

Интегральные представления в краевых задачах о расчете устройств СВЧ- и КВЧ-диапазонов

С.Б. Раевский, С.А. Капустин, А.С. Раевский

Нижегородский государственный технический университет имени Р.Е. Алексеева
603950, Россия, г. Нижний Новгород,
ул. Минина, 24

Аннотация – При электродинамическом расчете СВЧ(КВЧ)-устройств с использованием методов, приводящих к алгоритмам в незамкнутой форме, весьма полезным являются строгие интегральные соотношения (представления): лемма Лоренца, теорема взаимности, условие ортогональности собственных волн и т. д., с помощью которых осуществляется контроль получаемых результатов, улучшается их сходимости, а в ряде случаев расчет характеристик, не рассчитываемых без указанных представлений. Интегральные представления – это запись уравнений электродинамики (в любом унифицированном виде) и их решений в той или иной обобщенной форме, связывающих в целом электромагнитные поля в электродинамических структурах, описываемых краевыми задачами. Интегральные представления используются для контроля получаемых результатов; в ряде случаев позволяют получать аналитические решения; приводят к самосогласованным задачам, учитывающим обратное влияние поля излучения на первичные источники; позволяют получать априорную информацию о спектре возможных решений; решать присоединенные задачи как специфические задачи о возбуждении. Рассмотрение явления комплексного резонанса в этой статье показывает, что интегральные представления позволяют установить связь между несамосопряженностью и самосогласованностью краевых задач.

Ключевые слова – комплексные волны, комплексный резонанс, самосогласованная задача, дифференциальные уравнения, интегральные уравнения.

Введение

Интегральные представления в краевых задачах прикладной электродинамики включают в себя фундаментальные интегральные соотношения типа леммы Лоренца и закона сохранения энергии, функциональные связи между краевыми задачами на дифференциальных уравнениях с интегральными уравнениями, соотношения ортогональности собственных функций однородных краевых задач, представления полей в форме непрерывного спектра собственных функций, интегральные функциональные соотношения типа формулы Грина, математическую интерпретацию задач излучения, использующих принцип Гюйгенса – Френеля, и т. д.

Интегральные представления используются для контроля получаемых результатов (это особенно важно при формулировке краевых задач в незамкнутой форме); в ряде случаев (по крайней мере, в асимптотике) позволяют получать аналитические решения; приводят к самосогласованным задачам, учитывающим обратное влияние поля излучения на первичные источники; позволяют получать априорную информацию о спектре возможных решений; решать присоединенные задачи как специфические задачи о возбуждении и т. д.

Все это предопределяет значительный интерес к различным видам интегральных представлений в прикладной электродинамике.

1. Интегральные представления в несамосопряженных и самосогласованных краевых задачах расчета неоднородных электродинамических структур

Поля в однородных и кусочно-однородных направляющих структурах описываются краевыми задачами на однородном уравнении Гельмгольца. Граничные условия для полей волн экранированных направляющих структур с идеально проводящими поверхностями или волн открытых структур, поля которых удовлетворяют нулевому граничному условию на бесконечности, являются однородными. Если экранирующая поверхность импедансная или в спектре открытой структуры рассматриваются несобственные волны, то граничные условия становятся неоднородными. Такая задача на однородном уравнении Гельмгольца с частично неоднородными граничными условиями называется полуоднородной. Ветви решений полуоднородной и однородной краевых задач на плоскостях волновых чисел могут быть связаны друг с другом в том случае, когда они являются решениями интегрального уравнения Вольтерра, записываемого в виде

$$u(x) = \sum_{v=1}^n c_v \phi_v(x) - \lambda \int_a^x K(x, \xi) u(\xi) d\xi. \quad (1)$$

С использованием метода последовательных приближений для решения интегральных уравнений могут быть получены волновые числа круглых волноводов, однородно заполненных взаимной и невзаимной средой, с продольно намагниченным ферритовым стержнем, открытых диэлектрического, продольно намагниченного ферритового волноводов.

Переход от краевой задачи к интегральному уравнению позволяет на основе асимптотических решений последнего получить априорную информацию о спектре волн направляющей структуры, тем самым определить предмет поиска при решении дисперсионных уравнений.

В качестве примера рассмотрим задачу о расчете полного спектра волн открытого диэлектрического волновода (ОДВ). Функции, описывающие радиальную зависимость поля волн ОДВ, удовлетворяют уравнению Бесселя. В [1] показано, что краевая задача на этом уравнении при условии ограниченности поля по радиальной координате в общем случае в области $r > a_\delta$ имеет решение $u(\alpha, r)$, удовлетворяющее интегральному уравнению

$$u(\alpha, r) = e^{-i\alpha r} - \int_r^\infty \frac{\sin \alpha(r-r')}{\alpha} p(r') u(\alpha, r') dr', \quad (2)$$

где a_δ – значение r , соответствующее наперед заданному $\delta \geq 0$, для которого решение уравнения (2) при $r \rightarrow \infty$ имеет асимптотическую запись

$$u(\alpha, r) = e^{-i\alpha r} \quad (3)$$

в областях волнового числа α :

$$\begin{aligned} \text{первая область} - \operatorname{Im} \alpha \geq 0; |\alpha| \geq \delta; \\ \text{вторая область} - \operatorname{Im} \alpha \leq 0; \alpha \neq 0; \sigma(r)/|\alpha| < 1, \end{aligned} \quad (4)$$

откуда следует, что на критических частотах поверхностные волны могут переходить только в несобственные комплексные волны, а собственные комплексные волны могут существовать в областях частот, удаленных от критических частот поверхностных волн.

Расположение корней дисперсионного уравнения в плоскости поперечного сечения волнового числа α_2 внешней области (вне ДВ), соответствующее приведенному выше рассмотрению на основе интегрального уравнения (2), приведено на рис. 1.

