Физика волновых процессов и радиотехнические системы

2020. T. 23, Nº 4. C. 36-47

DOI 10.18469/1810-3189.2020.23.4.36-47 УДК 519.642:537.86 Дата поступления 15 октября 2020 Дата принятия 11 ноября 2020

# Электродинамический анализ зеркальных антенн в приближении барицентрического метода

И.С. Полянский 💿, Д.Е. Степанов, Д.К. Кетух, В.А. Шевченко

Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации 302015, Россия, г. Орел, ул. Приборостроительная, 35

Аннотация – В статье рассмотрены особенности применения барицентрического метода в решении задач электродинамического анализа зеркальных антенн. Основу исследования составляет решение внутренней задачи электродинамики. Задача электродинамического анализа зеркальной антенны сформулирована в классическом представлении задачи дифракции электромагнитной волны на системе бесконечно тонких идеально проводящих экранах произвольной формы и сведена к системе интегро-дифференциальных уравнений. Решение последней выполнено численно в проекционной постановке метода Галеркина при определении аппроксимации искомой функции плотности поверхностного тока в системе глобальных для анализируемого экрана базисных функций, формируемых в приближении барицентрического метода. С учетом свойств введенных базисных функций задано интегральное представление электромагнитного поля зеркальной антенны. Уточнены особенности алгоритмической реализации разработанных решений. Работоспособность и сравнительная предпочтительность применения барицентрического метода в задачах электродинамического анализа зеркальных антенн проверена на тестовых примерах.

*Ключевые слова* – барицентрический метод, зеркальная антенна, дифракция электромагнитной волны, система бесконечно тонких идеально проводящих экранов, глобальные базисные функции.

## Введение

Разработке методов, способов и алгоритмов анализа электромагнитных характеристик зеркальных антенн (ЗА) посвящено большое количество работ [1-6]. Основу электродинамического анализа ЗА составляет решение внутренней задачи электродинамики, которое выполняется в приближении Кирхгофа [1; 2; 6] или при непосредственном исследовании интегральных/интегро-дифференциальных уравнений [3-5]. На приближении Кирхгофа основываются асимптотические методы, достоинство которых состоит в невысоких вычислительных и емкостных затратах формируемого алгоритма. Их существенный недостаток - низкая универсальность при анализе многоэлементных ЗА с отражающими и облучающими устройствами сложной геометрической формы при относительно невысокой точности [17]. Этот недостаток с учетом стремительного развития средств вычислительной техники и технологий параллельных вычислений устраняется при численном решении интегро-дифференциальных уравнений электродинамической теории ЗА [4]. Основу численного решения составляет проекционная постановка метода Галеркина и его модификаций (метод моментов [7]). При этом вычислительная эффективность формируемой численной схемы существенным образом определяется рациональностью выбора системы базисных функций, относительно которой задается разложение искомой функции плотности тока. Для решения указанной задачи в работе [8] при анализе ЗА предлагается использовать барицентрический метод (БМ) [9; 10]. Недостатки [8] состоят в том, что постановка задачи дифракции и интегральное представление электромагнитного поля (ЭМП) отличаются от классически принятых [11] для ЗА [4]; базисные функции вычислительно избыточно формируются через дифференциальные формы Уитни (краевые векторные функции Неделека). Также в работе [8] в явном виде не приводятся результаты сравнений по эффективности решения тестовых задач с широко используемым в современных САПР электродинамического анализа антенн и СВЧ-устройств методом формирования базисных функций - RWG [12]. Цель настоящей статья во взаимосвязи с результатами [10; 13] состоит в устранении указанных недостатков.

## 1. Постановка задачи дифракции

Задачу электродинамического анализа ЗА сформулируем в классическом представлении задачи дифракции электромагнитной волны на системе бесконечно тонких идеально проводящих экранов [4; 11].

Зеркальную антенну представим объединением  $S = \bigcup_{s=1}^{M'} S_s$  конечного числа M' связных ори-



Рис. 1. Геометрическое представление зеркальной антенны Fig. 1. Geometric representation of a reflector antenna

ентированных незамкнутых и непересекающихся  $\overline{S}_s \bigcap \overline{S}_{s'} = \emptyset$   $(s, s' \in \{\overline{1, M'}\}, s \neq s')$  поверхностей класса  $C^{\infty}$  в  $\mathbb{R}^3$ , которые определяются L < M'облучателями и М'-L рефлекторами (рис. 1). Край  $\partial S_s = \overline{S}_s \setminus S_s$  поверхности  $S_s$  представляется кусочно-гладкой кривой без точек самопересечения;  $\partial S = \bigcup \partial S_s$ . Раскрыв  $\Omega_s \quad \left(s = \overline{1, M'}\right)$  поверхности  $S_s$  зададим многоугольником с числом  $N_s$  вершин  $\mathbf{P}_1^s, ..., \mathbf{P}_{N_s}^s$  относительно соответствующей системы координат  $\mathbf{x'}^s = \left\{ x_1'^s, x_2'^s, x_3'^s \right\}$ . Внешние источники ЭМП устанавливаются в раскрывах  $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_L$  облучателей исходно заданным распределением напряженностей электрических полей  $\mathbf{E}^{0} = \left\{ \mathbf{E}_{1}^{0}, \mathbf{E}_{2}^{0}, ..., \mathbf{E}_{L}^{0} \right\}$  соответственно. Кривизна S характеризуется орт-вектором нормали í. Предполагается, что поле облучателей Е<sup>0</sup> является монохроматическим, а S располагается в среде с постоянными электромагнитными параметрами (ε,μ,σ).

Следуя [11] и учитывая содержательное описание, сведем обобщенную постановку задачи дифракции  $\mathbf{E}^0$  на *S* к определению рассеянного ЭМП:

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \in C^2 \left( \mathbb{R}^3 \setminus \overline{S} \right) \bigcap_{\delta > 0} C \left( \overline{\mathscr{M}_+} \setminus \partial S_{\delta} \right) \bigcap_{\delta > 0} C \left( \overline{\mathscr{M}_-} \setminus \partial S_{\delta} \right), \qquad (1)$$

удовлетворяющего [11]:

$$\nabla \times \mathbf{H} = -i\beta \mathbf{E}; \quad \nabla \times \mathbf{E} = i\beta \mathbf{H}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3} \setminus S;$$
  

$$\mathbf{E}_{\tau} \Big|_{S} = \mathbf{E}_{\tau}^{0} \Big|_{S}, \quad \mathbf{E}_{\tau}^{0} \Big|_{S} \in C^{\infty} \left(\overline{S}\right); \quad \mathbf{E}, \mathbf{H} \in L^{2}_{loc} \left(\mathbb{R}^{3}\right);$$
  

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} = o\left(r^{-1}\right), \quad r := |\mathbf{x}| \to \infty \text{ при Im } \beta > 0; \quad (2)$$
  

$$\mathbf{H} \times \mathbf{e}_{r} - \mathbf{E} = o\left(r^{-1}\right), \quad \mathbf{E} \times \mathbf{e}_{r} + \mathbf{H} = o\left(r^{-1}\right),$$
  

