\right)^2}, \\ \text{if } m = m' \wedge i \bmod 2 = 0 \wedge i = i'; \\ \left(x_{mk} - y_{mk}\right)\sqrt{\sum_{l=1}^{L}\left(\chi_{ml}\varepsilon_{kl}^{\gamma}\right)^2}, \\ \text{if } m = m' \wedge i \bmod 2 \neq 0 \wedge i - 1 = i'; \\ \left[N_m - \sum_{k'=1}^{K}\left(x_{mk'} + y_{mk'}\right) - y_{mk}\right] \times \\ \times\sqrt{\sum_{l=1}^{L}\left(\chi_{ml}\varepsilon_{kl}^{\alpha}\right)^2}, \\ \text{if } m = m' \wedge i \bmod 2 = 0 \wedge i - 1 = i'; \\ 0, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

Решение дифференциального уравнения (2) при заданном начальном условии $p(\vec{Z}, 0)$ и требований $p(\vec{Z}, t) \geq 0$, $\int_{\Omega} p(\vec{Z}, t)\, d\vec{Z} = 1$ для $(\vec{Z}, t) \in \Omega \times [0, T_0]$ предлагается выполнять численно в соответствии со следующей схемой.

2. Численная оценка информационного воздействия на электорат при проведении выборных кампаний

Зададим разбиение $\Omega = \bigcup_{u=1}^{U}\omega^{(u)}$ набором из U симплексов

$$\omega^{(u)} = \left\{\sum_{l=1}^{d+1}\zeta_l^{(u)}P_l^{(u)} : \left(\sum_{l=1}^{d+1}\zeta_l^{(u)} = 1\right) \wedge \left(\forall l = \overline{1, d+1},\ \zeta_l^{(u)} \geq 0\right)\right\} \subset \mathbb{R}^d$$

$\left(u = \overline{1,U}\right)$ с $d+1$ вершинами $P_1^{(u)}$, $P_2^{(u)}$, …, $P_{d+1}^{(u)}$ и барицентрическими координатами $\zeta_1^{(u)}, \dots, \zeta_{d+1}^{(u)}$ при $\omega^{(u)} \cap \omega^{(u')} = \varnothing$ $\left(u \neq u';\ u, u = \left\{\overline{1,U}\right\}\right)$.

Обозначим $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega}$ скалярное произведение

$$\langle \eta, \phi \rangle_{\Omega} = \int_{\Omega} \eta(\vec{Z})\phi(\vec{Z})\, d\vec{Z} \tag{3}$$

для некоторых функций η и ϕ.

Зададим аппроксимацию $p(\vec{Z}, t)$:

$$\tilde{p}(\vec{Z}, t) = \sum_{u=1}^{U}\sum_{j \in \mathbb{M}_r^d} c_j^{(u)}(t)\psi_j^{(u)}(\vec{Z}), \tag{4}$$

подстановка которой в (2) в проекционном представлении метода Галеркина сведет исходную к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$d\vec{C}(t)/dt = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{Q}(t)\vec{C}(t); \quad \vec{C}(0) = \mathbf{S}^{-1}\vec{W}, \tag{5}$$

где

$$\vec{W} = \left(\left\langle p_0, \psi_j^{(u)} \right\rangle_{\Omega}\right)_{U\left|\mathbb{M}_r^d\right|};$$

$$p_0 \equiv p(\vec{Z}, 0); \quad \vec{C} = \left(c_j^{(u)}\right)_{U\left|\mathbb{M}_r^d\right|}$$

– вектор искомых коэффициентов разложения, зависящих от t;

$$\mathbf{Q} = \left(\left\langle \psi_j^{(u)}, \mathbf{L}\left[\psi_{j'}^{(u')}\right] \right\rangle_{\Omega}\right)_{U\left|\mathbb{M}_r^d\right| \times U\left|\mathbb{M}_r^d\right|};$$

$$\mathbf{S} = \left(\left\langle \psi_j^{(u)}, \psi_{j'}^{(u')} \right\rangle_{\Omega}\right)_{U\left|\mathbb{M}_r^d\right| \times U\left|\mathbb{M}_r^d\right|};$$

