

## Перепутывание атомов, индуцированное тепловым шумом при наличии начальной атомной когерентности

Е.К. Башкиров 

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева  
443086, Россия, г. Самара,  
Московское шоссе, 34

*Аннотация* – В настоящей статье автор исследовал динамику перепутывания двух дипольно связанных естественных или искусственных двухуровневых атомов (кубитов), нерезонансно взаимодействующих с интенсивным одномодовым тепловым полем резонатора. Найдено точное решение квантового уравнения Ливилля для полной матрицы плотности системы «два атома + мода поля» для когерентного начального состояния атомов в представлении «одетых состояний». Полная матрица плотности системы использована для вычисления двухатомной редуцированной матрицы плотности и вычисления количественного критерия перепутывания двухуровневых атомов – отрицательности. Результаты компьютерного моделирования временной зависимости отрицательности показали, что в случае модели с нерезонансным взаимодействием наличие начальной атомной когерентности приводит к существенному уменьшению максимальной степени перепутывания атомов, в отличие от модели с резонансным взаимодействием атомов и поля. Для резонансной модели, напротив, включение начальной атомной когерентности приводит к существенному увеличению степени перепутывания атомов.

*Ключевые слова* – двухуровневые атомы, расстройка, диполь-дипольное взаимодействие, тепловое поле, атомная когерентность, перепутывание атомов, отрицательность, управление перепутыванием.

### Введение

Описание динамики кубитов, взаимодействующих с электромагнитными полями, является одной из наиболее актуальных проблем современной физики квантовых вычислений [1]. Такие системы активно изучаются как с теоретической, так и с экспериментальной точек зрения в одноатомных мазерах и лазерах, ионах в резонаторах и магнитных ловушках, сверхпроводящих системах на джозефсоновских переходах, квантовых точках [2]. Исследования таких физических систем позволили создать прообразы квантовых компьютеров, работающих пока на десятках кубитов. Дальнейший прогресс в данной области требует исследования как новых физических устройств, которые можно использовать в качестве логических элементов квантовых компьютеров, так и наиболее оптимальных режимов работы таких систем, в том числе наиболее эффективных схем генерации и контроля перепутывания состояний кубитов, а также особенностей их релаксации. Для приложений в физике квантовых вычислений нужны максимально перепутанные чистые состояния с достаточно большим временем жизни, однако в реальных условиях квантовые системы всегда взаимодействуют с окружением. Такое взаимодействие обычно приводит к декогерентности, так что исследуемая система эволюционирует в сме-

шанное перепутанное (сепарабельное) состояние, которое оказывается непригодным для целей квантовых вычислений. Поэтому с практической точки зрения основная задача при получении и использовании атомных перепутанных состояний заключается в том, чтобы минимизировать влияние шума. Недавно была высказана идея о том, что в некоторых случаях диссипация и шум могут, напротив, являться источником перепутывания [3]. В частности, была показана возможность генерации перепутывания атомных систем в резонаторах, индуцированных тепловым шумом [4–8].

В работе [4] было показано, что одномодовый тепловой шум может индуцировать атом-атомное перепутывание в системе двух двухуровневых атомов в идеальном резонаторе. Позднее аналогичное поведение было обнаружено и для атомов с многофотонными переходами [5]. При этом было показано, что при двухфотонном взаимодействии атомов с тепловым полем степень перепутывания атомных состояний может значительно превосходить соответствующую величину для однофотонного взаимодействия. Позднее в целом ряде работ исследовались особенности генерации атомного перепутывания в различных обобщениях двухатомной модели Тависа – Каммингса для резонаторного поля в тепловом состоянии. Недавно на примере системы двух атомов, резонансно взаимодействующих с одномодовым

тепловым полем [6], было показано, что степень перепутывания атомов сильно зависит от их начального состояния. Обнаружено, что при наличии атомной когерентности степень атомного перепутывания может заметно возрасти и что степень атомного перепутывания можно управлять, изменяя относительные фазы и амплитуды поляризованных атомов. Было также показано, что наличие диполь-дипольного взаимодействия кубитов может существенно увеличить степень их перепутывания [7; 8].

В настоящей статье автор исследует влияние начальной атомной когерентности и диполь-дипольного взаимодействия и атомной когерентности на перепутывание в случае нерезонансного взаимодействия кубитов с полем одномодового резонатора в тепловом состоянии.

## 1. Модель и ее точное решение

Рассмотрим два идентичных кубита (ридберговские атомы, сверхпроводящие кубиты с джозефсоновскими переходами, примесные атомные или ядерные спины, квантовые точки и т. д.) с частотой перехода  $\omega_0$ , нерезонансно взаимодействующих с выделенной модой электромагнитного поля идеального резонатора с частотой  $\omega$ . Учтем также прямое диполь-дипольное взаимодействие между кубитами. Тогда в системе отсчета, вращающейся с частотой моды поля  $\omega$ , гамильтониан такой системы можно представить в виде

$$H = \hbar\delta\sigma_1^z + \hbar\delta\sigma_2^z + \hbar g \sum_{i=1,2} (\sigma_i^+ a + a^+ \sigma_i^-) + \hbar J (\sigma_1^+ \sigma_2^- + \sigma_1^- \sigma_2^+), \quad (1)$$

где  $\sigma_i^z$  – оператор инверсии для  $i$  ( $i=1,2$ );  $\sigma_i^+ = |+\rangle_i \langle -|$  и  $\sigma_i^- = |-\rangle_i \langle +|$  – операторы перехода между возбужденным  $|+\rangle_i$  и невозбужденным  $|-\rangle_i$  состояниями  $i$ -го кубита ( $i=1,2$ );  $a^+$  и  $a$  – операторы рождения и уничтожения фотонов резонаторной моды;  $g$  – константа кубит-фотонного взаимодействия;  $\delta$  – параметр расстройки, равный  $\delta = \omega_0 - \omega$ , и  $J$  – параметр прямого диполь-дипольного взаимодействия кубитов.

