

## Перепутывание двух дипольно связанных кубитов, индуцированное тепловым полем резонатора с керровской нелинейностью

Р.К. Захаров, Е.К. Башкиров 

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева  
443086, Россия, г. Самара,  
Московское шоссе, 34

*Аннотация* – В настоящей работе исследована динамика двух идентичных сверхпроводящих кубитов, взаимодействующих с модой квантового электромагнитного поля микроволнового копланарного резонатора со средой Керра, при наличии эффективного диполь-дипольного взаимодействия кубитов. Нами найдено точное решение квантового уравнения Лиувилля для полной матрицы плотности рассматриваемой системы для фоковского и теплового хаотического начального состояния поля резонатора. Точное решение для полной матрицы плотности было использовано для определения редуцированной матрицы плотности кубитов и вычисления параметра перепутывания кубитов – согласованности. Компьютерное моделирование временной зависимости позволило установить, что при определенных начальных состояниях кубитов их перепутывание может быть существенно увеличено при наличии керровской среды в резонаторе и прямого диполь-дипольного взаимодействия.

*Ключевые слова* – сверхпроводящие кубиты; керровская нелинейность; диполь-дипольное взаимодействие; фоковское и тепловое поле; перепутывание; согласованность.

### Введение

Материал, показатель преломления которого зависит от интенсивности светового поля, называется средой Керра. Эффект Керра успешно используется в квантовой оптике для генерации квадратурных и амплитудно сжатых состояний электромагнитного поля, параметрического преобразования частот и создания сверхбыстрых импульсов. В связи с этим в последнее время большое количество теоретических и экспериментальных работ было посвящено изучению динамики систем естественных и искусственных атомов (сверхпроводящих джозефсоновских колец, примесных спинов, квантовых точек и др.), взаимодействующих с квантовыми электромагнитными полями резонаторов со средой Керра. Особенно большое внимание при этом было уделено особенностям генерации, управления и контроля атомных перепутанных состояний в таких системах в связи с потребностями квантовой информатики [1–7]. Это связано с тем, что на перепутанных состояниях базируются основные протоколы физики квантовых вычислений и квантовых коммуникаций [8; 9]. Однако в оптическом диапазоне керровские нелинейности  $\chi$  обычно малы по сравнению со скоростью потерь фотонов  $\kappa$  из резонатора. В таких условиях наблюдение влияния керровской нелинейности на динамику атомов и поля резонатора

весьма затруднено. Вместе с тем, как было показано недавно экспериментально, для сверхпроводящих кубитов в копланарных резонаторах удалось реализовать режим, в котором  $\chi\kappa \simeq 30$ , при этом параметр керровской нелинейности оказывается сравнимым с константой кубит-полевого взаимодействия  $\gamma$  [10]. В таких условиях керровская среда должна существенно влиять на динамику кубитов, в частности на степень их перепутывания, индуцированного полем резонатора.

Для приложений в квантовой информатике нужны максимально перепутанные состояния с достаточно большим временем жизни, однако в реальных условиях квантовые системы всегда взаимодействуют с окружением. Причем такое взаимодействие обычно приводит к деградации перепутанных состояний и ослаблению нелокальных квантовых корреляций кубитов. Вместе с тем недавно была высказана идея о том, что в некоторых случаях диссипация и шум могут, напротив, являться источником перепутывания [11]. В частности, была показана возможность генерации перепутывания атомных систем в резонаторах, индуцированных тепловым шумом [12].

Хорошо известно, что включение диполь-дипольного взаимодействия между кубитами в резонаторах приводит к существенному увеличению степени их перепутывания. Заметим также, что для искусственных атомов диполь-дипольное

взаимодействие может быть значительно больше, чем для обычных атомов и ионов. Например для сверхпроводящих джозефсоновских кубитов эффективная константа диполь-дипольного (индуктивного взаимодействия сверхпроводящих колец) может превосходить не только константу кубит-фотонного взаимодействия, но и величину энергетической щели между основным и первым возбужденным состоянием самого кубита [13].

В ряде недавних работ [14; 15] мы исследовали влияние керровской нелинейности на динамику перепутывания сверхпроводящих кубитов, индуцированного тепловым шумом, в рамках двухкубитовой модели Тависа – Каммингса со средой Керра. Представляет интерес обобщить результаты указанных работ на случай двухкубитной модели с прямым диполь-диполь взаимодействием кубитов. Поэтому в настоящей работе мы исследуем одно-временное влияние керровской нелинейности и прямого диполь-дипольного взаимодействия на динамику перепутывания двух идентичных сверхпроводящих кубитов, резонансно взаимодействующих с модой квантового микроволнового поля 1D резонатора.

## 1. Модель и решение уравнения эволюции

Рассмотрим два идентичных сверхпроводящих кубита с джозефсоновскими переходами, резонансно взаимодействующих с модой квантового электромагнитного поля в идеальном микроволновом резонаторе со средой Керра. Будем считать, что между кубитами имеет место прямое диполь-дипольное взаимодействие. Гамильтониан взаимодействия такой модели быть записан как

$$H = \sum_{i=1}^2 \hbar \gamma (\sigma_i^+ a + a^+ \sigma_i^-) + \hbar X a^{+2} a^2 + \hbar J (\sigma_1^+ \sigma_2^- + \sigma_2^+ \sigma_1^-), \quad (1)$$

где  $\sigma_i^+ = |+\rangle_i \langle -|$ ,  $\sigma_i^- = |-\rangle_i \langle +|$  – понижающий и повышающий операторы для возбужденного  $|+\rangle_i$  и основного  $|-\rangle_i$  состояний  $i$ -го кубита ( $i = 1, 2$ );  $a^+$  и  $a$  – операторы рождения и уничтожения фотонов резонаторной моды;  $\gamma$  – эффективная константа атом-полевого взаимодействия;  $X$  – константа керровской нелинейности и  $J$  – параметр прямого диполь-дипольного взаимодействия.

