

## Сингулярное интегральное уравнение для электрического вибратора с учетом конечной проводимости металла, из которого он изготовлен

Д.С. Ключев , Ю.В. Соколова 

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики  
443010, Россия, г. Самара,  
ул. Л. Толстого, 23

**Аннотация** – Получено сингулярное интегральное уравнение для электрического вибратора, позволяющее учитывать конечную проводимость металла, из которого он изготовлен. Вывод сингулярного интегрального уравнения основан на применении функции Грина для свободного пространства, записанной в цилиндрической системе координат с учетом отсутствия зависимости поля от азимутальной координаты, от точечного источника, расположенного на поверхности электрического вибратора. Предложены методы его решения. В отличие от известных математических моделей электрического вибратора, построенных в приближении идеального проводника, применение полученного в данной работе сингулярного интегрального уравнения позволяет учесть тепловые потери и рассчитать КПД.

**Ключевые слова** – электрический вибратор; поле в ближней зоне; некорректная математическая задача; функция Грина; сингулярные интегральные уравнения; самосогласованная постановка задачи; тепловые потери; конечная электрическая проводимость; КПД.

### Введение

Проблема определения электромагнитных полей (ЭМП) непосредственно вблизи радиотехнических устройств (с точки зрения терминологии теории антенн – в ближней зоне антенны) связана с исследованиями в областях электромагнитной совместимости (ЭМС), электромагнитной экологии (ЭМЭ), а также в области антенных измерений. Обычно электромагнитное поле излучения электрического вибратора (рис. 1) вычисляется с помощью  $z$ -составляющей векторного электродинамического потенциала  $A_z^e$ , определяемой через  $z$ -составляющую тока на вибраторе  $I_z(z) = 2\pi a \eta_z(z)$  ( $\eta_z$  –  $z$ -составляющая поверхностной плотности тока на вибраторе,  $a$  – радиус вибратора) [1–3]:

$$A_z^e(\rho, z) = \int_{-l}^l I_z(z') G(\rho, z - z') dz', \quad (1)$$

$$G(\rho, z - z') = \frac{1}{4\pi R} \exp\{-ikR\}, \quad (2)$$

где  $R = \sqrt{(z - z')^2 + \rho^2}$ ;  $k = \omega \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}$  – волновое число;  $\omega$  – циклическая частота;  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная,  $\mu_0$  – магнитная постоянная;  $\epsilon$ ,  $\mu$  – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, окружающей вибратор, соответственно;  $2l$  – длина вибратора. Очевидно, что  $G(\rho, z - z')$  – функция Грина свободного простран-

ства от точечного источника, помещенного в точку ( $\rho = 0, z = z'$ ), т. е. на линию  $\rho = 0$ . Неизвестное распределение тока  $I_z(z)$  по вибратору обычно определяется либо из интегрального уравнения Поклингтона, либо из интегрального уравнения Халлена. Зная функцию  $I_z(z)$ , путем обычного дифференцирования выражения (1) по координатам  $\rho$  и  $z$  [1–3] несложно получить выражения для составляющих электромагнитного поля излучения вибратора в любой точке пространства. Полученные таким образом численные значения полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в ближней зоне электрического вибратора по крайней мере по двум причинам должны проверяться на достоверность. Во-первых, определение неизвестного тока  $I_z(z)$  по вибратору из интегральных уравнений Поклингтона и Халлена (интегральных уравнений Фредгольма первого рода) приводит к некорректно поставленной задаче [4]. Во-вторых, использование при расчетах поля функции Грина (2) приводит к несамосогласованной постановке задачи, т. к. в этом случае отсутствует предельный переход от поля в ближней зоне к полю (току) на поверхности вибратора. В-третьих, в этих уравнениях не учитывается конечная проводимость плеч вибратора.

В [5–8] развит метод сингулярных интегральных уравнений (СИУ), позволяющий задачу расчета распределения тока по электрическому вибратору свести к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Этот подход дает возможность ма-

тематически корректно подойти к определению распределения поверхностной плотности тока на вибраторе. Однако полученное в этих работах СИУ имеет тот же недостаток – в нем не учтена конечная проводимость плеч вибратора.

Данная работа является обобщением работ [5–8] в том смысле, что получено СИУ для электрических вибраторов с конечной проводимостью плеч, а следовательно, оно позволяет учитывать тепловые потери.