Разрез на комплексной плоскости $\alpha_2 = \gamma_2 + i\delta_2$, которому соответствует $\beta_2 = 0$ ($\beta = \beta_1 + i\beta_2$ – продольное волновое число), проходит по отрицательной мнимой полуоси ($\delta_2 < 0$) и частично по действительной полуоси $\gamma_2 > 0$. Он разделяет два

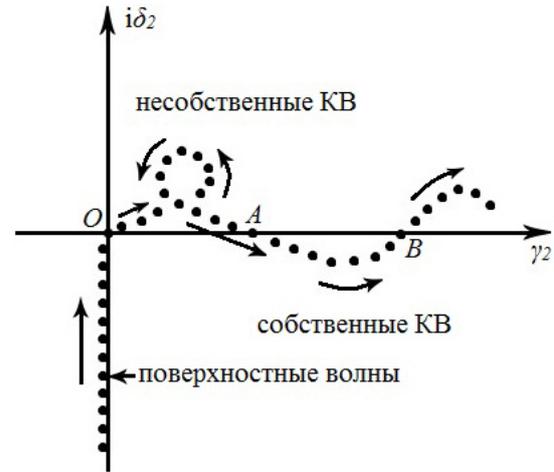


Рис. 1. Корни дисперсионного уравнения волн круглого открытого ДВ в плоскости волнового числа α_2
 Fig. 1. Roots of the dispersion equation for the waves of a circular open DW in the plane of the wave number α_2

листа римановой поверхности комплексной функции β . Решения дисперсионного уравнения, изображенные на рис. 1, находятся на верхнем листе римановой поверхности, которому условно соответствует $\beta_2 < 0$. Стрелки на рисунке указывают движение корней при уменьшении частоты.

В точке O, в соответствии с (4), поверхностные волны переходят в быстрые несобственные волны (вытекающие). Их поля, в соответствии с (3), нарастают по радиальной координате. В точке A вытекающие волны переходят в собственные комплексные волны, поля которых удовлетворяют условию излучения Зоммерфельда. В точке B собственные комплексные волны вновь переходят в вытекающие, которые затем (при уменьшении частоты) переходят в медленные несобственные волны. Таким образом, интервал AB, предсказанный на основе рассмотрения решения (3) интегрального уравнения и областей его существования, полностью соответствует получаемому из дисперсионного уравнения краевой задачи.

Рассмотренный пример наглядно интерпретирует возможность априорного исследования спектров волн направляющих структур на основе сопоставления краевых задач и интегральных уравнений Вольтерра с использованием их асимптотических решений.

Решения несамосопряженных краевых задач, соответствующие собственным КВ, демонстрируют самосогласованность этих задач. Действительно, природа собственных КВ объясняется распределенным разворотом потока мощности, в результате которого обратный поток мощности замыкается через источник и влияет на него. Возникает

замкнутый цикл, соответствующий самосогласованной задаче и приводящий к комплексному резонансу (КР). Таким образом, несамосопряженные краевые задачи, в которых образуется связь поля излучения с первичным источником, оказываются самосогласованными.

Интегральные представления оказываются полезными в задачах об излучении направляющих экранированных структур в открытое пространство, которые являются базовыми при построении систем проектирования апертурных антенн. Апертурные антенны – это антенны, излучающие с площади раскрыва, называемого апертурой. К таким антеннам относятся рупорные антенны, линзовые, зеркальные, волноводно-щелевые и т. д. По их излучающим поверхностям протекают электрические и магнитные токи высокой частоты (поверхностные токи). Апертурные антенны применяются главным образом в СВЧ- и КВЧ-диапазонах. Их линейные размеры много больше длины волны, что позволяет создавать остронаправленное излучение. Они находят широкое применение в радионавигации, радиоастрономии, в системах управления искусственными спутниками Земли и космическими кораблями, в тропосферных линиях связи.

При расчете поля излучения апертурной антенны определяют распределение поля на ее раскрыве. Каждый элемент площади раскрыва можно рассматривать как источник Гюйгенса – Френеля, который создает поле в точке наблюдения. Результирующее поле определяется путем суммирования полей, создаваемых в точке наблюдения всеми элементами поверхности раскрыва. При этом поля на поверхности раскрыва заменяются (согласно принципу Гюйгенса – Френеля) на эквивалентные поверхностные токи (электрические и магнитные [2]).

Строгость или нестрогость данного подхода к расчету поля излучения зависят от того, каким образом определяется распределение электромагнитного поля на раскрыве апертурной антенны. В большинстве случаев для этого используются методы геометрической оптики, когда не учитываются дифракционные явления на краях и внешних поверхностях раскрыва и обратное влияние поля излучения на распределение поля первичных источников. Более строгий анализ и экспериментальная проверка показывают [3], что приближенность определения первичного поля приводит к заметным ошибкам в расчете поля излучения в области боковых и задних лепестков диаграммы

направленности. Строгая теория антенн приводит [3] к интегральным уравнениям. При этом, как правило, поднимается вопрос самосогласованности задачи об излучении. Под самосогласованностью в большинстве случаев [4] понимают сведение задачи к сингулярному интегральному уравнению относительно функции тока на апертуре антенны, учитывающей влияние внешнего поля на распределение этого тока. Однако при этом в записи первичного поля учитывается ЭДС сторонних сил [4], что приводит к неоднородному интегральному уравнению (системе уравнений), что, вообще говоря, нарушает смысл самосогласованности задачи, так как в конечном итоге приводит к расчету поля излучения по заданным источникам. Самосогласованность в этом случае как таковая отсутствует. В строгом представлении самосогласованная задача – замкнутый цикл, содержащий обратную связь наподобие системы автогенератора. В результате наличия указанной обратной связи самосогласованная задача об излучении должна приводить к однородным интегральным уравнениям, то есть должна быть задачей на собственные функции и собственные значения. Последние являются решениями характеристического уравнения. Только на решениях этого уравнения получаются [5] нетривиальные решения краевой задачи об излучении.

Интегральные представления находят применение во внутренних задачах электродинамики. Широко используемыми методами расчета электродинамических структур являются метод частичных областей (МЧО) и различные импедансные методы [6]. При решении внутренних задач электродинамики, как правило, для представления полей в частичных областях используют дискретные спектры собственных функций этих областей. Однако это корректно только в тех случаях, когда для выделенных областей можно сформулировать краевые задачи Штурма – Лиувилля [7]. Если среди частичных областей, на которые разбивается электродинамическая структура, имеются такие, для которых нельзя поставить указанную краевую задачу Штурма – Лиувилля, нужно вводить непрерывный спектр собственных функций, то есть представлять поле в виде интегралов по волновым числам.

На рис. 2 приведены схематические изображения некоторых электродинамических структур, разбиение которых на частичные области не приводит к краевым задачам Штурма – Лиувилля.