В качестве начальных состояний атомов выберем когерентные состояния вида

$$|\Psi_1(0)\rangle = \cos\theta_1 |+\rangle + e^{i\varphi_1} \sin\theta_1 |-\rangle,$$

$$|\Psi_2(0)\rangle = \cos\theta_2 |+\rangle + e^{i\varphi_2} \sin\theta_2 |-\rangle,$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – относительные фазы возбужденного и невозбужденного состояний кубитов, а  $\theta_1$  и

$\theta_2$  – параметры, определяющие начальную поляризацию кубитов. В качестве начального состояния поля резонатора выберем одномодовое тепловое состояние

$$\rho_F(0) = \sum_n p_n |n\rangle \langle n|.$$

Здесь

$$p_n = \frac{\bar{n}^n}{(1+\bar{n})^{n+1}},$$

где  $\bar{n}$  – среднее число тепловых фотонов в резонаторной моде, определяемое формулой Бозе – Эйнштейна

$$\bar{n} = (\exp[\hbar\omega_i / k_B T] - 1)^{-1},$$

$k_B$  – постоянная Больцмана;  $T$  – температура резонатора.

Найдем точную динамику представленной модели. Начнем исследование для случая, когда резонаторное поле приготовлено в состоянии с определенным числом фотонов, а затем обобщим полученные результаты на случай теплового поля резонатора. Для фоковского состояния поля и чистых начальных состояний атомов состояние всей системы определяется во все последующие моменты времени волновой функций. Решение временного уравнения Шредингера для рассматриваемых начальных состояний можно представить в виде разложения по собственным функциям гамильтониана (1) (представление «одетых состояний»). Пусть число элементарных возбуждений в системе с гамильтонианом (1) есть  $n$  ( $n \geq 0$ ). Тогда собственные функции гамильтониана (1) в базе  $|-, -, n+2\rangle$ ,  $|+, -, n+1\rangle$ ,  $|-, +, n+1\rangle$ ,  $|+, +, n\rangle$  могут быть представлены в виде

$$|\Psi_{in}\rangle = w_{in} (X_{i1n} |-, -, n+2\rangle + X_{i2n} |+, -, n+1\rangle + X_{i3n} |-, +, n+1\rangle + X_{i4n} |+, +, n\rangle), \quad (2)$$

где

$$w_{in} = 1 / \sqrt{|X_{i1n}|^2 + |X_{i2n}|^2 + |X_{i3n}|^2 + |X_{i4n}|^2},$$

$$X_{i1n} = 0, \quad X_{i2n} = -1, \quad X_{i3n} = 1, \quad X_{i4n} = 0,$$

$$X_{i1n} = -\frac{2\sqrt{1+n}\sqrt{2+n}}{4+2n+2\delta+\varepsilon_{in}-2\delta\varepsilon_{in}-\varepsilon_{in}^2}, \quad X_{i4n} = 1,$$

$$X_{i2n} = -\frac{\sqrt{1+n}(2\delta+\varepsilon_{in})}{4+2n+2\delta+\varepsilon_{in}-2\delta\varepsilon_{in}-\varepsilon_{in}^2},$$

$$X_{i3n} = -\frac{\sqrt{1+n}(2\delta+\varepsilon_{in})}{4+2n+2\delta+\varepsilon_{in}-2\delta\varepsilon_{in}-\varepsilon_{in}^2}$$

( $i=2,3,4$ ),

$$\delta = \Delta / \gamma, \quad \varepsilon_{in} = E_{in} / \hbar g.$$

Соответствующие собственные значения энергии можно представить как

$$E_{1n} = \hbar g \alpha, \quad E_{2n} = (1/3)\hbar g \operatorname{Re}[(\alpha + A_n / B_n + B_n)],$$

$$E_{3n} = (1/6)\hbar g \times \\ \times \operatorname{Re}[2\alpha - (1 + i\sqrt{3})A_n / B_n + i(i + \sqrt{3})B_n],$$

$$E_{4n} = (1/6)\hbar g \times \\ \times \operatorname{Re}[2\alpha + i(i + \sqrt{3})A_n / B_n - (1 + i\sqrt{3})B_n],$$

где

$$A_n = 18 + 12n + \alpha^2 + 12\delta^2,$$

$$B_n = \left( \alpha^3 - 54\delta + 9\alpha(3 + 2n - 4\delta^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left( -4(18 + 12n + \alpha^2 + 12\delta^2) \right)^3 + \right.$$

$$\left. + 4 \left( \alpha^3 - 54\delta + 9\alpha(3 + 2n - 4\delta^2) \right)^2 \right)^{1/2} \Bigg)^{1/3},$$

$$\alpha = J / \gamma.$$

Для получения полной динамики нашей модели мы должны также ввести в рассмотрение собственные функции гамильтониана (1) вида  $|-, -, 1\rangle$ ,  $|+, -, 0\rangle$ ,  $|-, +, 0\rangle$ .