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} = O\left(r^{-1}\right), \quad r \to \infty \text{ при Im } \beta = 0,$$

где  $\mathscr{M}_+$  и  $\mathscr{M}_-$  внешность и внутренность замкнутой связной ориентированной поверхности  $\mathscr{M} \in \mathbb{R}^3$  класса  $C^{\infty}$  с конечным числом компонент связности при  $\overline{S} \subset \mathscr{M}$ ;  $\mathbf{e}_r = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ ;  $\beta^2 =$  $= \omega^2 \mu \Big[ \varepsilon + i \sigma \omega^{-1} \Big]$ ,  $\mathrm{Im} \beta \ge 0$ ,  $\beta \ne 0$ ;  $\omega$  – угловая частота;  $S_{\delta} := \big\{ \mathbf{x} : \big| \mathbf{x} - \mathbf{y} \big| < \delta, \mathbf{y} \in S \big\}$ ;  $\delta > 0$ ; индекс  $\tau$ обозначает тангенциальную составляющую поля на S.

Доказательство существования и единственности решения задачи (1), (2) известно из [11], которое определяется в виде векторного потенциала:

$$\mathcal{L}\mathbf{u} = \mathbf{f},\tag{3}$$

$$\mathcal{L}\mathbf{u} = \nabla \mathcal{A} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \beta^2 \mathcal{A}\mathbf{u}; \quad \mathbf{f} = i\beta \mathbf{E}_{\tau}^0 \Big|_{\mathcal{S}};$$
  
$$\mathcal{A}\mathbf{u} (\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{S}} \Psi (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{u} (\mathbf{y}) d\mathbf{y},$$
  
$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\} \in \mathcal{S}; \quad \mathbf{u} (\mathbf{y}) \cdot \mathbf{v} (\mathbf{y}) = 0$$

при  $y \in S$ ; **и** имеет смысл плотности тока на *S*;

$$\Psi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\beta|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$$

- функция Грина.

Барицентрический метод предполагает численное решение (3) при задании аппроксимаций  $\tilde{\mathbf{u}}^{s}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\mathcal{M}_{s}} c_{j}^{s} \boldsymbol{\psi}_{j}^{s}(\mathbf{x}) \quad (c_{j} - \kappa o \ni \phi \phi u циенты разложе$  $ния) искомой плотности тока <math>\mathbf{u}^{s}$  на  $S_{s} \quad (s = \overline{1, M'})$ в системе базисных функций  $\boldsymbol{\psi}_{j}^{s}(\mathbf{x}) \in C(S_{s})$ , которые являются глобальными относительно  $S_{s}$  и формируются из  $\boldsymbol{\psi}_{\overline{j}^{s}}^{h^{s}}(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\psi}_{j^{s}}^{e^{s}}(\mathbf{x}) \quad (\overline{j}^{s} \in \overline{\mathbb{M}}_{p_{s}}^{s}, j^{s} \in \mathbb{M}_{p_{s}}^{s})$  [13]:  $\boldsymbol{\psi}_{\overline{j}^{s}}^{h^{s}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{v}^{s}(\mathbf{x}) \times \sum_{\overline{j'^{s}} \in \overline{\mathbb{M}}_{p_{s}}^{s}} a_{\overline{j'}^{s}\overline{j'}^{s}}^{h^{s}} \tilde{\boldsymbol{\psi}}_{\overline{j'}^{s}}^{e^{s}}(\mathbf{x}),$  (4)  $\boldsymbol{\psi}_{j^{s}}^{e^{s}}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^{s}(\mathbf{x}) \times \sum_{j'^{s} \in \mathbb{M}_{p_{s}}^{s}} a_{\overline{j'}^{s}\overline{j'}^{s}}^{e^{s}} \tilde{\boldsymbol{\psi}}_{j'^{s}}^{e^{s}}(\mathbf{x}),$ 

где

$$\begin{split} \tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{j^{rs}}^{h^{s}}\left(\mathbf{x}\right) &= \boldsymbol{\Theta}_{s} \nabla_{2} \boldsymbol{\Phi}_{j^{rs}}^{s}\left(\mathbf{x}\right); \\ \tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{j^{rs}}^{e^{s}}\left(\mathbf{x}\right) &= \boldsymbol{\Theta}_{s} \nabla_{2}^{\prime} \boldsymbol{\Phi}_{j^{rs}}^{s}\left(\mathbf{x}\right); \\ \boldsymbol{\Theta}_{s} &- \text{ матрица преобразования координат из } \mathbf{x}^{\prime s} = \\ &= \left\{x_{1}^{\prime s}, x_{2}^{\prime s}, x_{3}^{\prime s}\right\} \text{ в } \mathbf{x} = \left\{x_{1}, x_{2}, x_{3}\right\}; \\ \nabla_{2}^{\prime} &= \left\{-\frac{\partial}{\partial x_{2}}, \frac{\partial}{\partial x_{1}}, \mathbf{0}\right\}; \\ \nabla_{2}^{\prime} &= \left\{\frac{\partial}{\partial x_{1}}, \frac{\partial}{\partial x_{2}}, \mathbf{0}\right\}; \\ \mathbf{\nabla}_{2}^{\prime} &= \left\{\frac{\partial}{\partial x_{1}}, \frac{\partial}{\partial x_{2}}, \mathbf{0}\right\}; \\ \mathbf{\Phi}_{j^{rs}}^{s}\left(\mathbf{x}\right) &= p_{s}! \prod_{n=0}^{N_{s}-1} \left[\frac{\left(\sum_{n=0}^{s} \left(\mathbf{x}\right)\right)\right]_{n}^{j_{n}^{\prime s}}}{j_{n}^{\prime s}!}; \\ a_{j^{s}j^{rs}}^{h^{s}} &= a_{j^{s}j^{\prime s}}^{e^{s}} - \bar{j}^{\prime s} - e \text{ и } j^{\prime s} - e \text{ элементы } \bar{j}^{s} - ro \text{ и } j^{s} - ro \\ \text{соответствующих собственных векторов матриц} \\ \mathbf{A}_{s}^{h,e} &= \left[\mathbf{B}_{s}^{h,e}\right]^{-1} \mathbf{C}_{s}^{h,e} \quad при \text{ составлении } \mathbf{B}_{s}^{h,e} \text{ и } \mathbf{C}_{s}^{h,e} \\ \text{из численного решения БМ [9] относительно } \Omega_{s} \\ \text{задач Неймана и Дирихле для однородного урав- нения Гельмгольца; }  $\zeta_{n}^{s}\left(\mathbf{x}\right) - n$ -е барицентри-  
ческие координаты, заданные с учетом [14] для \\ \Omega_{s} \subset \mathbb{R}^{2}$$
относительно системы координат  $\mathbf{x}^{\prime s} = \\ = \left\{x_{1}^{\prime s}, x_{2}^{\prime s}, x_{3}^{\prime s}\right\}$  в плоскости  $x_{3}^{\prime s} = 0; \quad p_{s} -$ порядок   
аппроксимации для  $S_{s}; \ \overline{M}_{s}^{s}$  и  $M_{p_{s}}^{s}$  – множества   
мультииндексов, правила формирования которых   
определены в [13]. \\ \end{split}