$\mathbb{M}_r^d$ – множество мультииндексов $j, j' \in \mathbb{M}_r^d$ [8]:

$$\mathbb{M}_r^d = \left\{ j = \left(j_1, ..., j_l, ..., j_{d+1}\right) : \ j_l \in \mathbb{Z}_+, \right. \\ \left. \sum_{l \in \left[1; d+1\right]} j_l = r \right\}, \tag{6}$$

где $r \in \mathbb{N}$ – порядок аппроксимации на $\omega^{(u)}$; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\psi_j^{(u)}$ – базисная функция частичной подобласти $\omega^{(u)} \in \Omega$, которую зададим произведением:

$$\psi_j^{(u)} = \sqrt{2/\pi}\left(r+1\right)\prod_{l=1}^{d+1}\varphi_{j_l} \tag{7}$$

Гауссовых базисных функций [9]:

$$\varphi_{j_l} = e^{-\left[2j_l+1-2\zeta_l\left(r+1\right)\right]^2 / \left[2\left(d+1\right)\right]}. \tag{8}$$

Решение (5) определяется в виде

$$\vec{C}\left(t\right) = \exp\left[\mathbf{S}^{-1}\int_0^t \mathbf{Q}\left(\tau\right)d\tau\right]\mathbf{S}^{-1}\vec{W}, \tag{9}$$

где $\exp\left[\cdot\right]$ – матричная экспонента.

Сходимость решения (9) задачи (2) в проекционном представлении (5) с учетом известной, например из [10, с. 80], теоремы Л.В. Канторовича составляет последовательное исследование задач приближения непрерывной функции на $\left[0,1\right]$ и $\omega^{(u)}$ Гауссовыми базисными функциями вида (7), (8).

Лемма 1. *Пусть* $\eta\left(\zeta\right)$ *– непрерывно дифференцируемая на* $\left[0,1\right]$ *функция, а* $\tilde{\eta}\left(\zeta\right) = \sum_{j=0}^{r} c_j\varphi_j\left(\zeta\right)$ *– ее наилучшее среднеквадратичное приближение с коэффициентами разложения* c_j. *Тогда справедлива оценка*

$$\left\|\eta - \tilde{\eta}_r\right\|_{\left[0,1\right]} \le M_1\left\|\eta\right\|_{\left[0,1\right]} \Big/ \sqrt{r+1}, \tag{10}$$

где M_1 *– не зависящая от* r *положительная постоянная.*

В формулировке леммы 1 для $\zeta \in \left[0,1\right]$, $r \in \mathbb{N}$ приняты следующие обозначения:

$$\varphi_j\left(\zeta\right) = \sqrt{2/\pi}\left(r+1\right)e^{-\left[2j+1-2\zeta\left(r+1\right)\right]^2/2}$$

$$\left(j = \overline{0, r}\right);$$

$$\left\|\eta\right\|_{\left[0,1\right]} = \sqrt{\left\langle\eta,\eta\right\rangle_{\left[0,1\right]}} \ \text{ при } \left\langle\eta,\phi\right\rangle_{\left[0,1\right]} = \int_0^1 \eta\left(\zeta\right)\phi\left(\zeta\right)d\zeta.$$

Лемма 2. *Пусть* $\eta\left(\vec{\zeta}\right)$ *– непрерывно дифференцируемая на* ω *функция, а* $\tilde{\eta}\left(\vec{\zeta}\right) = \sum_{j \in \mathbb{M}_r^K} c_j\psi_j\left(\vec{\zeta}\right)$ *– ее наилучшее среднеквадратичное приближение с коэффициентами разложения* c_j. *Тогда справедлива оценка*

$$\left\|\eta - \tilde{\eta}_r\right\|_{\omega} \le M_2\left\|\eta\right\|_{\omega} \Big/ \sqrt{r+1}, \tag{11}$$

где M_2 *– не зависящая от* r *положительная постоянная.*

В формулировке леммы 2 для

$$\omega = \left\{\sum_{k=1}^{K+1}\zeta_k P_k \ : \left(\sum_{k=1}^{K+1}\zeta_k = 1\right) \wedge \right. \\ \left. \wedge\left(\forall k = \overline{1, K+1}, \ \zeta_k \ge 0\right)\right\} \subset \mathbb{R}^K,$$