Предположим, что начальное состояние исследуемой системы есть  $|+, -, n+1\rangle$  ( $n \geq 0$ ). Тогда в момент времени  $t$  состояние системы можно описать вектором состояния

$$|\Psi(t)\rangle = C_{12,n} |-, -, n+2\rangle + C_{22,n} |+, -, n+1\rangle +$$

$$+ C_{32,n} |-, +, n+1\rangle + C_{42,n} |+, +, n\rangle, \quad (3)$$

$$C_{i2,n} =$$

$$= e^{-iE_{1n}t/\hbar} w_{1n} Y_{2in} X_{1in} + e^{-iE_{2n}t/\hbar} w_{2n} Y_{2in} X_{2in} +$$

$$+ e^{-iE_{3n}t/\hbar} w_{3n} Y_{2in} X_{3in} + e^{-iE_{4n}t/\hbar} w_{4n} Y_{2in} X_{4in}$$

$$(i = 1, 2, 3, 4), \quad Y_{ijn} = w_{jn} X_{jin}^*.$$

Если начальные состояния системы есть  $|+, -, 0\rangle$ , то временная волновая функция имеет, соответственно, вид

$$|\Psi(t)\rangle = C_{12} |-, -, 1\rangle + C_{22} |+, -, 0\rangle + C_{32} |-, +, 0\rangle, \quad (4)$$

$$C_{12} = -2ie^{-i(\alpha-2\delta)t/2} \sin(\Omega t / 2) / \Omega,$$

$$C_{22} = e^{-i(\alpha-2\delta)t/2} (e^{i(3\alpha-2\delta)t/2} + \\ + \Omega \cos(\Omega t / 2) - 2i \sin(\Omega t / 2)) / (2\Omega),$$

$$C_{32} = e^{-i(\alpha-2\delta)t/2} (-e^{i(3\alpha-2\delta)t/2} + \\ + \Omega \cos(\Omega t / 2) - 2i \sin(\Omega t / 2)) / (2\Omega),$$

$$\Omega = \sqrt{8 + (\alpha + 2\delta)^2}.$$

Предположим, что наша система в начальный момент находится в состоянии  $|-, +, n+1\rangle$ . Тогда временная волновая функция может быть представлена в виде

$$|\Psi(t)\rangle = C_{13,n} |-, -, n+2\rangle + C_{23,n} |+, -, n+1\rangle + \\ + C_{33,n} |-, +, n+1\rangle + C_{43,n} |+, +, n\rangle, \quad (5)$$

где коэффициенты  $C_{i3,n}$  имеют вид (8) при замене  $Y_{2in}$  на  $Y_{3in}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

Если начальное состояние системы есть  $|-, +, 0\rangle$ , то временная волновая функция примет вид

$$|\Psi(t)\rangle = C_{13} |-, -, 1\rangle + C_{23} |+, -, 0\rangle + C_{33} |-, +, 0\rangle, \quad (6)$$

где  $C_{13} = C_{12}$ ,  $C_{23} = C_{22}$ ,  $C_{33} = C_{32}$ .

Для начальных состояний  $|+, +, n\rangle$  и  $|-, -, n+2\rangle$  ( $n \geq 0$ ) временные волновые функции есть

$$|\Psi(t)\rangle = C_{11,n} |-, -, n+2\rangle + C_{21,n} |+, -, n+1\rangle + \\ + C_{31,n} |-, +, n+1\rangle + C_{41,n} |+, +, n\rangle; \quad (7)$$

$$|\Psi(t)\rangle = C_{14,n} |-, -, n+2\rangle + C_{24,n} |+, -, n+1\rangle + \\ + C_{34,n} |-, +, n+1\rangle + C_{44,n} |+, +, n\rangle. \quad (8)$$

Коэффициенты  $C_{i1,n}$  ( $C_{i4,n}$ ) могут быть получены из (3) путем замены  $Y_{2in}$  на  $Y_{1in}$  ( $Y_{4in}$ ) ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

Если начальное состояние системы  $|-, -, 1\rangle$ , временную волновую функцию можно представить как

$$|\Psi(t)\rangle = C_{14} |-, -, 1\rangle + C_{24} |+, -, 0\rangle + C_{34} |-, +, 0\rangle, \quad (9)$$

$$C_{14}(t) = e^{-(1/2)i(\alpha-2\delta)t} ((8 + (\alpha + 2\delta)^2 \cos(\Omega t / 2) + \\ + (\alpha + 2\delta)\Omega i \sin(\Omega t / 2)) / (\Omega^2),$$

$$C_{24}(t) = C_{34}(t) = -2ie^{-\frac{1}{2}it(\alpha-2\delta)} \sin(\Omega t / 2) / (\Omega).$$

Наконец, для начального состояния  $|-, -, 0\rangle$  временная волновая функция есть

$$|\Psi(t)\rangle = \exp[-i(2\delta t)] |-, -, 0\rangle.$$

Используя выражения (2)–(9), мы можем найти явный вид матрицы плотности полной системы  $\rho_{Fock}(t) = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$ . Используя выражение для матрицы плотности в случае фоковского начального состояния поля, легко получить явный вид матрицы плотности полной системы для теплового поля  $\rho_{Thermal}(t)$ . Выполняя усреднение полной матрицы плотности по переменным резонаторного поля, мы можем получить редуцированную матрицу плотности подсистемы кубитов  $\rho_A(t) = \operatorname{Tr}_F \rho_{Thermal}(t)$ . Наконец, атомная матрица плотности может быть использована для вычисления параметра перепутывания кубитов.