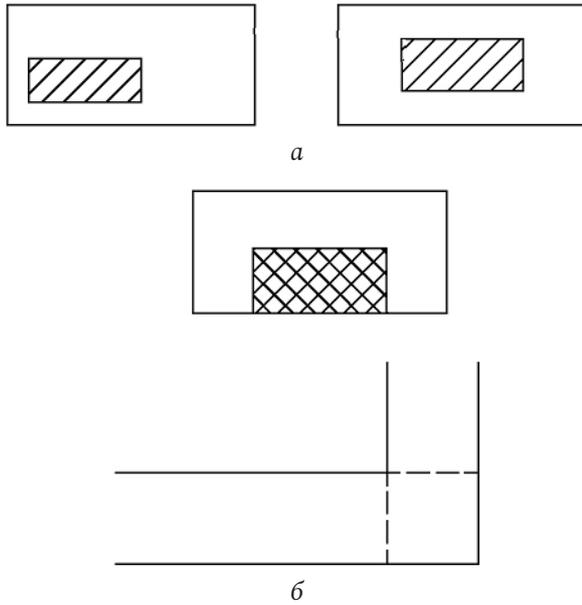


Рис. 2. Схематические изображения направляющих структур: а – прямоугольные волноводы с частичным регулярным диэлектрическим и металлическим заполнением; б – излом прямоугольного волновода
 Fig. 2. Schematic images of guiding structures: a – rectangular waveguides with partial regular dielectric and metal filling; b – break of a rectangular waveguide

Любое разбиение приведенных структур на частичные области приводит к краевым задачам со свободной границей, что не дает возможности сформулировать для них однородные краевые задачи с дискретными спектрами собственных функций. Области же хотя бы с одной свободной границей требуют введения непрерывного спектра, то есть интегрального представления поля, которое должно приводить к интегральным уравнениям (системам уравнений) относительно спектральных амплитуд. Только интегральное представление поля позволит корректно сформулировать краевые задачи. Впервые использование непрерывного спектра было осуществлено, по-видимому, при расчете параметров прямоугольных коаксиалов [8].

2. Самосогласованные задачи, приводящие к интегральным уравнениям

Основным признаком самосогласованной задачи является ее замкнутость, при которой первичные источники корректируются обратным воздействием на них вторичных источников. Такая задача ставится либо на дифференциальном, либо на интегральном уравнении (системе уравнений, в общем случае интегро-дифференциальных) и является задачей на собственные функции и собственные значения.

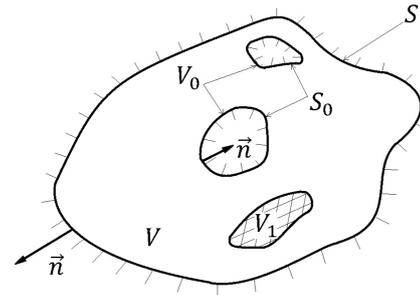


Рис. 3. Трехмерная область V
 Fig. 3. Three-dimensional region V

Сформулируем скалярную краевую задачу на уравнении Гельмгольца для трехмерной области V, изнутри ограниченной поверхностью S₀, снаружи – S. Скалярная функция ψ может описывать распределение электромагнитного поля в объеме V, удовлетворяя уравнению Гельмгольца

$$\Delta\psi + k_0^2\psi = 0 \quad (5)$$

и граничным условиям Дирихле, Неймана, Штурма – Лиувилля в замкнутом объеме. В (5) $k_0 = \omega/v$, где v – скорость распространения колебаний.

На рис. 3 поверхности S₀ ограничивают области проводимости; объем V₁ – область, заполненная диэлектрической средой.

Для многосвязной области V запишем [5] формулу Грина:

$$\int_{\bar{V}} (\psi LG - GL\psi) dV = \oint_{\bar{S}} \left(\psi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) d\bar{S}, \quad (6)$$

где $S = \bar{S} - S_0$; \bar{S} – суммарная проводящая поверхность, ограничивающая объем \bar{V} ; n – внешняя по отношению к области $\bar{V} = V - V_0$ нормаль; G – функция Грина, удовлетворяющая уравнению

$$LG = \Delta G - k^2 G = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \quad (7)$$

в котором \vec{r} – текущая координата, \vec{r}_0 – точка особенности функции Грина.

Используя (7) и свойство дельта-функции, получаем:

$$\psi(\vec{r}_0) = \oint_{\bar{S}} \left(\psi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) d\bar{S}. \quad (8)$$

Обозначая функцию поля ψ на поверхности S₀ как ψ₀ и удаляя поверхность S в бесконечность или задавая на ней нулевые граничные условия, переписываем (8) в виде

$$\psi(\vec{r}_0) = \oint_{S_0} \left(\psi_0 \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \psi_0}{\partial n} \right) d\bar{S}. \quad (9)$$

Положив $\vec{r}_0 = 0$, берем в качестве функции G функцию Грина свободного пространства:

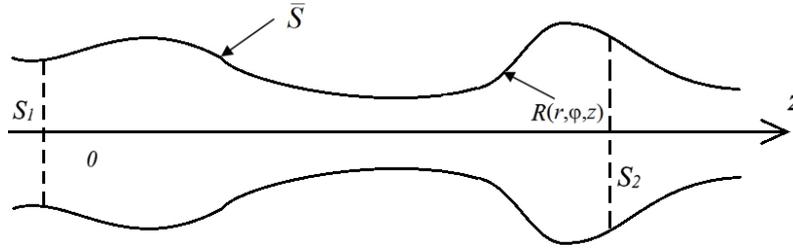


Рис. 4. Продольно нерегулярная направляющая структура
Fig. 4. Longitudinally irregular guiding structure

$$G = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r}.$$

При этом из (9) получаем выражение для функции поля $\psi(\vec{r})$ в произвольной точке пространства \bar{V} как интеграл от ψ_0 по поверхности, ограничивающей это пространство изнутри:

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S_0} \left(\psi_0 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) - \frac{\partial \psi_0}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) \right) d\bar{S}. \quad (10)$$

Выражение (10) – интеграл Гюйгенса – Кирхгофа. Положив $\vec{r} = \vec{r}|_{S_0}$, приходим к интегро-дифференциальному уравнению относительно функции ψ_0 на поверхности S_0 :

$$\psi_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S_0} \left(\psi_0 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) - \frac{\partial \psi_0}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) \right) d\bar{S}. \quad (11)$$

Оно является математической интерпретацией самосогласованной задачи по нахождению функции ψ в произвольной точке внутри области \bar{V} по распределению этой функции на поверхности, ограничивающей объем \bar{V} изнутри. Как видно из (11), самосогласованная задача приводит к однородному интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода, то есть является задачей на собственные функции и собственные значения, найдя которые, по формуле (10) можем определить функцию ψ в произвольной точке пространства, ограниченного поверхностями S и S_0 .