## 2. Интегральное представление электромагнитного поля зеркальных антенн в приближении барицентрического метода

Заданная постановка задачи дифракции относительно ЗА и предложение об аппроксимации

$$\tilde{\mathbf{u}}^{s}\left(\mathbf{x}\right) = \sum_{\overline{j}^{s} \in \overline{\mathbb{M}}_{p_{s}}^{s}} c_{\overline{j}^{s}}^{h^{s}} \psi_{\overline{j}^{s}}^{h^{s}}\left(\mathbf{x}\right) + \sum_{j^{s} \in \mathbb{M}_{p_{s}}^{s}} c_{j^{s}}^{e^{s}} \psi_{j^{s}}^{e^{s}}\left(\mathbf{x}\right)$$

определяют представление исходного интегродифференциального уравнения (3) в виде следующей системы из *s* уравнений:

$$\sum_{s'=1}^{M'} \left[ \nabla \int_{S_{s'}} \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nabla \cdot \mathbf{u}^{s'}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \beta^2 \int_{S_{s'}} \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{u}^{s'}(\mathbf{y}) \right] = \mathbf{f}_s(\mathbf{x}),$$
(5)

где  $\mathbf{x} \in S_s$ ;  $\mathbf{f}_s = i\beta \mathbf{E}_{\tau}^0 \Big|_{S_s}$ ;  $\mathbf{E}_{\tau}^0 \Big|_{S_s} = -\mathbf{v}^s \times \mathbf{E}_{S_s}^0$  – тангенциальная составляющая электрического поля, наведенного полями источников  $\left\{\mathbf{E}_1^0, \mathbf{E}_2^0, ..., \mathbf{E}_L^0\right\}$ в точке  $\mathbf{x} \in S_s$ . Поле  $\mathbf{E}_{S_s}^0$  из  $\left\{\mathbf{E}_1^0, \mathbf{E}_2^0, ..., \mathbf{E}_L^0\right\}$  определяется, исходя из принципа Гюйгенса – Френеля [1]:  $\mathbf{E}_s^0$  ( $\mathbf{x}$ ) =

$$= 4\pi \sum_{l=1}^{L} \int_{S_{l}} \left| \mathbf{E}_{l}^{0}(\mathbf{y}) \right| \tilde{\mathbf{E}}_{l}^{0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \alpha_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} d\mathbf{y},$$
(6)  
rge

$$\begin{split} \tilde{\mathbf{E}}_{l}^{0}\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right) &= \hat{\mathbf{E}}_{l}^{0}\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right) / \left| \hat{\mathbf{E}}_{l}^{0}\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right) \right|;\\ \hat{\mathbf{E}}_{l}^{0}\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right) &= \tilde{\mathbf{H}}_{l}^{0}\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right) \times \tilde{\mathbf{d}}\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right);\\ \tilde{\mathbf{H}}_{l}^{0}\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right) &= \hat{\mathbf{H}}_{l}^{0}\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right) / \left| \hat{\mathbf{H}}_{l}^{0}\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right) \right|;\\ \tilde{\mathbf{d}}\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right) &= \left(\mathbf{x} - \mathbf{y}\right) / \left| \mathbf{x} - \mathbf{y} \right|;\\ \hat{\mathbf{H}}_{l}^{0}\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right) &= \tilde{\mathbf{d}}\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right) \times \mathbf{E}_{l}^{\prime 0}\left(\mathbf{y}\right);\\ \mathbf{E}_{l}^{\prime 0}\left(\mathbf{y}\right) &= \mathbf{E}_{l}^{0}\left(\mathbf{y}\right) / \left| \mathbf{E}_{l}^{0}\left(\mathbf{y}\right) \right|; \end{split}$$

α<sub>**x**,**y**</sub> ∈ [0;1] – устанавливает наличие эйконала между точками **х** и **у**.

Подстановка аппроксимации  $\tilde{\mathbf{u}}^{s}(\mathbf{x})$  в (4) с учетом свойства [13] базисных функций (6), второй формулы Грина и свойства дифференциальных операторов [11] сводит интегральное представление ЭМП ЗА в приближении барицентрического метода к системе из  $\sum_{s=1}^{M'} \left( \left| \overline{\mathbb{M}}_{p_s}^{s} \right| + \left| \mathbb{M}_{p_s}^{s} \right| \right)$  линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения  $c_{\overline{i}^{s}}^{h^{s}}$ ,  $c_{\underline{j}^{s}}^{e^{s}}$ :

(7)