## 1. Постановка задачи. Сингулярное интегральное представление электромагнитного поля

Будем рассматривать не зависящее от угла  $\varphi$  электромагнитное поле электрического вибратора [6; 7] длиной  $2l$  и радиуса  $a$ , возбуждаемого в области разрыва ( $z \in [l_0 - b, l_0 + b]$ ) генератором высокой частоты (на рис. 1 показана геометрия вибратора). В предположении отсутствия вариации поля вдоль координаты  $\varphi$  уравнения Максвелла распадаются на две независимые системы относительно составляющих  $\{E_\rho, E_z, H_\varphi\}$  и  $\{E_\varphi, H_\rho, H_z\}$ . Очевидно, что при рассмотрении поля излучения вибраторов относительно малого радиуса ( $a < \lambda$ ) необходимо исходить из системы уравнений Максвелла, описывающей поведение составляющих  $E_\rho$ ,  $E_z$  и  $H_\varphi$ . В этом случае на поверхности вибратора существует только продольная составляющая поверхностной плотности тока  $\eta_z$ .

Исходным для получения СИП электромагнитного поля вибратора является выражение (1) для  $z$ -составляющей векторного электродинамического потенциала для электрического тока  $A_z^e$  через  $z$ -составляющую поверхностной плотности тока  $\eta_z$  на вибраторе, но с другой функцией Грина [9]:

$$G(\rho, z - z') = \frac{1}{8\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ih(z-z')} g(h, \rho) dh, \quad (3)$$

где

$$g(h, \rho) = \begin{cases} J_0(-i\rho v) H_0^{(2)}(-iav) & \text{при } \rho \leq a, \\ J_0(-iav) H_0^{(2)}(-i\rho v) & \text{при } \rho > a. \end{cases}$$

$J_0(x)$  – функция Бесселя первого рода нулевого порядка;  $H_0^{(2)}(x)$  – функция Ханкеля второго рода нулевого порядка,  $v = \sqrt{h^2 - k^2}$ .

Выражение (3) есть функция Грина свободного пространства, записанная в цилиндрической системе координат с учетом отсутствия зависимости поля от координаты  $\varphi$ , от точечного источ-

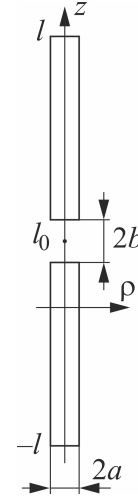


Рис. 1. Геометрия электрического вибратора  
Fig. 1. Geometry of the electric vibrator

ника, расположенного в точке  $(\rho = a, z = z')$ , т. е. на поверхности электрического вибратора. Здесь необходимо отметить, что выбор функции Грина  $G(\rho, z - z')$  в (1) в виде (3) соответствует физической модели трубчатого вибратора, согласно которой вибратор представляется в виде двух полых трубок конечных размеров [6; 7]. Составляющие электромагнитного поля излучения вибратора при этом определяются по формулам:

$$\begin{aligned} E_\rho &= \frac{1}{i\omega\epsilon_0\epsilon} \frac{\partial^2 A_z^e}{\partial\rho\partial z}, \\ E_z &= -i\omega\mu_0\mu A_z^e + \frac{1}{i\omega\epsilon_0\epsilon} \frac{\partial^2 A_z^e}{\partial z^2}, \\ H_\varphi &= -\frac{\partial A_z^e}{\partial\rho}. \end{aligned} \quad (4)$$

Подстановка (1) с функцией Грина (3) в (4) приводит к следующим интегральным представлениям для составляющих электромагнитного поля вибратора в любой точке пространства через ток  $I_z(z)$  на его поверхности:

$$\begin{aligned} E_\rho(\rho, z) &= \frac{1}{i\omega\epsilon_0\epsilon} \int_{-l}^l I_z(z') G_\rho^{(1)}(\rho, z - z') dz', \\ E_z(\rho, z) &= \frac{1}{i\omega\epsilon_0\epsilon} \int_{-l}^l I_z(z') G_z^{(1)}(\rho, z - z') dz', \\ H_\varphi(\rho, z) &= -\int_{-l}^l I_z(z') G_\varphi^{(1)}(\rho, z - z') dz', \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$G_\rho^{(1)} = \frac{1}{8\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ih(z-z')} g_\rho(h, \rho) dh,$$

$$G_z^{(1)} = \frac{1}{8\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ih(z-z')} g_z(h, \rho) dh, \quad (6)$$

$$G_\varphi^{(1)} = \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ih(z-z')} g_\varphi(h, \rho) dh.$$