Формула (10) приводит к условию излучения:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \left(\psi_0 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) - \frac{\partial \psi_0}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) \right) = 0, \quad (12)$$

которое в антенных задачах позволяет однозначно определить поле излучения апертурных антенн.

3. Метод интегро-дифференциальных уравнений на основе интегрального представления леммы Лоренца

Интегральное представление леммы Лоренца является фундаментальным соотношением, позволяющим в чисто физической трактовке составлять

интегральные уравнения (системы уравнений) относительно распределения полей на поверхности направляющей структуры, формулировать задачи о возбуждении, записывать условия ортогональности в задачах дифракции.

Интегральная запись

$$\oint_S \{ [\bar{E}_1, \bar{H}_2] - [\bar{E}_2, \bar{H}_1] \} d\bar{S} = \int_V (\bar{j}_1^e \bar{E}_2 - \bar{j}_2^e \bar{E}_1 - \bar{j}_1^m \bar{H}_2 + \bar{j}_2^m \bar{H}_1) dV$$

леммы Лоренца связывает системы токов $\bar{j}_1^e, \bar{j}_1^m, \bar{j}_2^e, \bar{j}_2^m$ с полями \bar{E}_1, \bar{H}_1 и \bar{E}_2, \bar{H}_2 соответственно внутри отрезка направляющей структуры, ограниченного боковыми поверхностями S_1, S_2 , так что $S = S_0 + S_1 + S_2$. Объем V ограничен поверхностью S .

В случае однородных краевых задач интегральное представление леммы Лоренца приводит к записи условий ортогональности полей собственных волн (колебаний), позволяющей решать задачи о возбуждении и задачи дифракции. Таким образом, целый ряд фундаментальных интегральных представлений является следствием интегральной записи леммы Лоренца.

Сформулируем краевую задачу для пространства, ограниченного поверхностью \bar{S} , описываемой непрерывной функцией $R(r, \varphi, z)$, где r, φ, z – цилиндрические координаты, рис. 4. Проводящая поверхность \bar{S} образует направляющую структуру. Соответствующая поверхности \bar{S} продольная координата $z \in (-\infty, \infty)$. Внутри указанного пространства расположены источники:

$$\bar{j}_1^{e,m}, \bar{j}_2^{e,m}, \dots, \bar{j}_N^{e,m}, \quad (13)$$

которые создают, соответственно, поля:

$$\bar{E}_1, \bar{H}_1; \bar{E}_2, \bar{H}_2, \dots, \bar{E}_N, \bar{H}_N. \quad (14)$$

Таким образом, имеем N неоднородных краевых задач в пространстве, ограниченном поверхностью $S = \bar{S} + S_1 + S_2$, где \bar{S} – боковая поверхность выделенного объема, $S_{1,2}$ – торцевые поверхности (поперечные сечения волновода), ограничивающие с двух сторон объем V .

Источники (13) находятся в конечной области V , под которой можно понимать: продольно-нерегулярный волновод (в частности, периодически-нерегулярный); нерегулярный участок волноводного тракта; волноводный переход и т. п. Таким образом, имеем задачу о возбуждении поля множеством источников. Поле образуется совокупностью полей собственных волн, связанных нерегулярностями волновода и удовлетворяющих граничному условию:

$$\vec{E}_\tau \Big|_{\bar{S}} = 0, \quad (15)$$

и соответствующих собственным волнам рассматриваемого волновода. Поля, на которые не накладывается условие (15), удовлетворяют условию излучению на бесконечности.

Волны \vec{E}_i , \vec{H}_i могут быть как направляемыми волноводными волнами, так и волнами, излучаемыми в открытое пространство. При этом пространства, соответствующие различным краевым задачам, имеют одну общую область V , в которой распределены источники (13), создающие поля (14) то есть указанные пространства объединяются областью источников.

Поля первой категории (обозначим их как \vec{E}_k , \vec{H}_k), удовлетворяющие граничному условию (15), соответствуют собственным волнам нерегулярного экранированного волновода. Поля второй категории, удовлетворяющие условию излучения, на поверхности \bar{S} могут принимать любые конечные значения. Их обозначим как \vec{E}_n , \vec{H}_n . Поля \vec{E}_k , \vec{H}_k будем полагать искомыми решениями краевой задачи, поля \vec{E}_n , \vec{H}_n будем рассматривать как вспомогательные. Источники, создающие поля первой категории, обозначим как $\vec{j}_k^{e,m}$, источники создающие поля второй категории, обозначим как $\vec{j}_n^{e,m}$.

Для полей \vec{E}_k , \vec{H}_k и \vec{E}_n , \vec{H}_n в объеме V лемма Лоренца запишется как

$$\oint_S \{ [\vec{E}_k, \vec{H}_n] - [\vec{E}_n, \vec{H}_k] \} d\bar{S} = \int_V (\vec{j}_k^e \vec{E}_n - \vec{j}_n^e \vec{E}_k - \vec{j}_k^m \vec{H}_n + \vec{j}_n^m \vec{H}_k) dV. \quad (16)$$

При $S_{1,2} \rightarrow \pm\infty$ с учетом конечности площади поперечного сечения рассматриваемого нерегулярного волновода и граничного условия (15) уравнение (16) переписывается в виде

$$\int_{\bar{S}} [\vec{H}_k \vec{E}_n] d\bar{S} = \int_V (\vec{j}_k^e \vec{E}_n - \vec{j}_n^e \vec{E}_k - \vec{j}_k^m \vec{H}_n + \vec{j}_n^m \vec{H}_k) dV.$$

В неограниченном пространстве ($\bar{S} \rightarrow \infty$) источники $\vec{j}_k^{e,m}$ создадут поля расходящихся сферических волн, удовлетворяющих условию излучения, которые на поверхности $\bar{S} \rightarrow \infty$ обращаются в нуль. Обозначив эти поля как \vec{E}_k^0 , \vec{H}_k^0 , уравнение (17) переписываем в виде

$$\int_{V_\infty} (\vec{j}_k^e \vec{E}_n - \vec{j}_n^e \vec{E}_k^0 - \vec{j}_k^m \vec{H}_n + \vec{j}_n^m \vec{H}_k^0) dV = 0. \quad (18)$$

Поскольку в (18) интегрирование производится по месту расположения токов, интеграл по бесконечному объему в (18) тождественно совпадает с интегралом по конечной области источников, т. е. в (17) $\int_V = \int_{V_\infty}$.