Выберем начальное сепарабельное состояние кубитов в виде

$$|\Psi(0)\rangle_A = |+,+\rangle \quad (2)$$

или

$$|\Psi(0)\rangle_A = |+,-\rangle. \quad (3)$$

Предположим также, что в начальный момент времени поле резонатора приготовлено в фоковском состоянии с волновой функцией

$$|\Psi(0)\rangle_F = |n\rangle \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

или в тепловом состоянии с матрицей плотности

$$\rho_F(0) = \sum_n p_n |n\rangle \langle n|,$$

где весовые коэффициенты есть

$$p_n = \frac{\bar{n}^n}{(1+\bar{n})^{n+1}},$$

где  $\bar{n}$  – среднее число тепловых фотонов в моде, равное

$$\bar{n} = (\exp[\hbar\omega/k_B T] - 1)^{-1},$$

$k_B$  – постоянная Больцмана и  $T$  – равновесная температура резонатора.

Поставим перед собой задачу найти точную динамику подсистемы кубитов при наличии их взаимодействия с тепловым полем резонатора. Для решения поставленной задачи будем идти по следующей схеме. В случае фоковского начального состояния поля состояние полной системы мы можем в любой момент времени задать с помощью волновой функции  $|\Psi(t)\rangle_n$ , удовлетворяющей временному уравнению Шредингера вида

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi(t)\rangle_n}{\partial t} = H |\Psi(t)\rangle_n$$

с начальным условием

$$|\Psi(0)\rangle_n = |\Psi(0)\rangle_A |n\rangle \quad (4)$$

и стандартными для квантовой механики граничными условиями.

Для нахождения явного вида вектора состояния  $|\Psi(t)\rangle_n$  удобно использовать так называемые «одетые» состояния, т. е. собственные функции гамильтониана (1). Собственные функции гамильтониана (1) в базисе  $|-, -, n+2\rangle$ ,  $|+, -, n+1\rangle$ ,  $|-, +, n+1\rangle$ ,  $|+, +, n\rangle$  имеют вид

$$|\Psi_{in}\rangle = w_{in} (X_{i1n} |-, -, n+2\rangle + X_{i2n} |+, -, n+1\rangle + X_{i3n} |-, +, n+1\rangle + X_{i4n} |+, +, n\rangle), \quad (5)$$

где

$$w_{in} = 1 / \sqrt{|X_{i1n}|^2 + |X_{i2n}|^2 + |X_{i3n}|^2 + |X_{i4n}|^2}$$

и

$$X_{i1n} = - \frac{(2n\chi - n^2\chi - n^3\chi + 2E_{in} + nE_{in})}{\sqrt{1+n}\sqrt{2+n}(2\chi + 3n\chi + n^2\chi - E_{in})},$$

$$X_{i2n} = -[A_{in}((-1+n)n\chi - E_{in}) + (1+n)B_{in}] /$$

$$/ [-\sqrt{1+n}A_{in} + \sqrt{1+n}C_{in}B_{in} -$$

$$- (-n\chi + n^2\chi - E_{in}) / \sqrt{1+n}],$$

$$X_{i3n} = \frac{A_{in}((-1+n)n\chi - E_{in}) + (1+n)B_{in}}{-\sqrt{1+n}A_{in} + \sqrt{1+n}C_{in}B_{in}},$$

$$X_{i4n} = 1 \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$X_{41n} = 0, \quad X_{42n} = -1,$$

$$X_{43n} = 1, \quad X_{44n} = 0.$$

Здесь

$$A_{in} = 2 + n - \alpha((1+n)(2+n)\chi - E_{in}),$$

$$B_{in} = (1+n)(2+n)\chi - E_{in},$$

$$C_{in} = (2+n - (n(1+n)\chi - E_{in}))$$

и

$$\alpha = J / \gamma, \quad \chi = X / \gamma.$$

Соответствующие собственные значения энергии есть

$$E_{1n} = \frac{\hbar\gamma}{3} (\alpha + 2\chi + 3n\chi + 3n^2\chi + P_n / F_n + F_n),$$

$$E_{2n} = \frac{\hbar\gamma}{12} (4(\alpha + (2 + 3n(1+n))\chi) -$$

$$- 2i(-i + \sqrt{3})P_n / F_n + G_n),$$

$$E_{3n} = \frac{\hbar\gamma}{12} (4(\alpha + (2 + 3n(1+n))\chi) -$$

$$+ 2i(i + \sqrt{3})P_n / F_n - G_n),$$

$$E_{4n} = \hbar\gamma(-\alpha + n\chi + n^2\chi);$$

$$P_n = 18 + 12n + \alpha^2 - 2\alpha\chi + 4(1 + 3n(1+n))\chi^2.$$

$$G_n = 2i(i + \sqrt{3})F_n, \quad F_n = (Q_n + S_n)^{1/3},$$

$$Q_n = 9(3 + 2n)\alpha + \alpha^3 + 36n\chi - 3\alpha^2\chi -$$

$$- 6(1 + 6n(1+n))\alpha\chi^2 + 4(2 + 9n(1+n))\chi^3,$$

$$S_n = \frac{1}{2} \sqrt{-4P_n^3 + 4Q_n^2}.$$

Предположим, что изучаемая система в начальный момент времени находится в состоянии  $|+, +, n\rangle$ . В этом случае волновая функция системы в момент времени  $t$  имеет вид

$$|\Psi(t)\rangle_n = C_{11,n} |-, -, n+2\rangle + C_{21,n} |+, -, n+1\rangle +$$