$$\begin{split} &\int_{S_{s}} \mathbf{f}_{s} \left( \mathbf{x} \right) \boldsymbol{\psi}_{j^{s}}^{h^{s}} \left( \mathbf{x} \right) d\mathbf{x} = \\ &= \sum_{s'=1}^{M'} \left\{ \sum_{j^{s'} \in \overline{\mathbb{M}}_{p_{s'}}^{s'}} c_{j^{s'}}^{h^{s'}} \left[ \int_{S_{s}} \nabla \cdot \boldsymbol{\psi}_{j^{s}}^{h^{s}} \left( \mathbf{x} \right) \times \right. \\ &\times \int_{S_{s'}} \nabla \cdot \boldsymbol{\psi}_{j^{s'}}^{h^{s'}} \left( \mathbf{y} \right) \Psi \left( \mathbf{x}, \mathbf{y} \right) d\mathbf{y} d\mathbf{x} - \\ &- \beta^{2} \int_{S_{s}} \mathbf{\psi}_{j^{s'}}^{h^{s}} \left( \mathbf{x} \right) \int_{S_{s'}} \mathbf{\psi}_{j^{s'}}^{h^{s'}} \left( \mathbf{y} \right) \Psi \left( \mathbf{x}, \mathbf{y} \right) d\mathbf{y} d\mathbf{x} - \\ &+ \sum_{j^{s'} \in \mathbb{M}_{p_{s'}}^{s'}} c_{j^{s'}}^{e^{s'}} \left[ \int_{S_{s}} \nabla \cdot \mathbf{\psi}_{j^{s'}}^{h^{s}} \left( \mathbf{x} \right) \times \\ &\times \int_{S_{s'}} \nabla \cdot \mathbf{\psi}_{j^{s'}}^{e^{s'}} \left( \mathbf{y} \right) \Psi \left( \mathbf{x}, \mathbf{y} \right) d\mathbf{y} d\mathbf{x} - \\ &- \beta^{2} \int_{S_{s}} \mathbf{\psi}_{j^{s}}^{h^{s}} \left( \mathbf{x} \right) \int_{S_{s'}} \mathbf{\psi}_{j^{s'}}^{e^{s'}} \left( \mathbf{y} \right) \Psi \left( \mathbf{x}, \mathbf{y} \right) d\mathbf{y} d\mathbf{x} - \\ &- \beta^{2} \int_{S_{s}} \mathbf{\psi}_{j^{s}}^{e^{s}} \left( \mathbf{x} \right) \int_{S_{s'}} c_{j^{s'}}^{e^{s'}} \left[ \int_{S_{s}} \nabla \cdot \mathbf{\psi}_{j^{s'}}^{e^{s'}} \left( \mathbf{x} \right) \times \\ &\times \int_{S_{s'}} \nabla \cdot \mathbf{\psi}_{j^{s'}}^{h^{s'}} \left( \mathbf{y} \right) \Psi \left( \mathbf{x}, \mathbf{y} \right) d\mathbf{y} d\mathbf{x} - \\ &- \beta^{2} \int_{S_{s}} \mathbf{\psi}_{j^{s}}^{e^{s}} \left( \mathbf{x} \right) \int_{S_{s'}} \mathbf{\psi}_{j^{s'}}^{h^{s'}} \left( \mathbf{y} \right) \Psi \left( \mathbf{x}, \mathbf{y} \right) d\mathbf{y} d\mathbf{x} - \\ &- \beta^{2} \int_{S_{s}} \mathbf{\psi}_{j^{s}}^{e^{s}} \left( \mathbf{x} \right) \int_{S_{s'}} \mathbf{\psi}_{j^{s'}}^{h^{s'}} \left( \mathbf{y} \right) \Psi \left( \mathbf{x}, \mathbf{y} \right) d\mathbf{y} d\mathbf{x} - \\ &- \beta^{2} \int_{S_{s}} \mathbf{\psi}_{j^{s}}^{e^{s'}} \left( \mathbf{x} \right) \int_{S_{s'}} \mathbf{\psi}_{j^{s'}}^{h^{s'}} \left( \mathbf{y} \right) \Psi \left( \mathbf{x}, \mathbf{y} \right) d\mathbf{y} d\mathbf{x} - \\ &- \beta^{2} \int_{S_{s}} \mathbf{\psi}_{j^{s'}}^{e^{s'}} \left( \mathbf{y} \right) \Psi \left( \mathbf{x}, \mathbf{y} \right) d\mathbf{y} d\mathbf{x} - \\ &- \beta^{2} \int_{S_{s}} \mathbf{\psi}_{j^{s'}}^{e^{s'}} \left( \mathbf{x} \right) \int_{S_{s'}} \mathbf{\psi}_{j^{s''}}^{e^{s'}} \left( \mathbf{y} \right) \Psi \left( \mathbf{x}, \mathbf{y} \right) d\mathbf{y} d\mathbf{x} - \\ &- \beta^{2} \int_{S_{s}} \mathbf{\psi}_{j^{s'}}^{e^{s'}} \left( \mathbf{x} \right) \int_{S_{s'}} \mathbf{\psi}_{j^{s''}}^{e^{s'}} \left( \mathbf{y} \right) \Psi \left( \mathbf{x}, \mathbf{y} \right) d\mathbf{y} d\mathbf{x} - \\ &- \beta^{2} \int_{S_{s}} \mathbf{\psi}_{j^{s'}}^{e^{s'}} \left( \mathbf{x} \right) \int_{S_{s'}} \mathbf{\psi}_{j^{s''}}^{e^{s''}} \left( \mathbf{y} \right) \Psi \left( \mathbf{x}, \mathbf{y} \right) d\mathbf{y} d\mathbf{x} - \\ &- \beta^{2} \int_{S_{s}} \mathbf{\psi}_{j^{s'}}^{e^{s'}} \left( \mathbf{x} \right) \int_{S_{s'}} \mathbf{\psi}_{j^{s''}}^{e^{s''}} \left( \mathbf{y} \right) \Psi \left( \mathbf{x}, \mathbf{y} \right) d\mathbf{y} d\mathbf{x} - \\ &- \beta^{2} \int_{S_{s}} \mathbf{\psi}_{j^{s'}}^{e^{s'}} \left( \mathbf{x$$

Относительно соотношений (7) следует отметить, что если экран  $S_s$  является плоским, то  $\nabla \cdot \Psi_{j^s}^{e^s}(\mathbf{x}) = 0$ . Интегралы в (7) вычисляются численно [15] при разбиении  $S_s$  на треугольные элементы при построении триангуляции Делоне и последующим использованием кубатурных формул интегрирования по треугольным областям. Способ исключения появления сингулярности в  $\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  сводится к разнесению узловых точек интегрирования относительно  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  для смежных треугольников и переходу в полярную систему координат при расположении  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  в одной треугольной области [13].

1: function GENPERM(N,p) 2: M = N + p - 1; 3: for m = 0 to M - 1 do 4: if m < N - 1 then  $l_m = 0$ 5: else  $l_m = 1$ 6:  $\mathbb{L}_p \Leftarrow l$ 7: while NEXTSET(l,M) do  $\mathbb{L}_p \Leftarrow l$ 8: return  $\mathbb{L}_p$ 

Рис. 2. Псевдокод алгоритма генерации перестановок 1 и 0 в последовательности  $l \in \mathbb{L}_p$  длины N + p - 1 с p единицами и N - 1 нулями

Fig. 2. Pseudocode of the algorithm for generating permutations 1 and 0 in a sequence  $l \in \mathbb{L}_p$  of length N + p - 1 with p ones and N - 1 zeros

## 3. Особенности алгоритмической реализации и результаты верификации сформированных решений

Вычислительные особенности исследования соотношений вида (7) при алгоритмической реализации БМ рассмотрены в [13]. Их основу составляют правила задания множеств мультииндексов  $\overline{M}_p$  и  $\mathbb{M}_p$ , формируемых из  $\tilde{\mathbb{M}}_p$ :

$$\begin{split} \tilde{\mathbb{M}}_{p} &= \left\{ j = \left( \tilde{j}_{0}, \tilde{j}_{1}, ..., \tilde{j}_{n}, ..., \tilde{j}_{N-1} \right) \colon \tilde{j}_{n} \in \mathbb{Z}_{+}, \\ &\sum_{n \in \left[0; N-1\right]} \tilde{j}_{n} = p \right\}, \end{split}$$
(8)

где  $p \in \mathbb{N};$ 

$$\left|\tilde{\mathbb{M}}_{p}\right| = \binom{N+p-1}{p}; \quad \mathbb{Z}_{+} = \mathbb{N} \cup \{0\};$$

N – число вершин  $\Omega$ .