Исключая из (17) с помощью (18) токи $\vec{j}_k^{e,m}$, получаем:

$$\int_{\bar{S}} [\vec{H}_k \vec{E}_n] d\bar{S} = \int_{V_\infty} [\vec{j}_n^e (\vec{E}_k^0 - \vec{E}_k) - \vec{j}_n^m (\vec{H}_k^0 - \vec{H}_k)] dV. \quad (19)$$

Выбрав в качестве источников $\vec{j}_n^{e,m}$ элементарные диполи:

$$\vec{j}_n^{e,m} = \vec{I}_n^{e,m} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{j_n^{e,m}}),$$

где $\vec{r}_{j_n^{e,m}}$ – координаты вспомогательных источников, и воспользовавшись свойством δ -функции, из (19) получаем:

$$\int_{\bar{S}} [\vec{H}_k \vec{E}_n] d\bar{S} = I_n^e \left[E_k^0(\vec{r}_{j_n^e}) - E_k(\vec{r}_{j_n^e}) \right] - I_n^m \left[H_k^0(\vec{r}_{j_n^m}) - H_k(\vec{r}_{j_n^m}) \right]. \quad (20)$$

В (20) $E_k^0(\vec{r}_{j_n^e})$, $E_k(\vec{r}_{j_n^e})$, $H_k^0(\vec{r}_{j_n^m})$, $H_k(\vec{r}_{j_n^m})$ – проекции векторов на направления элементарных диполей $\vec{j}_n^{e,m}$.

Поля \vec{E}_k , \vec{H}_k в (20), удовлетворяющие граничным условиям:

$$\vec{E}_\tau \Big|_{\bar{S}} = 0; \quad H_n \Big|_{\bar{S}} = 0 \quad (21)$$

(H_n – нормальная составляющая),

можно рассматривать как поля собственных волн в волноводе с идеально проводящей экранирующей поверхностью \bar{S} . В решаемой задаче эти поля будут искомыми полями нерегулярного волновода. Поля: \vec{E}_k^0 , \vec{H}_k^0 , \vec{E}_n в (20) являются вспомогательными. Они создаются диполями $\vec{j}_k^{e,m}$ в неограниченном пространстве и стремятся к нулю при удалении от источников как поля расходящихся сферических волн.

Вспомогательные излучатели $\vec{j}_n^{e,m}$ расположим в сечении $z=0$, а источники $\vec{j}_k^{e,m}$, создающие поля собственных волн рассматриваемого волновода, отнесем в сечение $z \rightarrow -\infty$. Поскольку \vec{E}_k^0 , \vec{H}_k^0 – поля сферических волн, создаваемых источниками, отнесенными в бесконечность, в месте расположения диполей $\vec{j}_n^{e,m}$ в сечении $z=0$ в силу неравенств:

$$E_k^0(\vec{r}_{j_n^{e,m}}) \ll E_k(\vec{r}_{j_n^{e,m}}); \quad H_k^0(\vec{r}_{j_n^{e,m}}) \ll H_k(\vec{r}_{j_n^{e,m}}),$$

ими в уравнении (20) можно пренебречь. Тогда это уравнение переписывается:

$$\int_{\bar{S}} [\vec{H}_k \vec{E}_n] d\bar{S} = -I_n^e E_k(\vec{r}_{j_n^e}) + I_n^m H_k(\vec{r}_{j_n^m}). \quad (22)$$

Полученное уравнение (22) является интегральным (в общем случае интегро-дифференциальным) уравнением относительно полей \vec{E}_k , \vec{H}_k . В тех случаях, когда вводится один вспомогательный источник (одного типа), получаем уравнения:

$$\int_{\bar{S}} [\vec{H}_k \vec{E}_n] d\bar{S} = -I_n^e E_k(\vec{r}_{j_n^e}); \quad (23)$$

$$\int_{\bar{S}} [\vec{H}_k \vec{E}_n] d\bar{S} = I_n^m H_k(\vec{r}_{j_n^m}).$$

Амплитуды вспомогательных источников, входящие в обе части уравнений (23), в процессе решения уравнений сокращаются, поскольку $\vec{E}_n \sim I_n^{e,m}$.

Согласно задаче о возбуждении волн экранированного волновода, источники $\vec{j}_k^{e,m}$ создают в общем случае бесконечные наборы собственных волн, поэтому поля \vec{E}_k и \vec{H}_k следует представлять в виде

$$\vec{E}_k = \sum_{v=0}^{\infty} A_v \vec{E}_v; \quad \vec{H}_k = \sum_{v=0}^{\infty} B_v \vec{H}_v \quad (24)$$

для каждого фиксированного « k », то есть для каждого источника.

Используя метод коллокаций, алгебраизацию уравнений (23) можно производить, подставляя в них поля в виде (24) и записывая их в точках вспомогательных источников, число которых берется в соответствии с числом членов в суммах (24). Поля \vec{E}_v , \vec{H}_v в каждом сечении z записываются как поля волновода сравнения, соответствующего этому сечению. Суммирование в (24) ведется по полям волновода сравнения толщиной dz , удовлетворяющим в пределах этого волновода граничным условиям (21). Это обеспечивает выполнение граничных условий в целом. Непрерывность поля по продольной координате обеспечивается самими интегральными уравнениями (23). Каждому ис-

точнику $\vec{j}_k^{e,m}$ соответствует свой набор полей (24), определяющий k -ю волну нерегулярного волновода. Номер собственной волны нерегулярного волновода определяется порядковым номером корня трансцендентного дисперсионного уравнения.

Метод интегро-дифференциальных уравнений на основе интегрального представления леммы Лоренца является универсальным, пригодным для расчета как неограниченных продольно-нерегулярных экранированных направляющих структур, так и отдельных нерегулярных (плавных и скачкообразных) участков волноводного тракта, в том числе и неоднородно заполненных.

4. Самосогласованная задача о комплексном резонансе на основе интегрального представления леммы Лоренца

В поперечно-неоднородных (слоистых) направляющих электродинамических структурах, описываемых несамосопряженными электродинамическими операторами, могут существовать, даже в отсутствие диссипации энергии, волны с комплексными волновыми числами – комплексные волны (КВ). Источники, описываемые действительными функциями координат, возбуждают, в частности, в двухслойном круглом экранированном волноводе по обе стороны от себя по две комплексно-сопряженные волны с противоположно направленными фазовыми скоростями. Это приводит к возникновению стоячей волны, поле которой локализовано вблизи источника. Поскольку отмеченное явление обнаруживает резонансные свойства не на одной частоте, как при обычном резонансе, а во всем диапазоне существования КВ, оно классифицировано как «комплексный резонанс» (КР).