$$+ C_{31,n} |-, +, n+1\rangle + C_{41,n} |+, +, n\rangle, \quad (6)$$

где

$$C_{i1,n} = e^{-iE_{i,n}t/\hbar} w_{1,n} Y_{1i,n} X_{1i,n} +$$

$$+ e^{-iE_{2,n}t/\hbar} w_{2,n} Y_{1i,n} X_{2i,n-1} +$$

$$+ e^{-iE_{3,n}t/\hbar} w_{3,n} Y_{1i,n} X_{3i,n} +$$

$$+ e^{-iE_{4,n}t/\hbar} w_{4,n} Y_{1i,n} X_{4i,n-1}$$

$$(i = 1, 2, 3, 4),$$

и

$$Y_{ijn} = w_{jn} X_{jin}^*.$$

Если рассматриваемая система первоначально находится в состоянии  $|+, -, n\rangle$ , временная волновая функция может быть представлена в виде

$$|\Psi(t)\rangle_n = C_{12,n} |-, -, n+2\rangle + C_{22,n} |+, -, n+1\rangle +$$

$$+ C_{32,n} |-, +, n+1\rangle + C_{42,n} |+, +, n\rangle, \quad (7)$$

где

$$C_{i2,n} = e^{-iE_{1,n-1}t/\hbar} w_{1,n-1} Y_{2i,n-1} X_{1i,n-1} +$$

$$+ e^{-iE_{2,n-1}t/\hbar} w_{2,n-1} Y_{2i,n-1} X_{2i,n-1} +$$

$$+ e^{-iE_{3,n-1}t/\hbar} w_{3,n-1} Y_{2i,n-1} X_{3i,n-1} +$$

$$+ e^{-iE_{4,n-1}t/\hbar} w_{4,n-1} Y_{2i,n-1} X_{4i,n-1}$$

$$(i = 1, 2, 3, 4).$$

Используя выражения (4)–(7), мы можем найти матрицу плотности полной системы  $\rho(t)$ . Имея решение для временной матрицы плотности рассматриваемой системы в случае фоковского начального состояния поля резонатора вида (6) или (7), мы легко можем найти соответствующее решение для матрицы плотности в случае теплового состояния поля резонатора в виде

$$\rho(t) = \sum_n p_n |\Psi(t)\rangle_{nn} \langle\Psi(t)|.$$

Усредняя полную матрицу плотности по полевым переменным, мы можем найти редуцированную матрицу плотности кубитов  $\rho_A(t) = Tr_F \rho(t)$ , необходимую для вычисления параметра перепутывания кубитов.

## 2. Вычисление согласованности

Для двухкубитной системы, описываемой редуцированной матрицей плотности  $\rho_A(t)$ , в качестве меры перепутывания кубитов может быть выбран параметр Вуттерса или согласованность. В работе [16] Вуттерс предложил аналитический метод для вычисления количественной меры перепутывания двух кубитов. Основан он на применении так называемого spin-flip преобразования, или матрицы «перевернутых спинов», которая определяется следующим образом:

$$\tilde{\rho}_A = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho_A^* (\sigma_y \otimes \sigma_y),$$

где  $\rho_A^*$  – матрица, комплексно сопряженная исходной редуцированной двухкубитной матрице плотности  $\rho_A$ , и

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

– стандартная матрица Паули ( $y$ -составляющая).

После того как найдена матрица  $\tilde{\rho}_A$ , в подходе Вуутерса необходимо найти произведение матриц  $\rho_A \tilde{\rho}_A$ . Полученная в итоге матрица является неэрмитовой, но имеет вещественные и неотрицательные собственные значения. Тогда согласованность  $C$  может быть найдена из выражения

$$C = \max \{ \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}, 0 \},$$

где  $\lambda_i$  – собственные значения матрицы  $\rho_A \tilde{\rho}_A$ , расположенные в убывающем порядке.

Для начальных состояний кубитов вида (2) и (3) редуцированная атомная матрица плотности имеет вид

$$\rho_A(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{22}(t) & \rho_{23}(t) & 0 \\ 0 & \rho_{23}(t)^* & \rho_{33}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{44}(t) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Элементы матрицы плотности (8) для начального состояния кубитов (3), т. е.  $|+, +\rangle$  и фоковского состояния поля резонатора  $|n\rangle$ , есть

$$\rho_{11} = |C_{41,n}(t)|^2, \quad \rho_{22} = |C_{21,n}(t)|^2, \quad (9)$$

$$\rho_{33} = |C_{31,n}(t)|^2, \quad \rho_{44} = |C_{11,n}(t)|^2,$$

$$\rho_{23} = C_{21,n}(t)C_{31,n}(t)^*.$$

Для начального состояния (2), т. е.  $|+, -\rangle$ , соответствующие матричные элементы есть

$$\rho_{11} = |C_{42,n-1}(t)|^2, \quad \rho_{22} = |C_{22,n-1}(t)|^2, \quad (10)$$

$$\rho_{33} = |C_{32,n-1}(t)|^2, \quad \rho_{44} = |C_{12,n-1}(t)|^2,$$

$$\rho_{23} = C_{22,n-1}(t)C_{32,n-1}(t)^*.$$

Выражения (9), (10) легко могут быть обобщены на случай теплового состояния поля резонатора. После несложных вычислений получаем для состояния кубитов вида (2):

$$\rho_{11} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n |C_{41,n}(t)|^2,$$

$$\rho_{22} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n |C_{21,n}(t)|^2,$$

$$\rho_{33} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n |C_{31,n-1}(t)|^2,$$

$$\rho_{44} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n |C_{11,n-1}(t)|^2,$$

$$\rho_{23} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n C_{21,n-1}(t)C_{31,n-1}(t)^*.$$

Соответственно, для начального состояния кубитов (3) имеем:

$$\rho_{11} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n |C_{42,n}(t)|^2,$$

$$\rho_{22} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n |C_{22,n}(t)|^2,$$

$$\rho_{33} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n |C_{32,n-1}(t)|^2,$$

$$\rho_{44} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n |C_{12,n-1}(t)|^2,$$

$$\rho_{23} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n C_{22,n-1}(t)C_{32,n-1}(t)^*.$$

В результате несложных вычислений формула для согласованности кубитов в случае их начальных состояний вида (2) и (3) может быть записана как для фоковских, так и тепловых состояний поля резонатора в виде

$$C(t) = 2 \max \{ 0, |\rho_{23}| - \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}} \}. \quad (11)$$

Результаты численного моделирования временной зависимости согласованности (11) для фоковских и тепловых состояний поля резонатора представлены на рис. 1–7.