Уточним, что правило (8) порождения  $M_p$  сводится к алгоритму генерации композиций неотрицательных целых чисел  $j = (\tilde{j}_0, \tilde{j}_1, ..., \tilde{j}_n, ..., \tilde{j}_{N-1})$ числа p при интерпретации  $\tilde{j}$  (M = N + p - 1) разрядным числом  $l = (l_0, l_1, ..., l_{m}, ..., l_{M-1})$  из единиц и нулей  $(l_m \in [0;1])$ . Набор элементов l составляет множество  $\mathbb{L}_p$ , формируемое расстановкой 1 и 0 длины N + p - 1 при условии наличия в  $l \in \mathbb{L}_p$  pединиц и N - 1 нулей. Алгоритм формирования  $\mathbb{L}_p$  основывается на алгоритме генерации перестановок 1 и 0 (рис. 2).

В алгоритме на рис. 2 функция NEXTSET задает новую перестановку  $l \in \mathbb{L}_p$  при определении возможности ее формирования (рис. 3).

Последующий перевод l из сформированного множества  $\mathbb{L}_p$  в  $\tilde{j}$  производится суммированием элементов  $l_m$  справа налево. При этом значение

1:	function NEXTSET $(l,M)$
2:	i = M - 2
3:	while $(i \neq -1) \land (l_i \geqslant l_{i+1})$ do $i = i - 1$
4:	if $i = -1$ then return false
5:	k = M - 1
6:	while $l_i \geqslant l_k$ do $k = k - 1$
7:	$\mathbf{SWAP}(l,i,k)$
8:	i = i + 1
9:	k = M - 1
10:	while $i < k$ do
11:	i = i + 1
12:	k = k - 1
13:	$\mathbf{SWAP}(l,i,k)$
14:	return true
D	

**Рис. 3.** Псевдокод функции NEXTSET **Fig. 3.** Pseudocode of the NEXTSET function

элемента  $\tilde{j}_n$  составляет непрерываемая нулями сумма последовательности единиц из *l*. В случае если элемент  $l_m$  равен нулю, то соответсвующее последующее значение  $\tilde{j}_{n+1}$  приравнивается к нулю. Алгоритм перевода бинарной последовательности *l* в мультииндекс  $\tilde{j}$  приведен на рис. 4. В представленом алгоритме предполагается, что исходно элементы мультииндекса  $\tilde{j}$  равны нулю.

Сравнительные графики зависимости количества процессорных тактов (Q) от размера входных данных (N, p) генерации  $\tilde{\mathbb{M}}_p$  при использовании предложенного алгоритма и при полном переборе приведены на рис. 5.

Полученные результаты (рис. 5) наглядно демонстрируют вычислительную предпочтительность предложенного алгоритма, позволяющего достаточно оперативно (время вычислений для ПЭВМ с процессором Intel(R) Core(TM) i7-3612QM CPU 2.10 GHz для N = 24, p = 10 при программной реализации на Visual Studio C++ с использованием библиотеки для работы с векторами и матрицами аrmadillo не превышает 8 с) формировать множество мультииндексов  $\tilde{M}_n$ .

Для наглядной демонстрации предпочтительности применения БМ в решении задачи электродинамического анализа ЗА в сравнении с известными методами [7; 12; 16], предполагающими аппроксимацию  $\mathbf{u}^{s}(\mathbf{x})$  базисными функциями RWG, проведем апостериорное исследование при реализации вычислительных экспериментов на пяти тестовых задачах. Первая, вторая и третья состоят в определении  $\mathbf{u}$  на плоских бесконечно тонких идеально проводящих прямоугольных экранах  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  размерами  $\lambda \times \lambda$ ,  $3\lambda \times 3\lambda$  и

1: function CONVIND $(l, \tilde{j}, M)$ 

- 2: n = 0
- 3: for m = M 1 downto 0 do

4: **if** 
$$l_m = 0$$
 **then**  $n = n + 1$ 

- 5: else  $\tilde{j}_n = \tilde{j}_n + 1$
- 6: return true

Рис. 4. Псевдокод алгоритма перевода $l$ в $\tilde{j}$			
Fig. 4. Pseudocode of the algorithm for translating	l	to	ĩ



Рис. 5. Сравнительная зависимость Q от N, p для разработанного алгоритма и алгоритма полного перебора Fig. 5. Comparative dependence of Q on N, p for the developed algorithm and the exhaustive search algorithma

 $5\lambda \times 5\lambda$  соответственно ( $\lambda$  – длина волны). Суть четвертой тестовой задачи составляет вычисление **u** на плоском бесконечно тонком идеально проводящем экране  $S_4$ , заданного П-образной областью из восьми вершин:

$$\begin{split} \mathbf{P}_{0} &= \left(-0, 31\lambda; -0, 712\lambda; 0\right), \ \mathbf{P}_{1} &= \left(-0, 31\lambda; 0, 337\lambda; 0\right), \\ \mathbf{P}_{2} &= \left(0, 31\lambda; -0, 337\lambda; 0\right), \ \mathbf{P}_{3} &= \left(0, 31\lambda; -0, 712\lambda; 0\right), \\ \mathbf{P}_{4} &= \left(2\lambda; -0, 712\lambda; 0\right), \ \mathbf{P}_{5} &= \left(2\lambda; 1, 088\lambda; 0\right), \\ \mathbf{P}_{6} &= \left(-2\lambda; 1, 088\lambda; 0\right), \ \mathbf{P}_{7} &= \left(-4\lambda; -1, 425\lambda; 0\right). \end{split}$$

Возбуждение **u** на экранах  $S_1 - S_4$  задается плоской электромагнитной волной  $\mathbf{E}^0 = (1;0;0)$ . Пятая тестовая задача заключается в определении **u** на параболическом бесконечно тонком идеально проводящем экране  $S_5$  с фокусом 4 $\lambda$  и прямоугольным раскрывом  $\Omega_5$  размера  $10\lambda \times 10\lambda$ , расположенным в плоскости  $x_3 = 0$ . Возбуждение тока **u** на  $S_5$  выполняется двумя точечными источниками, размещенными вблизи центров  $(0,75\lambda;0;4\lambda)$ ,  $(-0,75\lambda;0;4\lambda)$  плоских бесконечно тонких идеально проводящих поверхностей  $\Omega_5^1$ ,  $\Omega_5^2$ . Области  $\Omega_5^1$ ,  $\Omega_5^2$  ориентируются в противоположную сторону оси  $x_3$  и задаются правильными пятиугольниками с радиусом описанной окружности 0,5 $\lambda$ .