В соотношениях (6)

$$g_\varphi(h, \rho) = vJ_0(-iav)H_1^{(2)}(-ipv),$$

$$g_\rho(h, \rho) = hg_\varphi(h, \rho),$$

$$g_z(h, \rho) = v^2J_0(-iav)H_0^{(2)}(-ipv) \text{ для } \rho > a,$$

и

$$g_\varphi(h, \rho) = vJ_0(-ipv)H_1^{(2)}(-iav),$$

$$g_\rho(h, \rho) = hg_\varphi(h, \rho),$$

$$g_z(h, \rho) = v^2J_0(-ipv)H_0^{(2)}(-iav) \text{ для } \rho \leq a.$$

Можно показать, что при  $\rho = a$

$$\lim_{|h| \rightarrow \infty} g_\varphi(h, a) = \frac{1}{\pi a},$$

$$\lim_{|h| \rightarrow \infty} g_\rho(h, a) = -\frac{ih}{\pi a},$$

$$\lim_{|h| \rightarrow \infty} g_z(h, a) = -i \operatorname{sgn}(h) \frac{h}{\pi a}.$$

Таким образом, несобственные интегралы (6) в интегральных представлениях (5) не сходятся, и простое усечение в них бесконечных пределов может привести к неверным физическим результатам. Поэтому непосредственный переход выражений (5) при  $\rho \rightarrow a$  в известные граничные условия невозможен.

Выделим особенности в (6) в явном виде. С этой целью из подынтегральных функций  $g_z$ ,  $g_\rho$ ,  $g_\varphi$  в (6) вычтем их асимптотические выражения и перейдем от функции  $I_z(z)$  к ее производной  $J_z(z) = dI_z(z)/dz$  в соотношениях для  $E_\rho$  и  $E_z$ . В результате получим следующие СИП:

$$E_\rho(\rho, z) = \frac{1}{i\omega\epsilon\epsilon_0} \int_{-l}^l J_z(z') [G_\varphi(\rho, z-z') + S_1(\rho, z-z')] dz',$$

$$E_z(\rho, z) = \frac{1}{i\omega\epsilon\epsilon_0} \int_{-l}^l J_z(z') [G_z(\rho, z-z') + S_2(\rho, z-z')] dz', \quad (7)$$

$$H_\varphi(\rho, z) = - \int_{-l}^l I_z(z') [G_\varphi(\rho, z-z') + S_1(\rho, z-z')] dz',$$

определяющие поле электрического вибратора в любой точке пространства через функции  $J_z(z)$  и  $I_z(z)$ , определенные на его поверхности. Функции Грина  $G_\varphi$  и  $G_z$  представляют собой сходящиеся интегралы:

$$G_\varphi(\rho, z-z') = \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ih(z-z')} \Delta g_\varphi(h, \rho) dh, \quad (8)$$

$$G_z(\rho, z-z') = \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ih(z-z')} \Delta g_z(h, \rho) dh,$$

где

$$\Delta g_\varphi(h, \rho) = vJ_0(-iav)H_1^{(2)}(-ipv) + \frac{1}{\pi\sqrt{a\rho}} e^{-(\rho-a)|h|},$$

$$\Delta g_z(h, \rho) = \frac{v^2}{h} J_0(-iav)H_0^{(2)}(-ipv) - \frac{i}{\pi\sqrt{a\rho}} \operatorname{sgn}(h) e^{-(\rho-a)|h|} \text{ для } \rho \geq a.$$

Анализ показывает, что функции  $\Delta g_z$ ,  $\Delta g_\varphi$  при  $|h| \rightarrow \infty$  убывают не медленнее, чем  $O(h^{-2})$ . Функции  $S_1$  и  $S_2$  при  $\rho \rightarrow a$  имеют выделенные особенности:

$$S_1(\rho, z-z') = -\frac{1}{4\pi^2\sqrt{a\rho}} \left[ \frac{\rho-a}{(z-z')^2 + (\rho-a)^2} \right], \quad (9)$$

$$S_2(\rho, z-z') = \frac{1}{4\pi^2\sqrt{a\rho}} \left[ \frac{z-z'}{(z-z')^2 + (\rho-a)^2} \right].$$