### 3. Результаты и обсуждение

На рис. 1 и 2 показаны результаты расчетов временной зависимости параметра перепутывания кубитов для фоковского начального состояния резонатора. Согласованность для сепарабельного начального состояния атома  $|+, -\rangle$  и фоковского состояния поля резонатора с  $n = 1$  как функция безразмерного времени  $\gamma t$  представлена на рис. 1 для различных значений параметра керровской нелинейности  $\chi = 0$  (сплошная линия) и  $\chi = 0,3$  (штриховая линия). Параметр диполь-дипольного взаимодействия выбран равным  $\alpha = 0$  на рис. 1, а и  $\alpha = 0,1$  на рис. 1, б. Из рис. 1 видно, что для дипольно не связанных кубитов с увеличением коэффициента нелинейности Керра максимальное



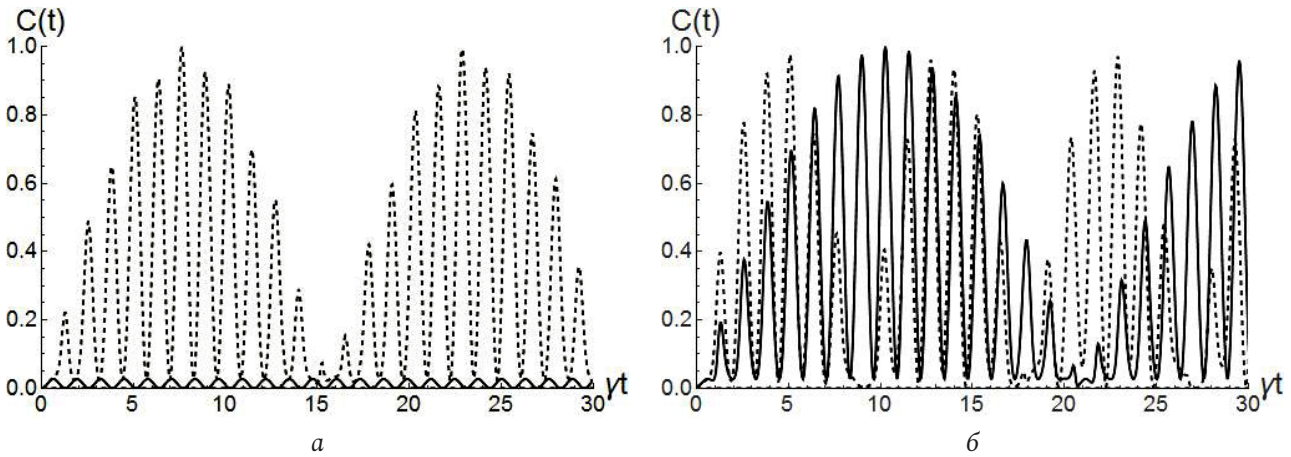


Рис. 1. Согласованность как функция безразмерного времени  $\gamma t$  для начального состояния кубитов  $|+, -\rangle$  и фоковского состояния поля резонатора с  $n = 1$ . Параметр керровской нелинейности  $\chi = 0$  (сплошная линия) и  $\chi = 0,3$  (штриховая линия). Параметр диполь-дипольного взаимодействия  $\alpha = 0$  (a) и  $\alpha = 0,1$  (б)

Fig. 1. Consistency as a function of dimensionless time  $\gamma t$  for the initial state of qubits  $|+, -\rangle$  and the Fock state of the resonator field with  $n = 1$ . Kerr nonlinearity parameter  $\chi = 0$  (solid line) and,  $\chi = 0,3$  (dashed line). Parameter of dipole-dipole interaction  $\alpha = 0$  and  $\alpha = 0,1$  (b)

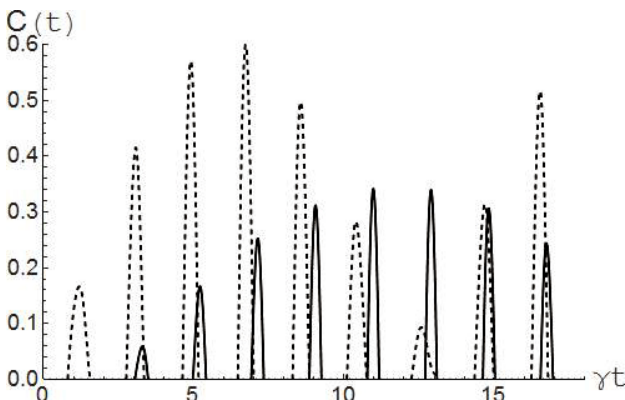


Рис. 2. Согласованность как функция безразмерного времени  $\gamma t$  для начального состояния кубитов  $|+, +\rangle$  и фоковского состояния поля резонатора с  $n = 1$ . Параметр керровской нелинейности  $\chi = 0,3$  (сплошная линия) и  $\chi = 0,5$  (штриховая линия). Параметр диполь-дипольного взаимодействия  $\alpha = 0$