Поскольку комплексный резонанс возникает в результате взаимодействия двух комплексных волн, приводящего к образованию специфического (локализованного вблизи источника) поля стоячей волны, первостепенным является вопрос ортогональности этих волн. Решение его позволит определить пары комплексных волн, образующих указанное поле стоячей волны, и выяснить условия возникновения комплексного резонанса. Кроме того, поскольку в реальных условиях комплексный резонанс наблюдается в ограниченных по длине отрезках направляющих структур, необходимо выяснить вопрос о взаимодействии комплексных волн, приводящему к возникновению

взаимных потоков мощности, нарушающих условия существования комплексного резонанса.

Как известно [9], существование в плоскостях поперечных волновых чисел $(\alpha_{1,2})$ пары комплексно сопряженных решений дисперсионного уравнения волн круглого двухслойного экранированного волновода обеспечивает существование в этом волноводе четырех комплексных волн, которые условно можно представить в виде:

$$\begin{aligned} e^{-i(\beta_1+i\beta_2)z} & \text{ (I),} \\ e^{i(\beta_1-i\beta_2)z} & \text{ (II),} \\ e^{-i(\beta_1-i\beta_2)z} & \text{ (III),} \\ e^{i(\beta_1+i\beta_2)z} & \text{ (IV),} \end{aligned} \quad (25)$$

где $\beta_1 > 0$, $\beta_2 < 0$, z – продольная координата направляющей структуры.

Являясь собственными волнами экранированного волновода, комплексные волны (25) удовлетворяют условию ортогональности, следующему из леммы Лоренца

$$\int_S \left\{ [\vec{E}_n, \vec{H}_k] - [\vec{E}_k, \vec{H}_n] \right\} d\vec{S} = \begin{cases} N, & k = -n; \\ 0, & k \neq -n, \end{cases} \quad (26)$$

где S – поперечное сечение волновода; n и k – индексы волн (25).

Понимая в (25) под \vec{E}_n и \vec{H}_n поля комплексной волны I, а под \vec{E}_k и \vec{H}_k – поля волны II и учитывая связи этих полей:

$$\vec{E}_n = \vec{E}_k; \quad \vec{H}_n = -\vec{H}_k, \quad (27)$$

которые являются следствием комплексной сопряженности решений $(\alpha_{1,2})$ дисперсионного уравнения, соответствующих указанным волнам, получаем:

$$\operatorname{Re} \int_S [\vec{E}_n, \vec{H}_n^*] d\vec{S} = 0. \quad (28)$$

Аналогичным образом из совместного рассмотрения волн I и III (им также соответствуют комплексно сопряженные в плоскостях поперечных волновых чисел $\alpha_{1,2}$ решения дисперсионных уравнений) получаем:

$$\operatorname{Im} \int_S [\vec{E}_n, \vec{H}_n^*] d\vec{S} = 0. \quad (29)$$

Равенства (28) и (29) демонстрируют известный [1] факт: комплексные волны не переносят мощности в среднем за период, то есть

$$\int_S [\vec{E}_n, \vec{H}_n^*] d\vec{S} = 0, \quad (30)$$

где под \vec{E}_n и \vec{H}_n понимаются поля любой из комплексных волн (25).

С учетом (27) из равенства (30) следует, что поля комплексных волн I и II удовлетворяют математическому условию ортогональности:

$$\int_S [\vec{E}_n, \vec{H}_k^*] d\vec{S} = 0, \quad (31)$$

из которого следует отсутствие взаимного потока мощности этих комплексных волн.

Таким образом, можно сделать вывод, что, поскольку взаимный поток мощности в среднем за период комплексных волн I и II равен нулю, взаимодействие этих волн, возбужденных с одинаковыми амплитудами, должно приводить к образованию поля стоячей волны, которое, в свою очередь, приводит к возникновению комплексного резонанса.

Теперь рассмотрим две волны I и IV, которым на комплексных плоскостях поперечных волновых чисел $\alpha_{1,2}$ внутренней и внешней областей двухслойного волновода соответствуют одни и те же точки, являющиеся изображениями решений дисперсионного уравнения. Указанные волны описываются продольными компонентами векторов Герца:

$$\Pi_z^{e,m} = \psi^{e,m}(r, \varphi) e^{\pm i\beta z}, \quad (32)$$

где $\beta = \beta_1 + i\beta_2$, а знаки «-» и «+» соответствуют волнам I и IV.

Для продольных компонент комплексных векторов Умова – Пойтинга волн (32) получаются выражения:

$$\begin{aligned} S_{z1,2} = & \left\{ \frac{|\beta|^2}{r} \left(\frac{\partial \psi^e}{\partial r} \frac{\partial \psi^{m*}}{\partial \varphi} - \frac{\partial \psi^e}{\partial \varphi} \frac{\partial \psi^{m*}}{\partial r} \right) + \right. \\ & + \frac{\varepsilon \mu \omega^2}{r} \left(\frac{\partial \psi^m}{\partial \varphi} \frac{\partial \psi^{e*}}{\partial r} - \frac{\partial \psi^m}{\partial r} \frac{\partial \psi^e}{\partial \varphi} \right) \pm \\ & \pm \omega \varepsilon \beta \left(\left| \frac{\partial \psi^e}{\partial r} \right|^2 + \frac{1}{r^2} \left| \frac{\partial \psi^e}{\partial \varphi} \right|^2 \right) \pm \\ & \left. \pm \omega \mu \beta^* \left(\left| \frac{\partial \psi^m}{\partial r} \right|^2 + \frac{1}{r^2} \left| \frac{\partial \psi^m}{\partial \varphi} \right|^2 \right) \right\} e^{-2\beta_2 z}, \end{aligned} \quad (33)$$

где индекс «1» и знак «+» соответствуют волне I, индекс «2» и знак «-» – волне IV.