## 2. Вычисление параметра перепутывания кубитов

В качестве параметра перепутывания кубитов мы воспользуемся параметром Переса – Хордецких или отрицательностью, которая может быть представлена в терминах отрицательных собственных значений  $\mu_i^-$  частично транспонированной по переменным одного кубита атомной матрицы плотности ( $\rho_A^T$ ):

$$\varepsilon = -2 \sum_i \mu_i^-. \quad (10)$$

Значения параметра (10), удовлетворяющие неравенству  $\varepsilon > 0$ , соответствуют перепутанному состоянию кубитов, в то время как значение  $\varepsilon = 0$  соответствует сепарабельным состояниям кубитов. Для максимально перепутанных кубитов  $\varepsilon = 1$ .

Для когерентных сепарабельных начальных состояний кубитов редуцированная атомная матрица плотности рассматриваемой модели в двухкубитном базисе  $|-, -\rangle, |+, -\rangle, |-, +\rangle, |+, +\rangle$  имеет вид

$$\rho_A(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= |a|^2 \sum_{n=0} p_n |Z_{41,n}|^2 + |b|^2 \sum_{n=1} p_n |Z_{42,n-1}|^2 + \\ &+ bc^* \sum_{n=1} p_n Z_{42,n-1} Z_{43,n-1}^* + \\ &+ cb^* \sum_{n=1} p_n Z_{43,n-1} Z_{42,n-1}^* + \\ &+ |c|^2 \sum_{n=1} p_n |Z_{43,n-1}|^2 + |d|^2 \sum_{n=2} p_n |Z_{44,n-2}|^2, \\ \rho_{12} &= ab^* \sum_{n=1} p_n Z_{41,n} Z_{22,n-1}^* + ac^* \sum_{n=1} p_n Z_{41,n} Z_{23,n-1}^* + \\ &+ bd^* \sum_{n=2} p_n Z_{42,n-1} Z_{24,n-2}^* + \\ &+ cd^* \sum_{n=2} p_n Z_{43,n-1} Z_{24,n-2}^* + \\ &+ p_1 (bd^* Z_{42,0} G_{24}^* + cd^* Z_{43,0} G_{24}^*) + \\ &+ p_0 (ab^* Z_{41,0} G_{22}^* + ac^* Z_{41,0} G_{23}^*), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_{13} &= ab^* \sum_{n=1} p_n Z_{41,n} Z_{32,n-1} + ac^* \sum_{n=1} p_n Z_{41,n} Z_{33,n-1}^* + \\ &+ bd^* \sum_{n=2} p_n Z_{42,n-1} Z_{34,n-2}^* + \\ &+ cd^* \sum_{n=2} p_n Z_{43,n-1} Z_{34,n-2}^* + \\ &+ p_1 (bd^* Z_{42,0} G_{34}^* + cd^* Z_{43,0} G_{34}^*) + \\ &+ p_0 (ab^* Z_{41,0} G_{32}^* + ac^* Z_{41,0} G_{33}^*), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_{14} &= ad^* \sum_{n=2} p_n Z_{41,n} Z_{14,n-2}^* + \\ &+ p_1 ad^* Z_{41,1} G_{14}^* + p_0 ad^* Z_{41,0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_{22} &= |a|^2 \sum_{n=0} p_n |Z_{21,n}|^2 + |d|^2 \sum_{n=2} p_n |Z_{24,n-2}|^2 + \\ &+ bc^* \sum_{n=1} p_n Z_{22,n-1} Z_{23,n-1}^* + \\ &+ cb^* \sum_{n=1} p_n Z_{23,n-1} Z_{22,n-1}^* + \\ &+ |c|^2 \sum_{n=1} p_n |Z_{23,n-1}|^2 + |b|^2 \sum_{n=1} p_n |Z_{22,n-1}|^2 + \\ &+ p_1 |d|^2 |G_{24}|^2 + p_0 (|b|^2 |G_{22}|^2 + bc^* G_{22} G_{23}^*) + \\ &+ p_0 (cb^* G_{23} G_{22}^* |c|^2 |G_{23}|^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_{23} &= |a|^2 \sum_{n=0} p_n Z_{21,n} Z_{31,n}^* + |d|^2 \sum_{n=2} p_n Z_{24,n-2} Z_{34,n-2}^* + \\ &+ bc^* \sum_{n=1} p_n Z_{22,n-1} Z_{33,n-1}^* + \\ &+ cb^* \sum_{n=1} p_n Z_{23,n-1} Z_{32,n-1}^* + \\ &+ |c|^2 \sum_{n=1} p_n Z_{23,n-1} Z_{33,n-1}^* + \\ &+ |b|^2 \sum_{n=1} p_n Z_{22,n-1} Z_{32,n-1}^* + \\ &+ p[1] |d|^2 G_{24} G_{23}^* + p[0] (|b|^2 G_{22} G_{32}^* + \\ &+ bc^* G_{22} G_{33}^* + cb^* G_{23} G_{32}^* + |c|^2 G_{23} G_{33}^*), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_{33} &= |a|^2 \sum_{n=0} p_n |Z_{31,n}|^2 + |b|^2 \sum_{n=1} p_n |Z_{32,n-1}|^2 + \\ &+ bc^* \sum_{n=1} p_n Z_{32,n-1} Z_{33,n-1}^* + cb^* \sum_{n=1} p_n Z_{33,n-1} Z_{32,n-1}^* + \end{aligned}$$