Fig. 2. Consistency as a function of dimensionless time  $\gamma t$  for the initial state of the qubits  $|+, +\rangle$  and the Fock state of the resonator field with  $n = 1$ . Kerr nonlinearity parameter  $\chi = 0,3$  (solid line) and  $\chi = 0,5$  (dashed line). Parameter of dipole-dipole interaction  $\alpha = 0$

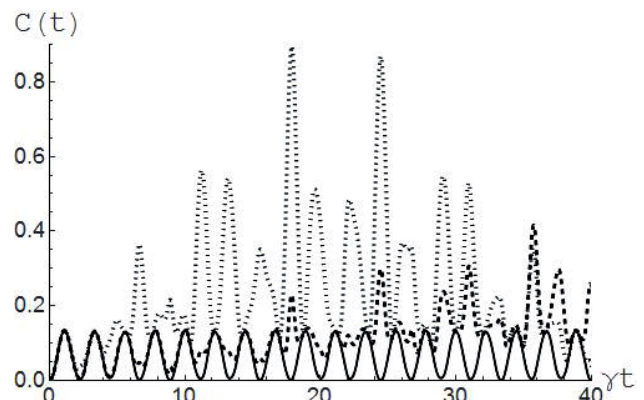


Рис. 3. Согласованность как функция безразмерного времени  $\gamma t$  для начального состояния кубитов  $|+, -\rangle$  и теплового состояния резонатора с  $\bar{n} = 0,5$  и в отсутствие керровской нелинейности. Параметр диполь-дипольного взаимодействия  $\alpha = 0$  (сплошная линия) и  $\alpha = 0,01$  (штриховая линия) и  $\alpha = 0,05$  (сплошная линия)

Fig. 3. Consistency as a function of dimensionless time  $\gamma t$  for the initial state of the qubits  $|+, -\rangle$  and the thermal state of the resonator with  $\bar{n} = 0,5$ , and in the absence of Kerr nonlinearity. Parameter of the dipole-dipole interaction  $\alpha = 0$  (solid line),  $\alpha = 0,01$  (dashed line) and  $\alpha = 0,05$  (solid line)

значение отрицательности существенно увеличивается, в то время как для модели дипольно связанных кубитов максимальная степень перепутывания кубитов практически не зависит от параметра керровской нелинейности. Согласованность для сепарабельного начального состояния атома  $|+, +\rangle$  и фоковского состояния поля резонатора с  $n = 1$  как функция безразмерного времени  $\gamma t$  представлена на рис. 2 для различных значений параметра керровской нелинейности  $\chi = 0,3$  (сплошная линия),  $\chi = 0,5$  (штриховая линия). Параметр диполь-дипольного взаимодействия  $\alpha = 0$ . Из рис. 2 легко видеть, что с увеличением

коэффициента нелинейности Керра максимальная степень перепутывания кубитов также возрастает. Заметим, что в отсутствие нелинейности Керра перепутывание кубитов не возникает в процессе эволюции. Следовательно, среда Керра может использоваться для эффективного управления степенью перепутывания кубитов.

Временные зависимости параметра перепутывания кубитов для теплового состояния поля резонатора представлены на рис. 3–6. Согласованность для начального состояния кубитов  $|+, -\rangle$  показана на рис. 3 как функция безразмерного времени  $\gamma t$  для модели без керровской нелинейности и раз-

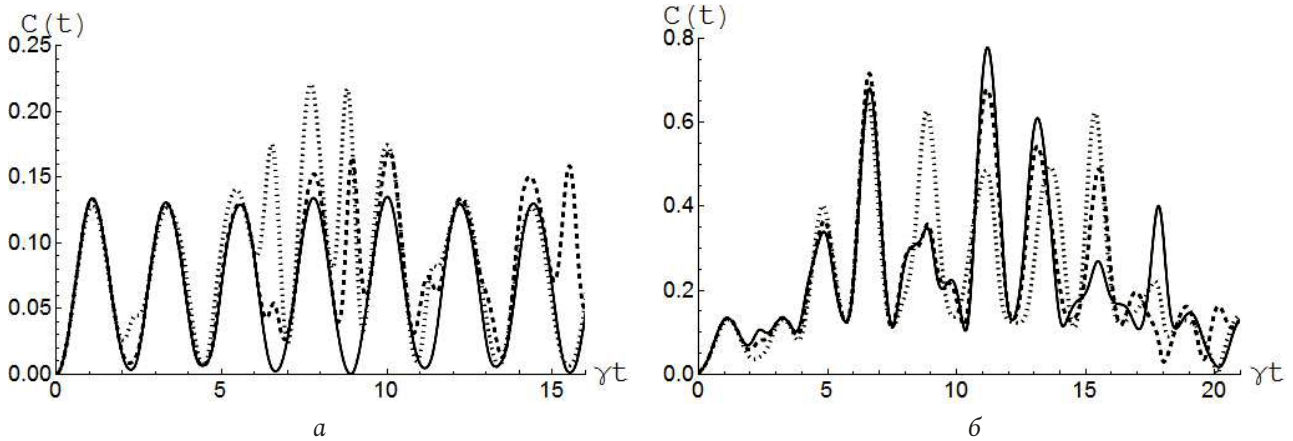


Рис. 4. Согласованность как функция безразмерного времени  $\gamma t$  для начального состояния кубитов  $|+,-\rangle$  и теплового состояния резонатора с  $\bar{n}=0,5$  в отсутствие (рис. 4, а) и при наличии (рис. 4, б) диполь-дипольного взаимодействия кубитов с  $\alpha=0,1$ . Параметр керровской нелинейности  $\chi=0$  (сплошная линия) и  $\chi=0,1$  (штриховая линия) и  $\chi=0,3$  (точечная линия)