$r \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{M}_r^K$ приняты обозначения:

$$\psi_j\left(\vec{\zeta}\right) = \sqrt{2/\pi}\left(r+1\right)\times \\ \times\prod_{k=1}^{K+1} e^{-\left[2j_k+1-2\zeta_k\left(r+1\right)\right]^2 / \left[2\left(K+1\right)\right]};$$

$$\left\|\eta\right\|_{\omega} = \sqrt{\left\langle\eta,\eta\right\rangle_{\omega}} \ \text{ для}$$

$$\left\langle\eta,\phi\right\rangle_{\omega} = \int_0^1\int_0^{1-\zeta_1} ... \int_0^{1-\sum_{k=1}^{K-1}\zeta_i} \eta\left(\vec{\zeta}\right)\phi\left(\vec{\zeta}\right)d\zeta_K ... d\zeta_2 d\zeta_1$$

при $\zeta_{K+1} = 1 - \sum_{k=1}^{K}\zeta_k$.

Из результатов лемм 1, 2 получено следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть*

$$\tilde{p}\left(\vec{Z}, t\right) = \sum_{u=1}^{U}\sum_{j \in \mathbb{M}_r^d} c_j^{(u)}\left(t\right)\psi_j^{(u)}\left(\vec{Z}\right),$$

тогда метод Галеркина для уравнения (2) *сходится и справедлива оценка*

$$\left\|p - \tilde{p}\right\|_{\Omega} \le M_3\left\|p\right\|_{\Omega}\sqrt{\upsilon/\left(r+1\right)}, \tag{12}$$

где M_3 *– не зависящая от* r *положительная постоянная,* υ *– максимальный линейный размер симплексов* $\omega^{(u)}$.

3. Алгоритмическая реализация решений в задаче оценки информационного воздействия на электорат при проведении выборных кампаний

Основу алгоритмической реализации сформированной численной схемы составляют:

1) построение d-мерного выпуклого многогранника Ω при формировании множеств его

```
function VERTPOLY(N, M, K)
    for m = 0 to M − 1 do
        v_m = PLACEPOINT(2K, N_{m+1});
        j_m = 0;
    repeat ν = ∅
        for m = 0 to M − 1 do
            ν = ν ∪ (v_m)_{j_m};
        V ⇐ ν;
    until NEXTPLACEMENT(j, 2K, M − 1);
    return V
```

Рис. 1. Псевдокод алгоритма формирования *V*
Fig. 1. Pseudocode of the *V* formation algorithm

```
function PLACEPOINT(K, N)
    for k = 0 to K − 1 do
        (v_0)_k = 0;
    for k = 1 to K do
        v_k = v_0;
        (v_k)_{k−1} = N;
    return v
```

Рис. 2. Псевдокод функции PLACEPOINT
Fig. 2. Pseudocode of the PLACEPOINT function

```
function NEXTPLACEMENT(j, K, M)
    i = M;
    while (i ≥ 0) ∧ (j_i = K) do i = i − 1;
    if i < 0 then return false;
    if j_i ≥ K then i = i − 1;
    j_i = j_i + 1;
    if i = M then return true;
    for k = i + 1 to M do j_k = 0;
    return true
```

Рис. 3. Псевдокод функции NEXTPLACEMENT
Fig. 3. Pseudocode of the NEXTPLACEMENT function

l-мерных граней (вершин V, ребер E, граней B^0, ячеек B^1 и пр.);

2) разбиение $\Omega = \bigcup_{u=1}^{U} \omega^{(u)}$ на симплексы $\omega^{(u)}$;

3) правила вычисления элементов вектора $\vec{W}$, матриц $\mathbf{Q}$, $\mathbf{S}$ и усреднения $\hat{\vec{Z}}(t) = \int_{\Omega} \vec{Z} p(\vec{Z}, t) d\vec{Z}$, уточняемые реализацией процедуры численного интегрирования по Ω.