Продольная компонента взаимного комплексного вектора Умова – Пойтинга волн I и IV с учетом того, что

$$\frac{\partial \psi^{e,m(IV)}}{\partial \varphi} = - \frac{\partial \psi^{e,m(I)}}{\partial \varphi},$$

запишется в виде:

$$\begin{aligned}
S_{z1,2} = & \left\{ \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{r} \left(\frac{\partial\Psi^m}{\partial\varphi} \frac{\partial\Psi^{e*}}{\partial r} + \frac{\partial\Psi^m}{\partial r} \frac{\partial\Psi^{e*}}{\partial\varphi} \right) - \right. \\
& - \frac{|\beta|^2}{r} \left(\frac{\partial\Psi^e}{\partial\varphi} \frac{\partial\Psi^{m*}}{\partial r} - \frac{\partial\Psi^e}{\partial r} \frac{\partial\Psi^{m*}}{\partial\varphi} \right) + \\
& + \omega\varepsilon\beta \left(\left| \frac{\partial\Psi^e}{\partial r} \right|^2 + \frac{1}{r^2} \left| \frac{\partial\Psi^e}{\partial\varphi} \right|^2 \right) - \\
& \left. - \omega\mu\beta^* \left(\left| \frac{\partial\Psi^m}{\partial r} \right|^2 + \frac{1}{r^2} \left| \frac{\partial\Psi^m}{\partial\varphi} \right|^2 \right) \right\} e^{-2i\beta_1 z}.
\end{aligned} \tag{34}$$

Обозначив

$$\frac{\partial\Psi^e}{\partial r} \frac{\partial\Psi^{m*}}{\partial\varphi} = a + ib; \quad \frac{\partial\Psi^e}{\partial\varphi} \frac{\partial\Psi^{m*}}{\partial r} = c + id;$$

$$\omega \int_S \varepsilon \left(\left| \frac{\partial\Psi^e}{\partial r} \right|^2 + \frac{1}{r^2} \left| \frac{\partial\Psi^e}{\partial\varphi} \right|^2 \right) dS = x;$$

$$\omega \int_S \mu \left(\left| \frac{\partial\Psi^m}{\partial r} \right|^2 + \frac{1}{r^2} \left| \frac{\partial\Psi^m}{\partial\varphi} \right|^2 \right) dS = y$$

и предположив, что

$$\int_S S_{z1,2} dS = 0; \tag{35}$$

$$\int_S S_{z1,2} dS = 0, \tag{36}$$

получаем две системы линейных алгебраических уравнений относительно x и y :

$$x + y = -\frac{1}{\beta_1} \int_S \frac{a-c}{r} \left(\varepsilon\mu\omega^2 + |\beta|^2 \right) dS; \tag{37}$$

$$x - y = \frac{1}{\beta_2} \int_S \frac{b-d}{r} \left(\varepsilon\mu\omega^2 - |\beta|^2 \right) dS$$

из уравнения (35) и

$$x - y = -\frac{1}{\beta_1} \int_S \frac{a+c}{r} \left(\varepsilon\mu\omega^2 - |\beta|^2 \right) dS; \tag{38}$$

$$x + y = \frac{1}{\beta_2} \int_S \frac{b+d}{r} \left(\varepsilon\mu\omega^2 + |\beta|^2 \right) dS$$

из уравнения (36).

В общем случае системы уравнений (37) и (38) несовместны. Поскольку равенство (35) для комплексных волн является доказанным и физически обоснованным [9], из несовместности систем (37) и (38) следует некорректность предположения (36). Таким образом, предположение о равенстве нулю взаимного потока мощности комплексных волн I и IV в общем случае неправомерно. В результате

можно заключить, что взаимодействие двух комплексных собственных волн любой направляющей структуры, которым на комплексных плоскостях $\alpha_{1,2}$ соответствует одно и то же решение дисперсионного уравнения, может привести к возникновению потока мощности, среднего за период, отличного от нуля. В этом отношении комплексные волны I и IV оказываются подобными обычным реактивно затухающим волнам запредельного волновода.

На основании проведенного рассмотрения можно сделать вывод, что в ограниченных по продольной оси отрезках слоистых направляющих структур взаимодействие комплексной волны, возбуждаемой источником, с комплексной волной, возникающей за счет отражения от конца отрезка волновода, может нарушить режим стоячей волны, образующей комплексный резонанс. В результате в реальной ситуации комплексный резонанс не проявляет идеальных свойств, соответствующих бесконечной по продольной оси направляющей структуре. В частности, полоса частот, соответствующая комплексному резонансу, сужается по сравнению с полосой существования комплексных волн. В верхнем участке диапазона сужение происходит из-за возбуждения комплексных волн на концах отрезка волновода, в нижнем – из-за уменьшения (вследствие большого затухания) запасенной в объеме энергии.

Рассмотрение задачи, описывающей КР с использованием интегральных представлений, позволяет утверждать, что это явление требует обязательного присутствия источника, через который замыкаются прямой и обратный потоки мощности, совместное существование которых и обеспечивает возникновение резонансного явления.

Заключение

Таким образом, использование интегральных представлений электромагнитных полей в краевых задачах прикладной электродинамики, связанных с расчетом СВЧ- и КВЧ-устройств, способствует совершенствованию методов решения несамосопряженных краевых задач, к которым, как правило, сводится электродинамический расчет подавляющего большинства функциональных узлов СВЧ. Указанные представления можно разделить на две большие категории: естественно существующие и интерпретирующие физические законы, например лемма Лоренца и теорема взаимности, и получаемые искусственно, например

переходом от краевых задач на дифференциальных уравнениях к интегральным уравнениям, введением непрерывных спектров собственных функций частичных областей. На примере рассмотрения явления комплексного резонанса показано, что интегральные представления позволяют установить связь между несамосопряженностью и самосогласованностью краевых задач.

Список литературы

1. Раевский А.С. Электродинамика направляющих и резонансных структур, описываемых несамосопряженными краевыми задачами: дис. ... докт. физ.-мат. наук. Самара, 2004. 450 с.
2. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988. 440 с.
3. Каценеленбаум Б.З. Высокочастотная электродинамика. М.: Наука, 1966. 240 с.
4. Неганов В.А., Лемжин М.И. Сингулярное обобщенное уравнение Халлена для электрического вибратора // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2001. Т. 4, № 1. С. 40–43.
5. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.
6. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974. 327 с.
7. Белов Ю.Г. Расчет критических частот и фазовой постоянной в эллиптическом волноводе с синусоидальной гофрой // Изв. вузов СССР Сер. Радиоэлектроника. 1977. Т. 20, № 2. С. 114–118.
8. Каценеленбаум Б.З. Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами. М.: АН СССР, 1961. 213 с.
9. Веселов Г.И., Раевский С.Б. Слоистые металлодиэлектрические волноводы. М.: Радио и связь, 1988. 246 с.