Рис. 6. Зависимость  $\|\mathbf{u}| - |\tilde{\mathbf{u}}\|_C$  от *p* для  $S_1$  при расчете **u** БМ и RWG Fig. 6. Dependence of  $\|\mathbf{u}| - |\tilde{\mathbf{u}}\|_C$  on *p* for  $S_1$  when calculating **u** BM and RWG



Апостериорная оценка сходимости БМ проведена при изменении *p*. При этом число базисных функций RWG для соизмеримости с БМ вычислительных затрат для фиксированного *p* и  $\Omega$  выбиралось равным  $|\overline{\mathbb{M}}_p|$ . Также для заданных тестовых задач сходимость оценивалась относительно модуля плотности тока  $|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1\overline{u}_1 + u_2\overline{u}_2 + u_3\overline{u}_3}$  по нормам в *C* и  $L_2$ :  $|||\mathbf{u}| - |\tilde{\mathbf{u}}||_C = \max_{\mathbf{x}\in S} ||\mathbf{u}| - |\tilde{\mathbf{u}}||$  и  $|||\mathbf{u}| - |\tilde{\mathbf{u}}||_{L_2} = \sqrt{\int_S (||\mathbf{u}| - |\tilde{\mathbf{u}}||)^2} d\mathbf{x}$  соответственно.

Вычислительные алгоритмы для БМ и метода RWG реализованы в Microsoft Visual Studio C++ с использованием библиотек boost и armadillo с применением dll BLAS и LAPACK. Расчетная сетка для формирования базисных функций RWG для тестовых задач задавалась с использованием FreeFem++. Эталонные распределения плотности тока для указанных тестовых задач рассчитаны на вычислительном сервере (Intel(R) Xeon(R) E5-2640V4 Broadwell-EP, DIMM DDR4 64 Гб) с применением САПР Ansoft HFSS для следующих установок (driven solution setupe): maximum number of passes = 50; maximum delta  $S = 10^{-8}$ ; lambda target = = 0,05; order of basis functions = second order.

На рис. 6, 7 представлены зависимости  $\|\|\mathbf{u}\| - |\tilde{\mathbf{u}}\|\|_{C}$ ,  $\|\|\mathbf{u}\| - |\tilde{\mathbf{u}}\|\|_{L_{2}}$  от *р* для первой тестовой задачи при вычислении БМ и методом RWG с отображением распределений  $|\mathbf{u}|$  на  $S_{1}$  для выборочных значений *р*.

На рис. 8, 9 представлены зависимости  $\|\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{\tilde{u}}\|\|_{C}$ ,  $\|\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{\tilde{u}}\|\|_{L_{2}}$  от *р* для второй тестовой задачи при вычислении БМ и методом RWG с отображением распределений  $|\mathbf{u}|$  на  $S_{2}$  для выборочных значений *р*.

На рис. 10, 11 представлены зависимости  $\| \| \mathbf{u} \| - \| \mathbf{\tilde{u}} \|_{C}^{2}$ ,  $\| \| \mathbf{u} \| - \| \mathbf{\tilde{u}} \|_{L_{2}}^{2}$  от *p* для третьей тестовой за-



Рис. 8. Зависимость  $\|\mathbf{u}| - |\tilde{\mathbf{u}}\|_{C}$  от *p* для  $S_{2}$  при расчете **u** БМ и RWG Fig. 8. Dependence of  $\|\mathbf{u}| - |\tilde{\mathbf{u}}\|_{C}$  on *p* for  $S_{2}$  when calculating **u** BM and RWG



Рис. 9. Зависимость  $\|\|\mathbf{u}\| - |\tilde{\mathbf{u}}\|\|_{L_2}$  от *р* для  $S_2$  при расчете **u** БМ и RWG Fig. 9. Dependence of  $\|\|\mathbf{u}\| - |\tilde{\mathbf{u}}\|\|_{L_2}$  on *p* for  $S_2$  when calculating **u** BM and RWG







Рис. 12. Зависимость  $\|\mathbf{u}\| - |\tilde{\mathbf{u}}\|_{C}$  от *p* для *S*<sub>4</sub> при расчете **u** БМ и RWG Fig. 12. Dependence of  $\|\mathbf{u}| - |\tilde{\mathbf{u}}\|_{C}$  on *p* for  $S_4$  when calculating  $\mathbf{u}$  BM and RWG





Рис. 14. Зависимость  $\| \mathbf{u} \| - \| \tilde{\mathbf{u}} \|_C$  от *р* для  $S_5$  при расчете **u** БМ и RWG Fig. 14. Dependence of  $\| \mathbf{u} \| - \| \tilde{\mathbf{u}} \|_C$  on *p* for  $S_5$  when calculating **u** BM and RWG



дачи при вычислении БМ и методом RWG с отображением распределений **|u|** на *S*<sub>3</sub> для выборочных значений *p*.

На рис. 12, 13 представлены зависимости  $\|\|\mathbf{u}\| - |\tilde{\mathbf{u}}\|\|_{C}$ ,  $\|\|\mathbf{u}\| - |\tilde{\mathbf{u}}\|\|_{L_{2}}$  от *р* для четвертой тестовой задачи при вычислении БМ и методом RWG с отображением распределений  $|\mathbf{u}|$  на  $S_{4}$  для выборочных значений *р*.

На рис. 14, 15 представлены зависимости  $\|\|\mathbf{u}\| - |\tilde{\mathbf{u}}\|\|_{C}$ ,  $\|\|\mathbf{u}\| - |\tilde{\mathbf{u}}\|\|_{L_{2}}$  от *р* для четвертой тестовой задачи при вычислении БМ и методом RWG с отображением распределений  $|\mathbf{u}|$  на  $S_{5}$  для выборочных значений *р*.

### Заключение

В целом результаты проведенного моделирования подтверждают более высокую эффективность барицентрического метода в решении задач электродинамического анализа ЗА в сравнении с методом RWG. Основное достоинство предлагаемой вычислительной схемы состоит в получении гладкой функции **ũ** на поверхности анализируемого экрана, которая при соизмеримом с методом RWG порядке аппроксимации позволяет получать более точное приближение и. Отдельно следует подчеркнуть полиномиальную скорость сходимости БМ, которая обеспечивает более существенный рост порядка точность с увеличением р в сравнении со сходимостью аппроксимации RWG. Сравнительные графические зависимости сходимости БМ (рис. 6-15) определяют, что выбор порядка аппроксимации р относительно анализируемой поверхности должен учитывать отношение в длинах волн геометрического размера  $\Omega$ и степени кривизны *S* к  $\overline{\mathbb{M}}_p$ . Получение соответствующих уточненных аналитических оценок с учетом результатов [13] относится к направлениям дальнейшего развития БМ в решении задач дифракции на проводящих тонких экранах. Также вычислительные результаты раскрывав простой (рис. 6–11) и сложной (рис. 12, 13) геометрических форм экранов во взаимосвязи с результатами [13] определяют одно из ключевых направлений развития БМ – решение задачи формирования оптимальной аппроксимации липшицевой функции на произвольном многоугольнике в барицентрическом представлении. Указанная задача также относится к направлениям дальнейших исследований. Ее разрешение предполагается при обобщении известных результатов по интерполяции липшицевой функции на отрезке, определяемых при переходе от многочленов Бернштейна или Лагранжа к многочленам Чебышева.