Известно из [11], что количественная характеристика l-мерных граней $\left(l = \overline{0, d-1}\right)$ Ω определяется f- и h-векторами, соотнесенными с F- и H-полиномами. Исходя из правила построения $\Omega = \varepsilon^{(1)} \times \ldots \times \varepsilon^{(M)} \subset \mathbb{R}^d$ $2K$-мерными симплексами $\varepsilon^{(m)}$, справедливо представление F-полинома $\varepsilon^{(m)}$ в виде

$$F\left(\varepsilon^{(m)}, \tau\right) = \sum_{k=0}^{2K} \binom{2K+1}{k+1} \tau^k,$$

а H -полинома:

$$H\left(\varepsilon^{(m)}, \tau\right) = F\left(\varepsilon^{(m)}, \tau - 1\right) = \sum_{k=0}^{2K} \tau^k.$$

Тогда H -полином Ω, с учетом обобщения бинома Ньютона при введении мультимодальных коэффициентов, задается соотношением

$$H(\Omega, \tau) = \left(\sum_{k=0}^{2K} \tau^k\right)^M = \sum_{q \in \mathbb{M}_M^{2K}} \left[\binom{M}{q_1, q_2, \ldots, q_{2K+1}} \prod_{k=0}^{2K} \tau^{q_{k+1}} \right] = \sum_{l=0}^{d} h_l(\Omega) \tau^l. \tag{13}$$

Здесь $\mathbb{M}_M^{2K}$ – множество мультииндексов q, заданное по аналогии с (5) (быстрый алгоритм формирования $\mathbb{M}_r^d$ приведен в [12]); $h_l(\Omega)$ – элементы h-вектора, определяемые суммами мультимодальных коэффициентов из (13) по правилу:

$$h_l(\Omega) = \sum_{\substack{q \in \mathbb{M}_M^{2K} \\ s_q = l}} \binom{M}{q_1, q_2, \ldots, q_{2K+1}}, \tag{14}$$

где $s_q = \sum_{\substack{k \in [1;2K] \\ q_{k+1} \neq 0}} (k+1) q_{k+1}$.

Элементы $f_l(\Omega)$ f-вектора вычисляются из (14) выражением [11]

$$f_l(\Omega) = \sum_{l'=l}^{d} \binom{l'}{l} h_l(\Omega).$$

С учетом заданных количественных характеристик Ω выполняется формирование множеств его l-мерных граней. При этом изначально задается множество вершин V с числом элементов $f_0(\Omega) = |V| = (2K+1)^M$ – алгоритм VERTPOLY (рис. 1).

Основу работы алгоритма составляют функции определения множества исходных точек PLACEPOINT (рис. 2) и задания нового размещения с повторением NEXTPLACEMENT (рис. 3) [13].

Затем определяется множество ребер $E \subset V \times V$ с числом элементов $f_1(\Omega) = |E| = (2K+1)^M KM$, составляемых комбинацией пар неповторяющихся вершин V – алгоритм EDGEPOLY (рис. 4).

Множество граней B^0 с числом элементов $f_2(\Omega) = \left|B^0\right|$ формируется по заданным V и E при представлении Ω в виде неориентированного

```
function EdgePoly(V, M, K)
    for n = 0 to |V| − 2 do
        for n′ = n + 1 to |V| − 1 do
            i = 0;
            for m = 0 to M − 1 do
                j_m = 0;
                for k = 0 to 2K − 1 do
                    if (V_n)_{2mK+k} ≠ (V_{n′})_{2mK+k} then j_m = j_m + 1;
                if j_m > 0 then i = i + 1;
            if (i ≤ 1) ∨ (M = 1) then
                J = \sum_{m=0}^{M−1} j_m;
                if J ≤ 2K then
                    E ⇐ (n n′)^T;
    return E
```