Fig. 4. Consistency as a function of dimensionless time  $\gamma t$  for the initial state of the qubits  $|+,-\rangle$  and the thermal state of the resonator with  $\bar{n}=0,5$  in the absence (Fig. 4, a) and in the presence (Fig. 4, b) of dipole-dipole interaction of qubits with  $\alpha=0,1$ . Kerr nonlinearity parameter  $\chi=0$  (solid line) and  $\chi=0,1$  (dashed line) and  $\chi=0,3$  (dotted line)

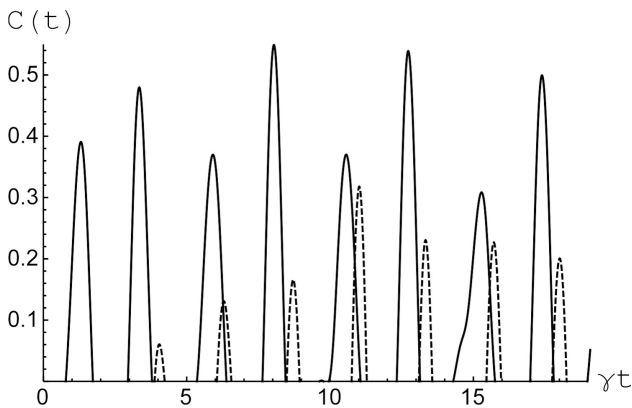


Рис. 5. Согласованность как функция безразмерного времени  $\gamma t$  для начального состояния кубитов  $|+,+\rangle$  и теплового состояния резонатора с  $\bar{n}=0,1$  в отсутствие диполь-дипольного взаимодействия кубитов ( $\alpha=0$ ). Параметр керровской нелинейности  $\chi=1$  (штриховая линия) и  $\chi=2$  (сплошная линия)

Fig. 5. Consistency as a function of dimensionless time  $\gamma t$  for the initial state of the qubits  $|+,+\rangle$  and the thermal state of the resonator with  $\bar{n}=0,1$  in the absence of dipole-dipole interaction of the qubits ( $\alpha=0$ ). Kerr nonlinearity parameter  $\chi=1$  (dashed line) and  $\chi=2$  (solid line)

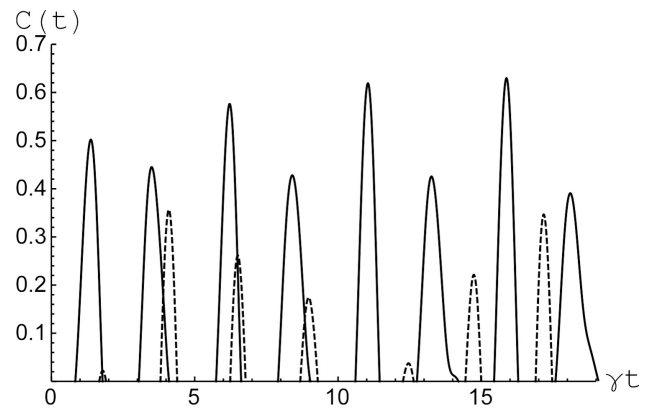


Рис. 6. Согласованность как функция безразмерного времени  $\gamma t$  для начального состояния кубитов  $|+,+\rangle$  и теплового состояния резонатора с  $\bar{n}=0,1$  при наличии диполь-дипольного взаимодействия кубитов ( $\alpha=0,5$ ). Параметр керровской нелинейности  $\chi=1$  (штриховая линия) и  $\chi=2$  (сплошная линия)

Fig. 6. Consistency as a function of dimensionless time  $\gamma t$  for the initial state of the qubits  $|+,+\rangle$  and the thermal state of the resonator with  $\bar{n}=0,1$  in the presence of dipole-dipole interaction of the qubits ( $\alpha=0,5$ ). Kerr nonlinearity parameter  $\chi=1$  (dashed line) and  $\chi=2$  (solid line)

личных значений безразмерного параметра диполь-дипольного взаимодействия. Среднее число тепловых фотонов в резонаторе принято равным  $\bar{n}=0,5$ . Из рис. 3 видно, что для модели без керровской нелинейности диполь-дипольное взаимодействие значительно увеличивает максимальную степень перепутывания кубитов. На рис. 4 показано временное поведение согласованности для того же начального состояния кубитов в случае модели с дипольно несвязанными кубитами (рис. 4, а) и дипольно связанными кубитами (рис. 4, б) и различными значениями безразмерного параметра керровской нелинейности. Из рис. 4, а видно, что для кубитов без диполь-дипольного взаимодействия

керровская нелинейность увеличивает максимальную степень перепутывания кубитов. Однако для дипольно связанных кубитов (рис. 4, б) среда Керра, наоборот, немного ослабляет максимальную степень их перепутывания. Согласованность для начального состояния кубитов  $|+,+\rangle$  показана на рис. 5 как функция безразмерного времени  $\gamma t$  для модели без диполь-дипольного взаимодействия и различных значений параметра керровской нелинейности. Среднее число тепловых фотонов  $\bar{n}=0,5$ . Отметим, что для выбранного начального состояния и модели без керровской нелинейности тепловое поле, как и фоковское поле, не индуцирует перепутывания. Для дипольно

не связанных кубитов степень запутанности заметно возрастает с увеличением параметра керровской нелинейности. Согласованность для начального состояния кубитов  $|+, +\rangle$  показана на рис. 6 как функция безразмерного времени  $\gamma t$  для модели дипольно связанных кубитов и различных значений параметра керровской нелинейности. Среднее число тепловых фотонов  $\bar{n} = 0,5$ . Зависимость согласованности от керровской нелинейности на рис. 6 аналогична той, что имеет место на рис. 5.