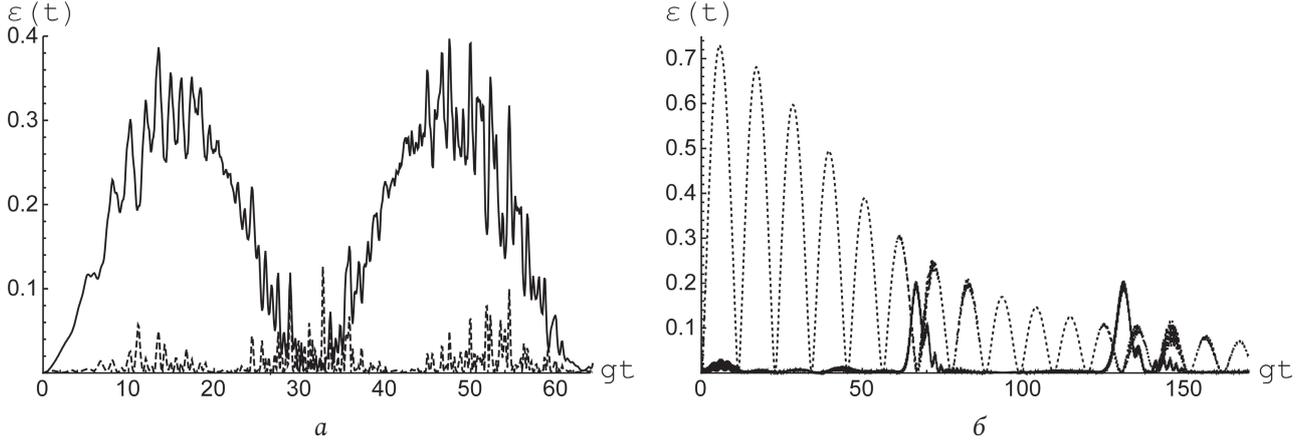


Рис. 1. Отрицательность как функция безразмерного времени  $gt$  для модели без диполь-дипольного взаимодействия в случае когерентного начального состояния кубитов с  $\theta_1 = \theta_2 = \pi/4$ ,  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = \pi$  (сплошная линия) и сепарабельного состояния с  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = \pi$ ,  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = 0$  (б). Среднее число тепловых фотонов в моде  $\bar{n} = 20$ , расстройка  $\delta = 0$  (а) и  $\delta = 10$  (б)  
Fig. 1. Negativity as a function of dimensionless time  $gt$  for a model without dipole-dipole interaction in the case of a coherent initial state of qubits with  $\theta_1 = \theta_2 = \pi/4$ ,  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = \pi$  (solid line) and a separable state with  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = \pi$ ,  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = 0$  (b). Average number of thermal photons in a mode  $\bar{n} = 20$ , detuning  $\delta = 0$  (a) and  $\delta = 10$  (b)

$$+ |c|^2 \sum_{n=1} p_n |Z_{33,n-1}|^2 + 2|d|^2 \sum_{n=2} p_n |Z_{34,n-2}|^2 +$$

$$+ p_1 |d|^2 |G_{34}|^2 + p_0 (|b|^2 |G_{32}|^2 +$$

$$+ bc^* G_{32} G_{33}^* + cb^* G_{33} G_{32}^* + |c|^2 |G_{33}|^2),$$

$$\rho_{34} =$$

$$= ab^* \sum_{n=1} p_n Z_{31,n} Z_{12,n-1} + ac^* \sum_{n=1} p_n Z_{31,n} Z_{13,n-1} +$$

$$+ bd^* \sum_{n=2} p_n Z_{32,n-1} Z_{14,n-2}^* +$$

$$+ cd^* \sum_{n=2} p_n Z_{33,n-1} Z_{14,n-2}^* +$$

$$+ p_1 (bd^* Z_{32,0} G_{14}^* + cd^* Z_{33,0} G_{14}^*) +$$

$$+ p_0 (ab^* Z_{31,0} G_{12}^* + ac^* Z_{31,0} G_{13}^*) +$$

$$+ p_0 (bd^* G_{32} + cd^* G_{33}),$$

$$\rho_{44} =$$

$$= |a|^2 \sum_{n=0} p_n |Z_{11}|^2 + |b|^2 \sum_{n=1} p_n |Z_{12,n-1}|^2 +$$

$$+ bc^* \sum_{n=1} p_n Z_{12,n-1} Z_{13,n-1}^* + cb^* \sum_{n=1} p_n Z_{13,n-1} Z_{12,n-1}^* +$$

$$+ |c|^2 \sum_{n=1} p_n |Z_{13,n-1}|^2 + |d|^2 \sum_{n=2} p_n |Z_{14,n-2}|^2 +$$

$$+ p_1 |d|^2 |G_{14}|^2 + p_0 (|b|^2 |G_{12}|^2 + bc^* G_{12} G_{13}^* +$$

$$+ cb^* G_{13} G_{12}^* + |c|^2 |G_{13}|^2 + |d|^2).$$

Здесь  $a = \cos\theta_1 \cos\theta_2$ ,  $b = \cos\theta_1 \sin\theta_2$ ,  $c = \sin\theta_1 \times \cos\theta_2$ ,  $d = \sin\theta_1 \sin\theta_2$ .