References

1. Raevsky A.S. *Electrodynamics of Guiding and Resonant Structures Described by Non-Self-Adjoint Boundary Value Problems*: Dokt. fiz.-mat. sci. diss., Samara, 2004, 450 p. (In Russ.)
2. Vajnshtejn L.A. *Electromagnetic Waves*. Moscow: Radio i svjaz', 1988, 440 p. (In Russ.)
3. Katsenelenbaum B.Z. *High Frequency Electrodynamics*. Moscow: Nauka, 1966, 240 p. (In Russ.)
4. Neganov V.A., Lemzhin M.I. Singular generalized Hallen equation for an electric vibrator. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2001, vol. 4, no. 1, pp. 40–43. (In Russ.)
5. Najmark M.A. *Linear Differential Operators*. Moscow: Nauka, 1969, 526 p. (In Russ.)
6. Mittra R., Li S. *Analytical Methods of the Theory of Waveguides*. Moscow: Mir, 1974, 327 p. (In Russ.)
7. Belov Ju.G. Calculation of critical frequencies and phase constant in an elliptical waveguide with a sinusoidal corrugation. *Izv. vuzov SSSR Ser. Radioelektronika*, 1977, vol. 20, no. 2, pp. 114–118. (In Russ.)
8. Katsenelenbaum B.Z. *Theory of Irregular Waveguides with Slowly Varying Parameters*. Moscow: AN SSSR, 1961, 213 p. (In Russ.)
9. Veselov G.I., Raevsky S.B. *Layered Metal-Dielectric Waveguides*. Moscow: Radio i svjaz', 1988, 246 p. (In Russ.)

Physics of Wave Processes and Radio Systems 2020, vol. 23, no. 4, pp. 8–18

DOI 10.18469/1810-3189.2020.23.4.8-18

Received 30 October 2020
Accepted 27 November 2020

Integral representations in boundary-value problems on calculation of devices of microwave and EHF bands

Sergey B. Raevsky, Sergey A. Kapustin, Alexey S. Raevsky

Nizhny Novgorod State Technical University named after R.E. Alekseev
24, Minin Street,
Nizhny Novgorod, 603950, Russia

Abstract – In the electrodynamic calculation of microwave (EHF) devices using methods that lead to algorithms in an open form, strict integral relations (representations) are very useful: Lorentz lemma, reciprocity theorem, orthogonality condition for eigenwaves, etc. of the results obtained, their convergence improves, and in some cases the calculation of characteristics that cannot be calculated without the indicated representations. Integral representations are a record of the equations of electrostatics (in any unified form) and their solutions in one or another generalized form, linking in general the electromagnetic fields in electrodynamic structures described by boundary value problems. Integral views are used to control the results obtained; in some cases, they allow obtaining analytical solutions; lead to self-consistent problems that take into account the reverse effect of the radiation field on the primary sources; allow obtaining a priori information about the spectrum of possible solutions; solve

associated problems as specific problems of arousal. Consideration of the phenomenon of complex resonance in this work shows that integral representations make it possible to establish a connection between non-self-adjointness and self-consistency of boundary value problems.

Keywords – complex waves, complex resonance, self-consistent problem, differential equations, integral equations

Информация об авторах

Раевский Сергей Борисович, 1941 г. р., доктор технических наук, профессор кафедры физики и техники оптической связи Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева.

Область научных интересов: прикладная электродинамика, техника СВЧ-, КВЧ- и оптического диапазонов.

E-mail: physics@nntu.ru

Капустин Сергей Андреевич, 1994 г. р., аспирант кафедры физики и техники оптической связи Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева.

Область научных интересов: прикладная электродинамика, техника СВЧ-, КВЧ- и оптического диапазонов.

E-mail: physics@nntu.ru, kapustin_1994@mail.ru

Раевский Алексей Сергеевич, 1968 г. р., доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой физики и техники оптической связи Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева.

Область научных интересов: электродинамика, техника СВЧ-, КВЧ- и оптического диапазонов.

E-mail: physics@nntu.ru

Information about the Authors

Sergey B. Raevsky, b. 1941, Doctor of Technical Sciences, professor of the Department of Physics and Technology of Optical Communication, Nizhny Novgorod State Technical University named after R.E. Alekseev, Nizhny Novgorod, Russia.

Research interests: applied electrodynamics, microwave, EHF and optical ranges.

E-mail: physics@nntu.ru

Sergey A. Kapustin, b. 1994, post-graduate student of the Department of Physics and Technology of Optical Communication, Nizhny Novgorod State Technical University named after R.E. Alekseev, Nizhny Novgorod, Russia.

Research interests: applied electrodynamics, microwave technology, EHF and optical bands.

E-mail: physics@nntu.ru, kapustin_1994@mail.ru

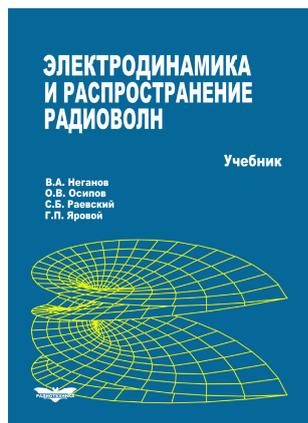
Alexey S. Raevsky, b. 1968, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, head of the Department of Physics and Technology of Optical Communication, Nizhny Novgorod State Technical University named after R.E. Alekseev, Nizhny Novgorod, Russia.

Research interests: electrodynamics, microwave technology, EHF and optical ranges.

E-mail: physics@nntu.ru

Неганов, В.А.

Электродинамика и распространение радиоволн: учебник / В.А. Неганов [и др.]; под ред. В.А. Неганова и С.Б. Раевского. – Изд. 4-е, доп. и перераб. – М.: Радиотехника, 2009. – 744 с.



ISBN 978-5-88070-154-4

УДК 537.87(075.3)

ББК 22.3

Н 41

Книга написана активно работающими в области электродинамики учеными. Излагаются теория электромагнитного поля с акцентом на радиотехническую электродинамику и анализ волновых процессов; рассматриваются отражение и преломление волн, излучение и дифракция; описываются основные закономерности распространения электромагнитных волн в различных безграничных средах (изотропных, анизотропных, диспергирующих, неоднородных), в направляющих и резонансных структурах, в природных условиях. Обсуждаются методы математического моделирования в электродинамике, опирающегося на применение ЭВМ.

Отличительной особенностью книги является обсуждение современных проблем электродинамики: расчет электромагнитных волн в ближних зонах излучающих структур (самосогласованный метод расчета), комплексных волн в волноведущих структурах и др.

Предназначается для студентов радиотехнических и радиофизических специальностей вузов, а также инженеров-радиотехников и радиофизиков.