## 2. Сингулярное интегральное уравнение, получаемое из интегрального представления электромагнитного поля

Одно из достоинств СИП (7) состоит в том, что они справедливы для любой точки пространства, включая саму излучающую поверхность вибратора  $\rho = a$ . В этом случае  $E_z$  из СИП (7) можно записать в виде

$$E_z(z) = \frac{1}{i4\pi a \omega \epsilon \epsilon_0} \times \left( \int_{-l}^l J_z(z') M(z-z') dz' + \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l \frac{J_z(z')}{z-z'} dz' \right), \quad (10)$$

где

$$M(z-z') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ih(z-z')} \times$$

$$\times \left[ \frac{\pi a v^2}{h} J_0(-iav) H_0^{(2)}(-iav) - i \operatorname{sgn}(h) \right] dh.$$

Если воспользоваться граничным условием для идеального проводника на поверхности вибратора  $\rho = a$ :

$$E_z = \begin{cases} 0 & \text{при } z \in [-l, l_0 - b] \cup [l_0 + b, l], \\ -E_z^{\text{CT}} & \text{при } z \in [l_0 - b, l_0 + b], \end{cases}$$

где  $E_z^{\text{CT}}$  –  $z$ -составляющая стороннего электрического поля в зазоре вибратора, то СИП (10) переходит в известное СИУ [5–8]. Однако это уравнение не учитывает тепловые потери в плечах вибратора, потому что они считаются идеально проводящими, т. е. их проводимость равна бесконечности. У реальных вибраторов электрическая проводимость конечна, поэтому ток, протекающий по ним, в общем случае распределен по всему поперечному сечению проводника, но основная его часть будет сосредоточена в скин-слое. Так как на высоких частотах скин-слой весьма тонкий, то реальную объемную плотность тока заменяют эквивалентной поверхностной плотностью тока [11]. В этом случае на печах вибратора  $z$ -составляющая напряженности электрического поля уже не будет равна нулю, а будет удовлетворять граничным условиям Леонтовича – Щукина [11]:

$$E_z = \begin{cases} Z_S \eta_z^{\text{ЭКВ}}(z) & \\ \text{при } z \in [-l, l_0 - b] \cup [l_0 + b, l], & (11) \\ -E_z^{\text{CT}} & \text{при } z \in [l_0 - b, l_0 + b], \end{cases}$$

где  $\eta_z^{\text{ЭКВ}}(z)$  –  $z$ -составляющая эквивалентной поверхностной плотности тока;  $Z_S$  – поверхностное сопротивление плечей вибратора, равное [11]:

$$Z_S = \frac{k_p J_0(k_p a)}{\sigma J_1(k_p a)},$$

где

$$k_p = (1-i) \sqrt{\frac{\omega \mu_p \mu_0 \sigma}{2}},$$

$\sigma$  – удельная проводимость плеч вибратора;  $J_0$ ,  $J_1$  – функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков соответственно;  $\mu_p$  – относительная магнитная проницаемость плеч вибратора.

Ток на вибраторе связан с эквивалентной поверхностной плотностью тока соотношением

$$I_z(z) = 2\pi a \eta_z^{\text{ЭКВ}}(z),$$

поэтому граничные условия (11) можно переписать в виде

$$E_z = \begin{cases} \frac{Z_S}{2\pi a} I_z(z) & \\ \text{при } z \in [-l, l_0 - b] \cup [l_0 + b, l], & \\ -E_z^{\text{CT}} & \text{при } z \in [l_0 - b, l_0 + b]. \end{cases}$$

Подставив граничные условия (11) в СИП (10), получаем СИУ, аналогичное полученному в [5–8], но в котором учтена конечная проводимость плеч вибратора, а значит, и тепловые потери:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-l}^l \frac{J_z(z')}{z-z'} dz' = i4\pi a \omega \epsilon \epsilon_0 E_z(z) - \int_{-l}^l J_z(z') M(z-z') dz'. \quad (12)$$

Как видно, в случае идеального проводника СИУ (12) переходит в СИУ, полученное в [5–8].