#### Список литературы

- 1. Сомов А.М., Архипов Н.С., Полянский И.С. Анализ и структурно-параметрический синтез зеркальных антенн / под ред. А.М. Сомова. М.: Горячая линия Телеком, 2017. 226 с.
- 2. Расчет диаграммы направленности зеркальных антенн в приближении методов физической оптики и физической теории дифракции / А.М. Сомов [и др.] // Труды НИИР. 2015. № 2. С. 43–53.
- Клюев Д.С. Расчет характеристик зеркальной антенны с плоским зеркалом методом двумерных сингулярных интегральных уравнений // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2010. Т. 13, N° 1. С. 21–26. URL: https://www.elibrary.ru/ item.asp?id=14864285.
- 4. Сингулярные и гиперсингулярные интегральные уравнения в теории зеркальных и полосковых антенн: монография / под ред. Д.С. Клюева. М.: Радиотехника, 2015. 216 с.
- 5. Клюев Д.С., Соколова Ю.В. Электродинамический анализ зеркальных антенн самосогласованным методом // Журнал технической физики. 2014. Т. 84, № 9. С. 155–158. DOI: http://journals.ioffe.ru/articles/40877.
- 6. Сомов А.М., Кабетов Р.В. Многолучевые зеркальные антенны: геометрия и методы анализа. М.: Горячая линия Телеком, 2019. 256 с.
- 7. Gibson W.C. The Method of Moments in Electromagnetics. 2nd ed. N.-Y.: Chapman and Hall/CRC, 2014. 450 p.
- 8. Полянский И.С., Пехов Ю.С. Барицентрический метод в решении сингулярных интегральных уравнений электродинамической теории зеркальных антенн // Труды СПИИРАН. 2017. № 5 (54). С. 244–262. DOI: https://doi.org/10.15622/sp.54.11.
- 9. Полянский И.С. Барицентрический метод в вычислительной электродинамике. Орел: Академия ФСО России, 2017. 148 с.
- 10. Полянский И.С. О применении барицентрического метода в численном решении внутренней задачи электродинамики // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2018. Т. 21, N° 3. С. 36-42. URL: https://journals.ssau.ru/pwp/article/ view/7016.
- 11. Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах: псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции. М.: ИПРЖР, 1996. 176 с.
- Cai W., Yijun Yu., Yuan X.C. Singularity treatment and high-order RWG basis functions for integral equations of electromagnetic scattering // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2002. Vol. 53, No. 1. P. 31-47. DOI: https://doi.org/10.1002/ nme.390.
- 13. К вопросу сходимости барицентрического метода в решении задач дифракции на проводящих тонких экранах/А.С. Ильинский [и др.] // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2020. Т. 23, № 3. С. 34–43.
- 14. Ильинский А.С. Полянский И.С. Приближенный метод определения гармонических барицентрических координат для произвольных многоугольников // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2019. Т. 59, № 3. С. 38–55. DOI: https://doi.org/10.1134/S0044466919030098.
- 15. Архипов Н.С., Полянский И.С., Степанов Д.Е. Представление отражающих поверхностей антенной системы в задачах анализа и синтеза зеркальных антенн методами физической оптики // Телекоммуникации. 2014. № 7. С. 15–21. URL: https://www. elibrary.ru/item.asp?id=21717197.
- 16. Медведик М.Ю., Смирнов Ю.Г. Эллиптичность интегрального уравнения электрического поля для поглощающих сред и сходимость метода Рао – Уилтона – Глиссона // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54, № 1. С. 105–113. DOI: https://doi.org/10.7868/S0044466914010104.
- 17. Полянский И.С., Архипов Н.С., Мисюрин С.Ю. О решении проблемы оптимального управления адаптивной многолучевой зеркальной антенны // Автоматика и телемеханика. 2019. Nº 1. C. 83–100. DOI: https://doi.org/10.1134/S0005231019010069.

## References

- 1. Somov A.M., Arhipov N.S., Poljanskij I.S. Analysis and Structural-Parametric Synthesis of Reflector Antennas. Ed. by A.M. Somov. Moscow: Gorjachaja linija – Telekom, 2017, 226 p. (In Russ.)
- 2. Somov A.M. et al. Calculation of the radiation pattern of reflector antennas in the approximation of physical optics methods and physical theory of diffraction. *Trudy NIIR*, 2015, no. 2, pp. 43–53. (In Russ.)
- 3. Kljuev D.S. Calculation of the characteristics of a reflector antenna with a flat mirror by the method of two-dimensional singular integral equations. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2010, vol. 13, no. 1, pp. 21-26. URL: https://www.elibrary.ru/ item.asp?id=14864285. (In Russ.)
- 4. Singular and Hypersingular Integral Equations in the Theory of Mirror and Strip Antennas: Monograph. Ed. by D.S. Kljueva. Moscow: Radiotehnika, 2015, 216 p. (In Russ.)

- 5. Kljuev D.S., Sokolova Yu.V. Electrodynamic analysis of reflector antennas by a self-consistent method. *Zhurnal tehnicheskoj fiziki*, 2014, vol. 84, no. 9, pp. 155–158. DOI: http://journals.ioffe.ru/articles/40877. (In Russ.)
- 6. Somov A.M., Kabetov R.V. Multibeam Reflector Antennas: Geometry and Analysis Techniques. Moscow: Gorjachaja linija Telekom, 2019, 256 p. (In Russ.)
- 7. Gibson W.C. The Method of Moments in Electromagnetics. 2nd ed. New York: Chapman and Hall/CRC, 2014, 450 p.
- Poljanskij I.S., Pehov Yu.S. Barycentric method in solving singular integral equations of the electrodynamic theory of reflector antennas. *Trudy SPIIRAN*, 2017, no. 5 (54), pp. 244–262. DOI: https://doi.org/10.15622/sp.54.11. (In Russ.)
- 9. Poljanskij I.S. Barycentric Method in Computational Electrodynamics. Orel: Akademija FSO Rossii, 2017, 148 p. (In Russ.)
- 10. Poljanskij I.S. On the application of the barycentric method in the numerical solution of an internal problem of electrodynamics. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2018, vol. 21, no. 3, pp. 36–42. URL: https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7016. (In Russ.)
- 11. Il'inskij A.S., Smirnov Yu.G. Diffraction of Electromagnetic Waves on Thin Conductive Screens: Pseudodifferential Operators in Diffraction Problems. Moscow: IPRZhR, 1996, 176 p. (In Russ.)
- Cai W., Yijun Yu., Yuan X.C. Singularity treatment and high-order RWG basis functions for integral equations of electromagnetic scattering. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002, vol. 53, no. 1, pp. 31–47. DOI: https://doi.org/10.1002/nme.390.
- 13. Il'inskij A.S. et al. On the issue of convergence of the barycentric method in solving diffraction problems on thin conductive screens. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2020, vol. 23, no. 3, pp. 34-43. (In Russ.)
- 14. Il'inskij A.S., Poljanskij I.S. An approximate method for determining harmonic barycentric coordinates for arbitrary polygons. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki*, 2019, vol. 59, no. 3, pp. 38–55. DOI: https://doi.org/10.1134/S0044466919030098. (In Russ.)
- 15. Arhipov N.S., Poljanskij I.S., Stepanov D.E. Representation of the reflecting surfaces of the antenna system in the problems of analysis and synthesis of reflector antennas using physical optics methods. *Telekommunikatsii*, 2014, no. 7, pp. 15–21. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=21717197. (In Russ.)
- 16. Medvedik M.Yu., Smirnov Yu.G. Ellipticity of the integral equation of the electric field for absorbing media and convergence of the Rao-Wilton-Glisson method. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki*, 2014, vol. 54, no. 1, pp. 105-113. DOI: https://doi.org/10.7868/S0044466914010104. (In Russ.)
- Poljanskij I.S., Arhipov N.S., Misjurin S.Yu. On the solution of the problem of optimal control of an adaptive multi-beam reflector antenna. Avtomatika i telemehanika, 2019, no. 1, pp. 83-100. DOI: https://doi.org/10.1134/S0005231019010069. (In Russ.)