Рис. 4. Псевдокод алгоритма формирования *E*
Fig. 4. Pseudocode of the *E* generation algorithm

```
function SearchCycles(E, V, L)
    while true do
        D = KirhgofMatrix(E, V);
        r = 0;
        for i = 0 to |V| − 1 do
            if D_ii > 1 then
                E′ = MST(D, V, i);
                if E′ ∉ T then
                    T_r = E′; r = r + 1;
        if r = 0 then break;
        E′ = ∅;
        for i = 0 to j − 1 do
            E′ = E′ ∪ T_i;
            Ẽ = E\T_i;
            for m′ = 0 to 1 do
                Ê = T_i;
                for n = 0 to |Ẽ| − 1 do j_n = n + 1;
                repeat
                    for m = 0 to m′ do Ê_{|T_i|+m} = Ẽ_{j_m−1};
                    c = DFSCycle(Ê, V, L);
                    if c ∉ C then
                        C ⇐ c;
                until NextCombination(j, i + 1, |Ẽ|);
        E = E\E′;
    return C
```

Рис. 5. Псевдокод алгоритма поиска циклов для *G* длиной *L*
Fig. 5. Pseudocode of the loop search algorithm for *G* of length *L*

графа $G(V,E)=\langle V,E\rangle$ и последовательном поиске в G всех циклов без хорд длиной $L=[3;4]$. Полиномиальный алгоритм поиска циклов базируется на алгоритмах построения остового дерева (алгоритм Прима [13] – MST) и рекурсивного поиска в глубину [13] – DFSCYCLE. Алгоритм поиска циклов SEARCHCYCLES для G длиной L приведен на рис. 5.

В алгоритме поиска циклов используются дополнительные функции построения матрицы Кирхгофа KIRHGOFMATRIX для G и задания нового сочетания без повторения NEXTCOMBINATION (рис. 6).

Множество ячеек B^1 с числом элементов $f_3(\Omega)=\left|B^1\right|$ формируется по B^0. Каждая грань представляется бинарным числом разрядностью, равной мощности множества *E*. Разрядом числа кодирует содержание соответствующего номера ребра из *E*: значение 1 характеризует наличие данного элемента в грани, значение 0 – отсутствие. Затем выделяются ячейки при определении сочетаний 4, 5 и 6 граней из общего числа:

```
function NextCombination(j, m, n)
    k = m;
    for i = k − 1 to 0 do
        if j_i < n − k + i + 1 then
            j_i = j_i + 1;
            for i' = i + 1 to k do j_{i'} = j_{i'−1} + 1;
            return true;
    return false
```

Рис. 6. Псевдокод функции NEXTCOMBINATION
Fig. 6. Pseudocode of the NEXTCOMBINATION function

1) 4 граней, составленных только из 3 ребер;

2) 5 граней, где четыре составлены из 3 ребер, а одна – из 5;

3) 5 граней: две составлены из 3 ребер, а три – из 5;

4) 6 граней, составленных только из 4 ребер.

Критерий в определении ячейки состоит в том, что сумма по модулю два всех двоичных чисел составляющих граней равна нулю.

Дальнейшая процедура формирования l-мерных граней выполняется по индукции.

Для Ω симплексы $\omega^{(u)}$ задаются при построении барицентрической триангуляции, которая реализуется индукцией по размерности триангуляцией l-мерных граней [11].

С учетом разбиения $\Omega = \bigcup_{u=1}^{U} \omega^{(u)}$ интеграл $I = \int_{\Omega} \eta(\vec{Z}) d\vec{Z}$ по Ω от некоторой функции η заменяется суммой $I = \sum_{u=1}^{U} \int_{\omega^{(u)}} \eta(\vec{Z}) d\vec{Z}$ по $\omega^{(u)}$ и сводится к реализации процедуры численного интегрирования:

$$I^{(u)} = \int_{\omega^{(u)}} \eta(\vec{Z}) d\vec{Z} = \sum_{j \in \mathbb{M}_I^d} \eta(\vec{\xi}_j) \kappa_j, \qquad (15)$$

где $I \in \mathbb{N}$ – порядок численного интегрирования; узловые точки $\vec{\xi}_j$ и весовые коэффициенты κ_j, вычисляемые по правилам кубатурных формул для симплексов. Для мастер-элемента ω единичной размерности значения $\vec{\xi}_j \in \omega$ и κ_j определяются по правилам:

$$\vec{\xi}_j = \left(X_{j_1}^0 \quad \ldots \quad X_{j_d}^0 \right)^{\mathrm{T}}; \qquad \vec{\kappa} = \mathbf{O}^{-1} \vec{B}, \qquad (16)$$