Для решения СИУ (12) применим к нему формулу обращения интеграла типа Коши неограниченного на концах интервала  $[-l, l]$ .

$$J_z(z) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{l^2 - z^2}} \times \left( -i4\pi a \omega \epsilon \epsilon_0 \left( \frac{Z_S}{2\pi a} \left( \int_{-l}^{l_0-b} \frac{\sqrt{l^2 - z'^2}}{z'-z} I_z(z') dz' + \int_{l_0+b}^l \frac{\sqrt{l^2 - z'^2}}{z'-z} I(z') dz' \right) - \int_{l_0-b}^{l_0+b} \frac{\sqrt{l^2 - z'^2}}{z'-z} E_z^{\text{CT}}(z') dz' \right) + \int_{-l}^l \int_{-l}^l \frac{\sqrt{l^2 - z'^2}}{z'-z} J_z(z'') M(z'-z'') dz' dz'' \right). \quad (13)$$

Решать уравнение (13) можно, например, методом моментов. Для этого неизвестные функции  $I_z(z)$  и  $J_z(z)$  необходимо представить в виде разложений в ряды по полиномам Чебышева первого  $U_n$  и второго рода  $T_n$ :

$$I_z(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n} \sqrt{1 - (z/l)^2} U_{n-1}(z/l), \quad (14)$$

$$J_z(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n T_n(z/l)}{\sqrt{1 - (z/l)^2}},$$

где  $A_n$  – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Другие методы решения уравнений подобного рода подробно описаны в [11].

### Заключение

Большинство существующих математических моделей электрического вибратора построены в приближении идеального проводника, поэтому не позволяют учитывать тепловые потери, оказывающие существенное влияние на его КПД. Для исследуемой антенны необходимо решить внутреннюю задачу анализа в строгой электродинамической постановке, т. е. определить поверхностную плотность электрического тока на металлической поверхности с учетом ее конечной

проводимости. В настоящее время известен весьма эффективный математический аппарат – аппарат СИУ, который позволяет математически корректно решать такие задачи. В статье с помощью данного аппарата получено СИУ для электрического вибратора, позволяющее, в отличие от известных, учитывать конечную проводимость металла, из которого он изготовлен.

Описанный в статье метод может быть (без особых принципиальных трудностей) применен на другие излучающие структуры, например полосковые вибраторные и рамочные антенны, для которых были получены СИУ в приближении идеального проводника.

### Список литературы

1. Марков Г.Т., Сазонов Д.М. Антенны. М.: Энергия, 1975. 528 с.
2. Устройства СВЧ и антенны. Изд. 2-е, доп. и перераб. / Д.И. Воскресенский [и др.]; под ред. Д.И. Воскресенского. М.: Радиотехника, 2006. 376 с.
3. Вычислительные методы в электродинамике / под ред. Р. Митры. М.: Мир, 1977. 486 с.
4. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
5. Неганов В.А., Матвеев И.В. Новый метод расчета тонкого электрического вибратора // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. 2000. Т. 43. № 4. С. 335–344.
6. Неганов В.А., Матвеев И.В., Медведев С.В. Метод сведения уравнения Поклингтона для электрического вибратора к сингулярному интегральному уравнению // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. № 12. С. 86–94. URL: <http://journals.ioffe.ru/articles/37819>
7. Неганов В.А., Матвеев И.В. Применение сингулярного интегрального уравнения для расчета тонкого электрического вибратора // Доклады Академии наук. 2000. Т. 373. № 1. С. 36–38. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=44515115>
8. Неганов В.А. Физическая регуляризация некорректных задач электродинамики. М.: Сайнс-Пресс, 2008. 432 с.
9. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.; Л.: Энергия, 1967. 376 с.
10. Пименов Ю.В., Вольман В.И., Муравцов А.Д. Техническая электродинамика / под ред. Ю.В. Пименова. М.: Радио и связь, 2002. 536 с.
11. Сингулярные и гиперсингулярные интегральные уравнения в теории зеркальных и полосковых антенн / А.Н. Дементьев [и др.]. М.: Радиотехника, 2015. 216 с.