Соответственно, частично транспонированная по переменным одного кубита атомная матрица плотности  $\rho_A^{T_1}(t)$  есть

$$\rho_A^{T_1}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13}^* & \rho_{23}^* \\ \rho_{12}^* & \rho_{22} & \rho_{14}^* & \rho_{24}^* \\ \rho_{13} & \rho_{14} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{23} & \rho_{24} & \rho_{34}^* & \rho_{44} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Все четыре собственных значения матрицы могут принимать отрицательные значения, поэтому вносят вклад в отрицательность. Указанные собственные значения имеют чрезвычайно громоздкий вид и поэтому не приводятся в настоящей статье.

### 3. Результаты численного моделирования отрицательности

Результаты численного моделирования временной зависимости параметра перепутывания кубитов приведены на рис. 1–2 для моделей с резонансным и нерезонансным кубит-полевым взаимодействием в случае интенсивного теплового поля резонатора.

На рис. 1, а представлена зависимость отрицательности от безразмерного времени  $gt$  для модели с резонансным взаимодействием между кубитами и полем в отсутствие диполь-дипольного взаимодействия кубитов. При этом сплошная кривая соответствует когерентному начальному состоянию кубитов вида  $|\Psi_1(0)\rangle = (1/\sqrt{2})(|+\rangle_1 + |-\rangle_1)$ ,  $|\Psi_2(0)\rangle = (1/\sqrt{2})(|+\rangle_2 - |-\rangle_2)$ , а пунктирная – сепарабельному состоянию кубитов  $|\Psi_1(0)\rangle = |+\rangle_1$ ,  $|\Psi_2(0)\rangle = |-\rangle_2$ . Из рис. 1 хорошо видно, что в случае резонансного взаимодействия кубитов с полем резонатора наличие начальной атомной когерентности для определенных амплитуд поляризованных атомов приводит к суще-

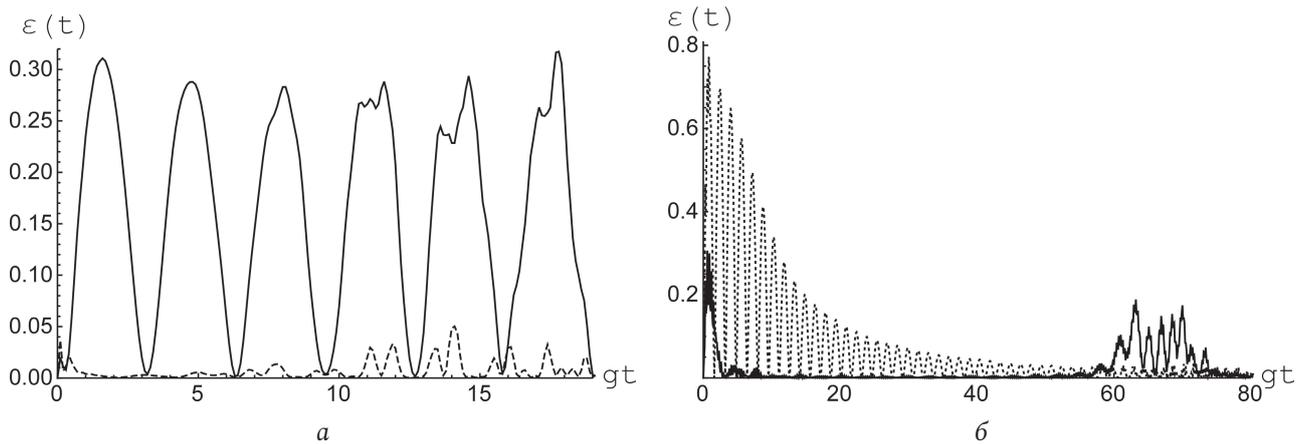


Рис. 2. Отрицательность как функция безразмерного времени  $gt$  для модели в присутствии диполь-дипольного взаимодействия в случае когерентного начального состояния кубитов с  $\theta_1 = \theta_2 = \pi/4$ ,  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = \pi$  (сплошная линия) и сепарабельного состояния с  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = \pi$ ,  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = 0$  (б). Среднее число тепловых фотонов в моде  $\bar{n} = 20$ , параметр диполь-дипольного взаимодействия кубитов  $\alpha = 1$ , расстройка  $\delta = 0$  (а) и  $\delta = 10$  (б)

Fig. 2. Negativity as a function of dimensionless time  $gt$  for the model in the presence of dipole-dipole interaction in the case of a coherent initial state of qubits with  $\theta_1 = \theta_2 = \pi/4$ ,  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = \pi$  (solid line) and a separable state with  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = \pi$ ,  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = 0$  (b). Average number of thermal photons in a mode  $\bar{n} = 20$ , parameter of dipole-dipole interaction of qubits  $\alpha = 1$ , detuning  $\delta = 0$  (a) and  $\delta = 10$  (b)