где

$$X_{j_l}^0 = X_{j_l} \Big/ \sum_{k=1}^{d} X_{j_k} \qquad \left(l = \overline{1,d}\right);$$

X_i $\left(i = \overline{1,I}\right)$ – корни многочлена Лежандра первого рода порядка I [14]; $\vec{B} = \left(b_j\right)_{\left|\mathbb{M}_I^d\right|}$ при

$$b_j = \prod_{k=1}^{d} \Gamma\left(X_{j_k}^0 I + 1\right) \Big/ (I + d - 1)!$$

и обозначении гамма-функции $\Gamma(\bullet)$;

$$\mathbf{O} = \left(O_{jj'}\right)_{\left|\mathbb{M}_I^d\right| \times \left|\mathbb{M}_I^d\right|} \text{ при } O_{jj'} = \prod_{k=1}^{d} \left(X_{j'_k}^0\right)^{j_k}.$$

Заключение

Таким образом, в настоящей статье в развитие моделей [2–6] информационного влияния, управления и противоборства в социуме при формализации содержательной постановки задачи, выделении системы ограничений и допущений, разработке математической модели, численной схемы и алгоритмических реализаций сформировано алгоритмическое решение в задаче оценки информационного воздействия на электорат при проведении выборных кампаний. Математическая модель базируется на обобщенной модели информационного противоборства в структурированном социуме [2–5]. При разделении общества численностью N_0 на M подгрупп и введении стохастических компонент данная модель сводится к стохастическому дифференциальному уравнению, которое при понимании в смысле Ито [7] приводит к необходимости решения уравнения ФПК (2) для определения эволюции функции плотности вероятности $p(\vec{Z}, t)$. Решение (2) предложено выполнять численно в проекционной постановке метода Галеркина при задании кусочно-полиномиальной аппроксимации (4), требующей разбиения области анализа Ω на симплексы $\omega^{(u)}$. Для сформированной численной схемы определена оценка сходимости (12) и уточнены особенности алгоритмической реализации, сводящиеся к построению Ω, его разбиению $\Omega = \bigcup_{u=1}^{U} \omega^{(u)}$ и уточнению реализации процедур численного интегрирования по Ω.

Список литературы

1. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
2. Петров А.П., Маслов А.И., Цаплин Н.А. Моделирование выбора позиций индивидами при информационном противоборстве в социуме // Математическое моделирование. 2015. Т. 27, № 12. С. 137–148. URL: http://mi.mathnet.ru/mm3684
3. Моделирование спада общественного внимания к прошедшему разовому политическому событию / А.П. Михайлов [и др.] // ДАН. 2018. Т. 480, № 4. С. 397–400. DOI: https://doi.org/10.7868/S0869565218160028

4. Петров А.П., Прончева О.Г. Моделирование выбора позиций индивидами при информационном противоборстве с двухкомпонентной повесткой // Математическое моделирование. 2019. Т. 31, № 7. С. 91–108. DOI: https://doi.org/10.1134/S0234087919070062
5. Развитие модели распространения информации в социуме / А.П. Михайлов [и др.] // Математическое моделирование. 2014. Т. 26, № 3. С. 65–74. URL: http://mi.mathnet.ru/mm3459
6. Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства. М.: Физматлит, 2010. 228 с.
7. Кузнецов Д.Ф. Некоторые вопросы теории численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 1998. № 1. С. 66–367. URL: https://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/1998.1/article.1.3.html
8. Ильинский А.С., Полянский И.С., Степанов Д.Е. О сходимости барицентрического метода в решении внутренних задач Дирихле и Неймана в R^2 для уравнения Гельмгольца // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31, № 1. С. 3–18. DOI: https://doi.org/10.35634/vm210101
9. Kainen P.C., Kurkova V., Sanguineti M. Estimates of approximation rates by Gaussian radial-basis functions // CANNGA 2007: Adaptive and Natural Computing Algorithms. 2007. P. 11–18. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-540-71629-7_2
10. Даугавет И.К. Теория приближенных методов. Линейные уравнения. 2-е изд., перераб. и доп. СПб.: БХВ-Петербург, 2006. 288 с.
11. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация (комбинаторная теория многогранников). М.: Наука; Глав. ред. физ-мат лит., 1981. 344 с.
12. Электродинамический анализ зеркальных антенн в приближении барицентрического метода / И.С. Полянский [и др.] // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2020. Т. 23, № 4. С. 36–47. DOI: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2020.23.4.36-47
13. Алгоритмы: построение и анализ. 2-е изд. / Т.Х. Кормен [и др.]; пер. с англ. М.: Вильямс, 2010. 1296 с.
14. Ильинский А.С., Полянский И.С. Приближенный метод определения гармонических барицентрических координат для произвольных многоугольников // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2019. Т. 59, № 3. С. 391–408. DOI: https://doi.org/10.1134/S0044466919030098