### References

1. Markov G.T., Sazonov D.M. *Antennas*. Moscow: Energija, 1975, 528 p. (In Russ.)
2. Voskresensky D.I. et al. *Microwave devices and antennas*. Ed. by D.I. Voskresensky. Moscow: Radiotekhnika, 2006, 376 p. (In Russ.)
3. *Computational Methods in Electrodynamics*. Ed. by R. Mitra. Moscow: Mir, 1977, 486 p. (In Russ.)
4. Tihonov A.N., Arsenin V.Ya. *Methods for Solving Ill-Posed Problems*. Moscow: Nauka, 1979, 288 p. (In Russ.)
5. Neganov V.A., Matveev I.V. A new method for calculating a thin electric vibrator. *Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Radiofizika*, 2000, vol. 43, no. 4, pp. 335–344. (In Russ.)
6. Neganov V.A., Matveev I.V., Medvedev S.V. A method for reducing the Pocklington equation for an electric vibrator to a singular integral equation. *Pis'ma v ZhTF*, 2000, vol. 26, no. 12, pp. 86–94. URL: <http://journals.ioffe.ru/articles/37819> (In Russ.)
7. Neganov V.A., Matveev I.V. Application of a singular integral equation to calculate a thin electric vibrator. *Doklady Akademii nauk*, 2000, vol. 373, no. 1, pp. 36–38. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=44515115> (In Russ.)
8. Neganov V.A. *Physical Regularization of Ill-Posed Problems in Electrodynamics*. Moscow: Sajns-Press, 2008, 432 p. (In Russ.)
9. Markov G.T., Chaplin A.F. *Excitation of Electromagnetic Waves*. Moscow; Leningrad: Energija, 1967, 376 p. (In Russ.)
10. Pimenov Yu.V., Vol'man V.I., Muravtsov A.D. *Technical Electrodynamics*. Ed. by Yu.V. Pimenov. Moscow: Radio i svjaz', 2002, 536 p. (In Russ.)
11. Dement'ev A.N. et al. *Singular and Hypersingular Integral Equations in the Theory of Mirror and Strip Antennas*. Moscow: Radiotekhnika, 2015, 216 p. (In Russ.)

## Physics of Wave Processes and Radio Systems

2021, vol. 24, no. 4, pp. 13–18

DOI 10.18469/1810-3189.2021.24.4.13-18

Received 8 November 2021  
Accepted 9 December 2021

### Singular integral equation for an electric dipole taking into account the finite metal conductivity from which it is made

Dmitriy S. Klyuev , Yulia V. Sokolova Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics  
23, L. Tolstoy Street,  
Samara, 443010, Russia

*Abstract* – A singular integral equation for an electric dipole has been obtained, which makes it possible to take into account the finite conductivity of the metal from which it is made. The derivation of the singular integral equation is based on the application of the Green’s function for free space, written in a cylindrical coordinate system, taking into account the absence of the dependence of the field on the azimuthal coordinate, on a point source located on the surface of an electric dipole. Methods for its solution are proposed. In contrast to the well-known mathematical models of an electric dipole, built in the approximation of an ideal conductor, the use of the singular integral equation obtained in this work makes it possible to take into account heat losses and calculate the efficiency.

*Keywords* – electric dipole; field in the near zone; ill-posed mathematical problem; Green’s function; singular integral equations; self-consistent formulation of the problem; heat losses; finite electrical conductivity; efficiency.

#### Информация об авторах

**Клюев Дмитрий Сергеевич**, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой радиоэлектронных систем Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия. Автор более 200 научных работ.

*Область научных интересов:* электродинамика, устройства СВЧ, антенны, метаматериалы.

*E-mail:* klyuevd@yandex.ru

*ResearcherID Web of Science:* O-6025-2015

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0002-9125-7076>

**Соколова Юлия Владимировна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры радиоэлектронных систем Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия.

*Область научных интересов:* электродинамика, устройства СВЧ, антенны, метаматериалы.

*E-mail:* ula.81.81@mail.ru

*ResearcherID Web of Science:* K-8491-2018

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0003-2873-8675>

#### Information about the Authors

**Dmitriy S. Klyuev**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Radioelectronic Systems, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia. Author of over 200 scientific papers.

*Research interests:* electrodynamics, microwave devices, antennas, metamaterials.

*E-mail:* klyuevd@yandex.ru

*ResearcherID Web of Science:* O-6025-2015

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0002-9125-7076>

**Yulia V. Sokolova**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Radioelectronic Systems, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia.

*Research interests:* electrodynamics, microwave devices, antennas, metamaterials.

*E-mail:* ula.81.81@mail.ru

*ResearcherID Web of Science:* K-8491-2018

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0003-2873-8675>