ственному возрастанию максимальной степени перепутывания. На рис. 1, б представлена зависимость отрицательности от безразмерного времени  $gt$  для модели с нерезонансным взаимодействием между кубитами и полем в отсутствие диполь-дипольного взаимодействия кубитов. При этом, как и для рис. 1, а, сплошная кривая соответствует когерентному начальному состоянию кубитов  $|\Psi_1(0)\rangle = (1/\sqrt{2}) \times (|+\rangle_1 + |-\rangle_1)$ ,  $|\Psi_2(0)\rangle = (1/\sqrt{2})(|+\rangle_2 - |-\rangle_2)$ , а пунктирная – сепарабельному состоянию  $|\Psi_1(0)\rangle = |+\rangle_1$ ,  $|\Psi_2(0)\rangle = |-\rangle_2$ . В случае нерезонансного атом-полевого взаимодействия характер зависимости степени перепутывания кубитов от начальной когерентности меняется на противоположный. Для нерезонансного взаимодействия максимальная степень перепутывания кубитов для сепарабельного состояния превышает соответствующую величину для когерентного состояния. Можно отметить еще одну интересную особенность в поведении отрицательности в случае нерезонансного кубит-полевого взаимодействия. В этом случае осцилляции отрицательности затухают и на больших временах обращаются в ноль (т. е. за счет расстройки некогерентные квантовые корреляции кубитов исчезают, несмотря на отсутствие диссипации в рассматриваемой модели). В то же время поведение, как и для резонансной модели поведение отрицательности, носит квазипериодический характер.

На рис. 2 представлены временные зависимости отрицательности в случае резонансной (а) и нерезонансной (б) моделей в присутствии прямого диполь-дипольного взаимодействия кубитов. Результаты для рассматриваемого случая качественно аналогичны результатам для модели без диполь-дипольного взаимодействия. Заметим, что в отсутствие диполь-дипольной связи и большого среднего числа фотонов степень перепутывания кубитов очень мала.

### Заключение

Таким образом, в настоящей статье автор исследовал влияние атомной когерентности на перепутывание двух дипольно связанных двухуровневых естественных или искусственных атомов (кубитов), взаимодействующих с интенсивным тепловым одномодовым полем резонатора без потерь. Результаты расчетов показывают, что максимальная степень перепутывания кубитов может существенно возрастать при наличии начальной атомной когерентности в случае резонансного взаимодействия кубитов с тепловым полем. При ненулевой расстройке начальная атомная когерентность, напротив, уменьшает степень перепутывания кубитов. Полученные результаты могут быть использованы при разработке механизмов управления и контроля степени перепутывания кубитов в квантовых компьютерах и квантовых сетях.

## Список литературы

1. Georgescu I.M., Ashhab S., Nori F. Quantum simulation // *Rev. Mod. Phys.* 2014. Vol. 88, No. 1. P. 153–186. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.153>.
2. Buluta I., Ashab S., Nori F. Neutral and artificial atoms for quantum computation // *Rep. Prog. Phys.* 2011. Vol. 74, No. 10. P. 104401. DOI: <https://doi.org/10.1088/0034-4885/74/10/104401>.
3. Cavity-loss-induced generation of entangled atoms / M.B. Plenio [et al.] // *Phys. Rev. A.* 1999. Vol. 59, No. 3. P. 2468–2475. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.59.2468>.
4. Entanglement induced by a single-mode heat environment / M.S. Kim [et al.] // *Phys. Rev. A.* 2002. Vol. 65, No. 4. P. 040101. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.65.040101>.
5. Zhou L., Song H.S. Entanglement induced by a single-mode thermal field and criteria for entanglement // *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* 2002. Vol. 4, No. 6. P. 425–429. DOI: <https://doi.org/10.1088/1464-4266/4/6/310>.
6. Coherence-enhanced entanglement between two atoms at high temperature / Y.-H. Hu [et al.] // *Chinese Phys. B.* 2008. Vol. 17, No. 5. P. 1784–1790. DOI: <https://doi.org/10.1088/1674-1056/17/5/039>.
7. The entanglement of two dipole-dipole coupled in a cavity interacting with a thermal field / L.S. Aguiar [et al.] // *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* 2015. Vol. 7, No. 12. P. 769–771. DOI: <https://doi.org/10.1088/1464-4266/7/12/049>.
8. Bashkirov E.K. Entanglement between two dipole-coupled qubits interacting with two independent slightly detuned cavity modes // *Intern. J. Theor. Phys.* 2019. Vol. 58, No. 7. P. 2346–2356. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10773-019-04126-3>.