References

1. Samarskiy A.A., Mikhailov A.P. *Math Modeling*. Moscow: Fizmatlit, 2001, 320 p. (In Russ.)
2. Petrov A.P., Maslov A.I., Tsaplin N.A. Modeling the choice of positions by individuals during information confrontation in society. *Matematicheskoe modelirovanie*, 2015, vol. 27, no. 12, pp. 137–148. URL: http://mi.mathnet.ru/mm3684 (In Russ.)
3. Mihajlov A.P. et al. Modeling the decline in public attention to a past one-time political event. *DAN*, 2018, vol. 480, no. 4, pp. 397–400. DOI: https://doi.org/10.7868/S0869565218160028 (In Russ.)
4. Petrov A.P., Proncheva O.G. Modeling the choice of positions by individuals in an information confrontation with a two-component agenda. *Matematicheskoe modelirovanie*, 2019, vol. 31, no. 7, pp. 91–108. DOI: https://doi.org/10.1134/S0234087919070062 (In Russ.)
5. Mihajlov A.P. et al. Development of a model for the dissemination of information in society. *Matematicheskoe modelirovanie*, 2014, vol. 26, no. 3, pp. 65–74. URL: http://mi.mathnet.ru/mm3459 (In Russ.)
6. Gubanov D.A., Novikov D.A., Chhartishvili A.G. *Social Networks: Models of Information Influence, Control and Confrontation*. Moscow: Fizmatlit, 2010, 228 p. (In Russ.)
7. Kuznetsov D.F. Some questions of the theory of the numerical solution of Ito stochastic differential equations. *Differentsial'nye uravnenija i protsessy upravlenija*, 1998, no. 1, pp. 66–367. URL: https://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/1998.1/article.1.3.html (In Russ.)
8. Il'inskij A.S., Polyanskii I.S., Stepanov D.E. On the convergence of the barycentric method in solving the Dirichlet and Neumann interior problems in R^2 for the Helmholtz equation. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mehanika. Komp'juternye nauki*, 2021, vol. 31, no. 1, pp. 3–18. DOI: https://doi.org/10.35634/vm210101 (In Russ.)
9. Kainen P.C., Kurkova V., Sanguineti M. Estimates of approximation rates by Gaussian radial-basis functions. *CANNGA 2007: Adaptive and Natural Computing Algorithms*, 2007, pp. 11–18. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-540-71629-7_2
10. Daugavet I.K. *The Theory of Approximate Methods. Linear Equations*. 2nd ed., rev. and add. Saint Petersburg: BHV-Peterburg, 2006, 288 p. (In Russ.)
11. Emelichev V.A., Kovalev M.M., Kravtsov M.K. *Polytopes, Graphs, Optimization (Combinatorial Theory of Polyhedra)*. Moscow: Nauka; Glav. red. fiz-mat lit., 1981, 344 p. (In Russ.)
12. Polyanskii I.S. et al. Electrodynamic analysis of reflector antennas in the approximation of the barycentric method. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2020, vol. 23, no. 4, pp. 36–47. DOI: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2020.23.4.36-47 (In Russ.)
13. Corman T.H. et al. *Algorithms: Construction and Analysis*. 2nd ed, Eng. trans. Moscow: Williams, 2010, 1296 p. (In Russ.)
14. Il'inskij A.S., Polyanskii I.S. An approximate method for determining harmonic barycentric coordinates for arbitrary polygons. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki*, 2019, vol. 59, no. 3, pp. 391–408. DOI: https://doi.org/10.1134/S0044466919030098 (In Russ.)