### Заключение

В настоящей работе нами найдено в представлении «одетых» состояний точное решение уравнения эволюции системы двух дипольно связанных сверхпроводящих кубитов, взаимодействующих с модой квантового электромагнитного поля идеального резонатора со средой Керра. На основе точного решения уравнения эволюции удалось вычислить в аналитическом виде параметр пере-

путывания кубитов (согласованность) для различных начальных сепарабельных состояний кубитов и фоковского и теплового состояния поля резонатора. Проведено численное моделирование параметра перепутывания кубитов (согласованности). Результаты компьютерного моделирования согласованности показали, что для начального состояния кубитов вида  $|+, -\rangle$  керровская нелинейность и диполь-дипольное взаимодействие кубитов по отдельности приводят к возрастанию степени их перепутывания, в то время как при их одновременном включении обеих нелинейностей возможно уменьшение максимальной степени перепутывания кубитов. Показано также, что перепутывание кубитов, индуцированное фоковским и тепловым полем резонатора, для начального состояния вида  $|+, +\rangle$  возникает только при наличии керровской нелинейности. Полученные результаты могут быть полезны при выборе оптимальных режимов функционирования квантовых устройств, таких как квантовые компьютеры и квантовые сети.

### Список литературы

1. Bužek V., Jex I. Dynamics of a two-level atom in a Kerr-like medium // *Opt. Commun.* 1990. Vol. 78, no. 5–6. P. 425–435. DOI: [https://doi.org/10.1016/0030-4018\(90\)90340-Y](https://doi.org/10.1016/0030-4018(90)90340-Y)
2. Xie Q., Fang M.F. Entanglement dynamics of atoms in double Jaynes–Cummings models with Kerr medium // *Commun. Theor. Phys.* 2010. Vol. 54, no. 5. P. 840–844. DOI: <https://doi.org/10.1088/0253-6102/54/5/12>
3. Circuit QED with a nonlinear resonator: ac-Stark shift and dephasing / F.R. Ong [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* 2011. Vol. 106, no. 16. P. 167002-1–4. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.167002>
4. Puri S., Boutin S., Blais A. Engineering the quantum states of light in a Kerr-nonlinear resonator by two-photon driving // *Quantum Information*. 2017. Vol. 3, no. 1. P. 18-1–7. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41534-017-0019-1>
5. Effects of Kerr medium and Stark shift parameter on Wehrl entropy and the field purity for two-photon Jaynes–Cummings model under dispersive approximation / A.F. Al Naim [et al.] // *J. Rus. Las. Res.* 2019. Vol. 40, no. 1. P. 20–29. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10946-019-09764-w>
6. Anwar S.J., Ramzan M., Khan M.K. Effect of Stark- and Kerr-like medium on the entanglement dynamics of two three-level atomic systems // *Quant. Inform. Process.* 2019. Vol. 18, no. 6. P. 192-1–12. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11128-019-2277-7>
7. Alqannas H.S., Khalil E.M. Information entropy and squeezing for a two two-level atom interacting with a nonlinear system // *Optical and Quantum Electronic*. 2021. Vol. 53, no. 1. P. 34-1–10. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11082-020-02721-x>
8. Georgescu I.M., Ashhab S., Nori F. Quantum simulation // *Rev. Mod. Phys.* 2014. Vol. 86, no. 1. P. 153–186. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.153>
9. Buluta I., Ashhab S., Nori F. Neutral and artificial atoms for quantum computation // *Rep. Prog. Phys.* 2011. Vol. 74, no. 10. P. 104401-1–16. DOI: <https://doi.org/10.1088/0034-4885/74/10/104401>
10. Observation of quantum state collapse and revival due to the single-photon Kerr effect / G. Kirchmair [et al.] // *Nature*. 2013. Vol. 495, no. 7440. P. 205–209. DOI: <https://doi.org/10.1038/nature11902>
11. Cavity-loss-induced generation of entangled atoms / M.B. Plenio [et al.] // *Phys. Rev. A*. 1999. Vol. 59, no. 3. P. 2468–2475. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.59.2468>
12. Entanglement induced by a single-mode heat environment / M.B. Plenio [et al.] // *Phys. Rev. A*. 2002. Vol. 65, no. 4. P. 040101-1–4. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.65.040101>
13. Evidence for entangled states of two coupled flux qubits / A. Izmailkov [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* 2004. Vol. 93, no. 3. P. 037003-1–4. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.037003>
14. Evseev M.M., Bashkurov E.K. Thermal entanglement in Tavis–Cummings model with Kerr nonlinearity // 2020 International Conference on Information Technology and Nanotechnology (ITNT). 2020. P. 9253347-1–5. DOI: <https://doi.org/10.1109/ITNT49337.2020.9253347>
15. Bashkurov E.K. Entanglement in Tavis–Cummings model with Kerr nonlinearity induced by a thermal noise // *Proc. SPIE*. 2021. Vol. 11846. P. 210–219. DOI: <https://doi.org/10.1117/12.2588673>

16. Wootters W.K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 80, no. 10. P. 2245–2248. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.2245>