Physics of Wave Processes and Radio Systems

2020, vol. 23, no. 4, pp. 36-47

DOI 10.18469/1810-3189.2020.23.4.36-47

Received 15 October 2020 Accepted 11 November 2020

# Electrodynamic analysis of mirror antennas in the approximation of the barycentric method

Ivan S. Polyansky <sup>®</sup>, Dmitry E. Stepanov, Dmitry K. Ketoh, Vyacheslav A. Shevchenko

The Academy of the Federal Guard Service of the Russian Federation 35, Priborostroitelnaya Street, Oryol, 302015, Russia

*Abstract* - In the article, the features of using the barycentric method in solving problems of electrodynamic analysis of mirror antennas are considered. The solution of the internal problem of electrodynamics is the basis of the study. The problem of electrodynamic analysis of a mirror antenna is formulated in the classical representation of the problem of diffraction of an electromagnetic wave on a system of infinitely thin perfectly conducting screens of arbitrary shape and reduced to a system of integro-differential equations. The solution of the latter is performed numerically in the projection formulation of the Galerkin method when determining the approximation of the desired surface current density function in the system of global basis functions formed in the approximation of the barycentric method for the analyzed screen. The integral representation of the electromagnetic field of the mirror antenna, taking into account the properties of the introduced basic functions, is given. The features of the algorithmic implementation of the developed solutions are clarified. The efficiency and comparative preference of the use of the barycentric method in the problems of electrodynamic analysis of mirror antennas are tested on test examples.

*Keywords* - barycentric method, mirror antenna, electromagnetic wave diffraction, system of infinitely thin ideally conducting screens, global basis functions.

### Информация об авторах

Полянский Иван Сергеевич, доктор физико-математических наук, сотрудник Академии Федеральной службы охраны Российской Федерации, г. Орел, Россия. Автор 152 научных публикаций.

Область научных интересов: математическое моделирование, динамические системы, дифференциальные уравнения, методы оптимизации, оптимальное управление, конформные отображения, вычислительная электродинамика, цифровая обработка сигналов.

E-mail: van341@mail.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1282-1522

Степанов Дмитрий Евгеньевич, сотрудник Академии Федеральной службы охраны Российской Федерации, г. Орел, Россия. Автор 32 научных публикаций.

Область научных интересов: математическое моделирование, методы оптимизации, вычислительная электродинамика, цифровая обработка сигналов, антенны и устройства СВЧ.

E-mail: stepbystep000@ya.ru

Кетух Дмитрий Константинович, курсант Академии Федеральной службы охраны Российской Федерации, г. Орел, Россия. Автор 9 научных публикаций.

Область научных интересов: радиотехника, антенные системы, цифровая обработка сигналов, технологии параллельных вычислений.

*E-mail*: kdk\_hcc@mail.ru

Шевченко Вячеслав Андреевич, курсант Академии Федеральной службы охраны Российской Федерации, г. Орел, Россия. Автор 7 научных публикаций.

Область научных интересов: вычислительная электродинамика, цифровая обработка сигналов, антенны и устройства СВЧ, теория графов.

*E-mail*: sheff-slava@mail.ru

## Information about the Authors

Ivan S. Polyansky, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, member of the Academy of the Federal Guard Service of the Russian Federation, Oryol, Russia. Author of 152 scientific publications.

Research interests: mathematical modeling, dynamic systems, differential equations, optimization methods, optimal control, conformal mapping, computational electrodynamics, digital signal processing.

*E-mail*: van341@mail.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1282-1522

**Dmitry E. Stepanov**, member of the Academy of the Federal Guard Service of the Russian Federation, Oryol, Russia. Author of 32 scientific publications.

Research interests: mathematical modeling, optimization methods, computational electrodynamics, digital signal processing, antennas and microwave devices.

E-mail: stepbystep000@ya.ru

**Dmitry K. Ketoh**, cadet of the Academy of the Federal Guard Service of the Russian Federation, Oryol, Russia. Author of 9 scientific publications.

Research interests: radio engineering, antenna systems, digital signal processing, parallel computing technologies.

*E-mail*: kdk\_hcc@mail.ru.

**Vyacheslav A. Shevchenko**, cadet of the Academy of the Federal Guard Service of the Russian Federation, Oryol, Russia. Author of 7 scientific publications.

*Research interests*: computational electrodynamics, digital signal processing, microwave antennas and devices, graph theory.

E-mail: sheff-slava@mail.ru

## Неганов, В.А.

**Теория и применение устройств СВЧ: учебн. пособие для вузов** / В.А. Неганов, Г.П. Яровой; под ред. В.А. Неганова. – М.: Радио и связь, 2006. – 720 с.

В.А. Неганов, Г.П. Яровой
ТЕОРИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ УСТРОЙСТВ СВЧ
СС МОСКВА «РАДИО И СВЯЗЬ»

#### ISBN 5-256-01812-4

УДК 621.396.67 ББК 32.840 Н 41

В учебном пособии рассматриваются методы проектирования и конструктивной реализации устройств СВЧ: линий передачи различных видов, резонаторов, согласующих и трансформирующих устройств, фильтров, фазовращателей, аттенюаторов, тройниковых соединений, направленных ответвителей, различных мостовых соединений, ферритовых устройств (вентилей, циркуляторов, фазовращателей) и СВЧустройств на полупроводниковых диодах (умножителей, смесителей,

переключателей, выключателей). Приводятся примеры применения устройств СВЧ в радиосвязи, радиолокации, измерительной аппаратуре и т. д. В книгу вошел оригинальный материал, полученный авторами. Учебное пособие может использоваться как справочник по устройствам СВЧ.

Для специалистов в области теории и техники СВЧ, преподавателей вузов, докторантов, аспирантов, студентов старших курсов радиотехнического и радиофизического профиля.