Physics of Wave Processes and Radio Systems
2021, vol. 24, no. 4, pp. 72–80

DOI 10.18469/1810-3189.2021.24.4.72-80

Received 22 September 2021
Accepted 25 October 2021

Algorithmic solutions to the problem of assessing the information impact on the electorate during election campaigns

Ivan S. Polyanskii, Inna V. Polyanskaya, Kirill O. Loginov

Academy of the Federal Guard Service of the Russian Federation
35, Priborostroitelnaya Street,
Oryol, 302015, Russia

Abstract – In the article, to solve the problem of assessing the information impact on the electorate during election campaigns, algorithmic solutions, including a mathematical model, a numerical scheme and algorithmic implementations, are formed. This assessment is reduced to determining the instantaneous values of the number of voters who prefer a candidate (party), taking into account: the positive or negative stochastic nature of the impact of mass media; interpersonal interaction; two-step assimilation of information; the presence of a variety of mass media, social groups and a list of candidates. The mathematical model is based on a generalized model of information confrontation in a structured society and, with the introduction of stochastic components in the intensity of agitation, it is reduced to solving the Fokker–Planck–Kolmogorov equation. For its study in the formulation of the Galerkin method, a numerical scheme is proposed and the order of its convergence is determined. In relation to the basic procedures of the numerical scheme, the features of the algorithmic implementation are clarified.

Keywords – information impact assessment; election campaign; algorithmic solutions; Fokker–Planck–Kolmogorov equation; Gaussian basis functions; convergence estimation; triangulation of a multidimensional polyhedron; numerical integration over a multidimensional simplex.

Информация об авторах

Полянский Иван Сергеевич, доктор физико-математических наук, доцент, сотрудник Академии Федеральной службы охраны Российской Федерации, г. Орел, Россия. Число научных публикаций – 148.

Область научных интересов: математическое моделирование, динамические системы, дифференциальные уравнения, методы оптимизации, оптимальное управление, конформные отображения, вычислительная электродинамика, цифровая обработка сигналов.

E-mail: van341@mail.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1282-1522

Полянская Инна Валерьевна, кандидат экономических наук, доцент, сотрудник Академии Федеральной службы охраны Российской Федерации, г. Орел, Россия. Автор 94 научных публикаций.

Область научных интересов: менеджмент, эконометрика, методы статистического анализа данных, динамические системы, экономическая безопасность.

E-mail: van341@mail.ru

Логинов Кирилл Олегович, сотрудник Академии Федеральной службы охраны Российской Федерации, г. Орел, Россия. Автор 6 научных публикаций.

Область научных интересов: математическое моделирование, методы статистического анализа данных, динамические системы, оптимальное управление, стохастические дифференциальные уравнения.

E-mail: kvirs@mail.ru

Information about the Authors

Ivan S. Polyanskii, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, employee of the Academy of the Federal Guard Service of the Russian Federation, Oryol, Russia. The number of scientific publications is 148.

Research interests: mathematical modeling, dynamical systems, differential equations, optimization methods, optimal control, conformal mappings, computational electrodynamics, digital signal processing.

E-mail: van341@mail.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1282-1522

Inna V. Polyanskaya, Candidate of Economic Sciences, associate professor, employee of the Academy of the Federal Guard Service of the Russian Federation, Oryol, Russia. Author of 94 scientific publications.

Research interests: management, econometrics, methods of statistical data analysis, dynamic systems, economic security.

E-mail: van341@mail.ru

Kirill O. Loginov, employee of the Academy of the Academy of the Federal Guard Service of the Russian Federation, Oryol, Russia. Author of 6 scientific publications.

Research interests: mathematical modeling, methods of statistical data analysis, dynamical systems, optimal control, stochastic differential equations.

E-mail: kvirs@mail.ru