## References

1. Bužek V., Jex I. Dynamics of a two-level atom in a Kerr-like medium. *Opt. Commun.*, 1990, vol. 78, no. 5, pp. 425–435. DOI: [https://doi.org/10.1016/0030-4018\(90\)90340-Y](https://doi.org/10.1016/0030-4018(90)90340-Y)
2. Xie Q., Fang M.F. Entanglement dynamics of atoms in double Jaynes–Cummings models with Kerr medium. *Commun. Theor. Phys.*, 2010, vol. 54, no. 5, pp. 840–844. DOI: <https://doi.org/10.1088/0253-6102/54/5/12>
3. Ong F.R. et al. Circuit QED with a nonlinear resonator: ac-Stark shift and dephasing. *Phys. Rev. Lett.*, 2011, vol. 106, no. 16, pp. 167002–1–4. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.167002>
4. Puri S., Boutin S., Blais A. Engineering the quantum states of light in a Kerr-nonlinear resonator by two-photon driving. *Quantum Information*, 2017, vol. 3, no. 1, pp. 18–1–7. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41534-017-0019-1>
5. Al Naim A.F. et al. Effects of Kerr medium and Stark shift parameter on Wehrl entropy and the field purity for two-photon Jaynes–Cummings model under dispersive approximation. *J. Rus. Las. Res.*, 2019, vol. 40, no. 1, pp. 20–29. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10946-019-09764-w>
6. Anwar S.J., Ramzan M., Khan M.K. Effect of Stark- and Kerr-like medium on the entanglement dynamics of two three-level atomic systems. *Quant. Inform. Process*, 2019, vol. 18, no. 6, pp. 192–1–12. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11128-019-2277-7>
7. Alqannas H.S., Khalil E.M. Information entropy and squeezing for a two two-level atom interacting with a nonlinear system. *Optical and Quantum Electronic*, 2021, vol. 53, no. 1, pp. 34–1–10. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11082-020-02721-x>
8. Georgescu I.M., Ashhab S., Nori F. Quantum simulation. *Rev. Mod. Phys.*, 2014, vol. 86, no. 1, pp. 153–186. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.153>
9. Buluta I., Ashab S., Nori F. Neutral and artificial atoms for quantum computation. *Rep. Prog. Phys.*, 2011, vol. 74, no. 10, pp. 104401–1–16. DOI: <https://doi.org/10.1088/0034-4885/74/10/104401>
10. Kirchmair G. et al. Observation of quantum state collapse and revival due to the single-photon Kerr effect. *Nature*, 2013, vol. 495, no. 7440, pp. 205–209. DOI: <https://doi.org/10.1038/nature11902>
11. Plenio M.B. et al. Cavity-loss-induced generation of entangled atoms. *Phys. Rev. A*, 1999, vol. 59, no. 3, pp. 2468–2475. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.59.2468>
12. Plenio M.B. et al. Entanglement induced by a single-mode heat environment. *Phys. Rev. A*, 2002, vol. 65, no. 4, pp. 040101–1–4. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.65.040101>
13. Izmalkov A. et al. Evidence for entangled states of two coupled flux qubits. *Phys. Rev. Lett.*, 2004, vol. 93, no. 3, pp. 037003–1–4. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.037003>
14. Evseev M.M., Bashkirov E.K. Thermal entanglement in Tavis–Cummings model with Kerr nonlinearity. *2020 International Conference on Information Technology and Nanotechnology (ITNT)*, 2020, pp. 9253347–1–5. DOI: <https://doi.org/10.1109/ITNT49337.2020.9253347>
15. Bashkirov E.K. Entanglement in Tavis–Cummings model with Kerr nonlinearity induced by a thermal noise. *Proc. SPIE*, 2021, vol. 11846, pp. 210–219. DOI: <https://doi.org/10.1117/12.2588673>
16. Wootters W.K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Phys. Rev. Lett.*, 1998, vol. 80, no. 10, pp. 2245–2248. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.2245>

---

## Physics of Wave Processes and Radio Systems


2021, vol. 24, no. 3, pp. 9–17

DOI 10.18469/1810-3189.2021.24.3.9-17

Received 7 June 2021

Accepted 8 July 2021

## Entanglement of two dipole-couples qubits induced by a thermal field of a cavity with Kerr medium

Rodion K. Zakharov, Evgeny K. Bashkirov 

Samara National Research University  
34, Moskovskoye shosse,  
Samara, 443086, Russia

*Abstract* – In the present work, we investigated the dynamics of two identical superconducting qubits interacting with the mode of the quantum electromagnetic field of a microwave coplanar cavity with a Kerr medium in the presence of an effective dipole-dipole interaction of the qubits. We have found an exact solution of the quantum Liouville equation for the complete density matrix of the system under consideration for the Fock and thermal chaotic initial states of the cavity field. The exact solution for the full density matrix was used to determine the reduced qubit density matrix and to calculate the entanglement



parameter – concurrence. Computer simulation of the time dependence of the concurrence showed that for certain initial states of qubits, their entanglement can be significantly increased in the presence of a Kerr medium and direct dipole-dipole interaction.

*Keywords* – superconducting qubits; Kerr nonlinearity; dipole-dipole interaction; Fock and thermal field; entanglement; concurrence.

## Информация об авторах

**Захаров Родион Константинович**, аспирант 1-го года обучения кафедры общей и теоретической физики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева, г. Самара, Россия. В 2020 г. окончил магистратуру физического факультета Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева. Автор 3 научных работ.

*Область научных интересов:* квантовая оптика и квантовая радиофизика, квантовая информатика.

*E-mail:* ssau@ssau.ru

**Башкиров Евгений Константинович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей и теоретической физики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева, г. Самара, Россия. В 1978 г. окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета и в 1984 г. – аспирантуру при Московском государственном университете. Автор более 350 научных работ.

*Область научных интересов:* квантовая оптика и квантовая радиофизика, квантовая информатика, теория неравновесных явлений.

*E-mail:* bash@samsu.ru

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0003-2569-1322>

## Information about the Authors

**Rodion K. Zakharov**, 1st year postgraduate student of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, Samara, Russia. In 2020, he graduated from the magistracy of the Physics Department of the Samara National Research University. Author of 3 scientific papers.

*Research interests:* quantum optics and quantum radiophysics, quantum informatics.

*E-mail:* ssau@ssau.ru

**Evgeny K. Bashkirov**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, Samara, Russia. In 1978 he graduated from the Physics Department of Kuibyshev State University and in 1984 – postgraduate studies at Moscow State University. Author of over 350 scientific papers.

*Research interests:* quantum optics and quantum radiophysics, quantum informatics, theory of nonequilibrium phenomena.

*E-mail:* bash@samsu.ru

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0003-2569-1322>