## References

1. Georgescu I.M., Ashhab S., Nori F. Quantum simulation. *Rev. Mod. Phys.*, 2014, vol. 88, no. 1, pp. 153–186. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.153>.
2. Buluta I., Ashab S., Nori F. Neutral and artificial atoms for quantum computation. *Rep. Prog. Phys.*, 2011, vol. 74, no. 10, p. 104401. DOI: <https://doi.org/10.1088/0034-4885/74/10/104401>.
3. Plenio M.B. et al. Cavity-loss-induced generation of entangled atoms. *Phys. Rev. A*, 1999, vol. 59, no. 3, pp. 2468–2475. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.59.2468>.
4. Kim M.S. et al. Entanglement induced by a single-mode heat environment. *Phys. Rev. A*, 2002, vol. 65, no. 4, p. 040101. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.65.040101>.
5. Zhou L., Song H.S. Entanglement induced by a single-mode thermal field and criteria for entanglement. *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, 2002, vol. 4, no. 6, pp. 425–429. DOI: <https://doi.org/10.1088/1464-4266/4/6/310>.
6. Hu Y.-H. et al. Coherence-enhanced entanglement between two atoms at high temperature. *Chinese Phys. B*, 2008, vol. 17, no. 5, pp. 1784–1790. DOI: <https://doi.org/10.1088/1674-1056/17/5/039>.
7. Aguiar L.S. et al. The entanglement of two dipole-dipole coupled in a cavity interacting with a thermal field. *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, 2015, vol. 7, no. 12, pp. 769–771. DOI: <https://doi.org/10.1088/1464-4266/7/12/049>.
8. Bashkirov E.K. Entanglement between two dipole-coupled qubits interacting with two independent slightly detuned cavity modes. *Intern. J. Theor. Phys.*, 2019, vol. 58, no. 7, pp. 2346–2356. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10773-019-04126-3>.

## Physics of Wave Processes and Radio Systems 2020, vol. 23, no. 3, pp. 10–17

DOI 10.18469/1810-3189.2020.23.3.10-17

Received 14 July 2020  
Accepted 11 August 2020

## Entanglement of atoms induced by thermal noise in the presence of initial atomic coherence

Evgeny K. Bashkirov Samara National Research University  
34, Moskovskoye shosse,  
Samara, 443086, Russia

**Abstract** – In this article, author investigated the dynamics of entanglement of two dipole-coupled natural or artificial two-level atoms (qubits) interacting nonresonantly with the intensive one-mode cavity thermal field. Author found an exact solution of the quantum Liouville equation for the full density matrix of the system «two atoms + field mode» for a coherent initial state of atoms in the «dressed states» representation. The full system density matrix is used to calculate the two-atom reduced density matrix and to calculate the quantitative criterion for atom-atom entanglement – negativity. The results of computer simulation of the time dependence of negativity showed that in the case of a model with nonresonant interaction, the presence of initial atomic coherence leads to a significant decrease in the maximum degree of atomic entanglement, in contrast to the model with

resonant interaction of atoms and a field. For the resonance model, the initial atomic coherence greatly enhances the degree of atomic entanglement.

*Keywords* – two-level atoms, detuning, dipole-dipole interaction, thermal field, atomic coherence, entanglement of atoms, negativity, entanglement control.

## Информация об авторе

**Башкиров Евгений Константинович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей и теоретической физики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева, г. Самара, Россия. В 1978 г. окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета и в 1984 г. – аспирантуру при Московском государственном университете. Автор более 300 научных работ.

*Область научных интересов:* квантовая оптика и квантовая радиофизика, квантовая информатика, теория неравновесных явлений.

*E-mail:* bash@samsu.ru

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0003-2569-1322>

## Information about the Author

**Evgeny K. Bashkirov**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, Samara, Russia. In 1978 he graduated from the Physics Faculty of Kuibyshev State University and postgraduated at Moscow State University in 1984. He is an author of over 300 scientific papers.

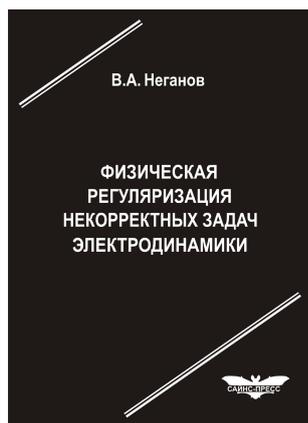
*Research interests:* quantum optics and quantum radiophysics, quantum informatics, theory of nonequilibrium phenomena.

*E-mail:* bash@samsu.ru

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0003-2569-1322>

**Неганов, В.А.**

**Физическая регуляризация некорректных задач электродинамики: линии передачи, антенны, дифракция электромагнитных волн / В.А. Неганов. – М.: САЙНС-ПРЕСС, 2008. – 432 с., 122 ил.**



ISBN 978-5-88070-161-2

УДК 537.87

ББК 32.84

Н 41

Изложены основы физической регуляризации некорректных задач электродинамики, связанной с особенностями физических и математических моделей задач (физические допущения, некорректные математические выкладки, отсутствие предельного перехода). Подход, по мнению автора, обладает большими возможностями, чем метод регуляризации Тихонова А.Н. интегральных уравнений Фредгольма первого рода, названный в книге методом математической регуляризации. Метод физической регуляризации (МФР) применен к анализу волноведущих и излучающих структур, а также задачам дифракции электромагнитных волн на некоторых телах. МФР позволил впервые корректно осуществить анализ полей в ближних зонах некоторых антенн, устранить несамосогласованное приближение Кирхгофа в задачах дифракции, установить связь поверхностной плотности тока проводимости с напряженностями электрического и магнитного полей для диполя Герца и т. п.

*Для специалистов в области радиотехники и радиофизики СВЧ, электромагнитной совместимости РТС, математической теории дифракции и математического моделирования электродинамических структур самого широкого назначения. Может быть полезна преподавателям вузов, докторантам, аспирантам и студентам старших курсов соответствующих специальностей.*