

Тепловое перепутывание в двойной модели Джейнса – Каммингса

Е.К. Башкиров , М.О. Гусянникова

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева
443086, Россия, г. Самара,
Московское шоссе, 34

Аннотация – В данной работе мы исследовали динамику перепутывания двух изначально перепутанных двухуровневых атомов (кубитов), взаимодействующих с двумя модами теплового поля двух независимых резонаторов в рамках резонансной двойной модели Джейнса – Каммингса. Нами получено точное решение для рассматриваемой модели, и на его основе найдена временная зависимость параметра перепутывания кубитов (отрицательности). Результаты расчетов показывают, что взаимодействие изначально перепутанных кубитов с тепловыми полями резонаторов не приводит к полному разрушению квантовых корреляций кубитов в процессе их эволюции даже при относительно высоких температурах резонаторов.

Ключевые слова – двойная модель Джейнса – Каммингса, двухуровневые атомы, атомная перепутанность, отрицательность, тепловые поля.

Введение

В настоящее время перепутанность признана основной особенностью квантовой физики и рассматривается в качестве источника разнообразных применений в квантовой информации. В последние годы атомное перепутанное состояние интенсивно исследовалось в системах двух- и многоатомных естественных или искусственных атомов, таких как сверхпроводящие цепи, ридберговские атомы, ионы и т. д. [1–3]. Хорошо известно, что взаимодействия между атомами и окружающей средой обычно ухудшают степень их перепутывания. Однако в некоторых ситуациях, напротив, взаимодействие атомов со средой может генерировать атомную перепутанность [4]. В частности, взаимодействие атомов с тепловым полем резонатора может вызвать их перепутывание, как было показано Кимом и соавторами [5]. Ким и соавторы исследовали этот эффект для двух двухуровневых атомов, взаимодействующих с одномодовым тепловым полем через однофотонные переходы в резонаторе без потерь. Позже аналогичный эффект был предсказан и для многих других обобщенных двухатомных моделей Джейнса – Каммингса (МДК) с учетом вырожденного и невырожденного двухфотонного перехода, штарковского сдвига, расстройки, атомной когерентности, диполь-дипольного взаимодействия и т. д. [6–15]. Недавно Йонак и др. [16; 17] предложили так называемую двойную МДК, состоящую из двух двухуровневых атомов и двух резонаторных мод, при условии что каждый атом взаимодей-

ствует только с одной модой индивидуального резонатора, и исследовали динамику атом-атомного перепутывания этой модели: они обнаружили, что для слабых малофотонных полей перепутанность кубитов не является стационарной и может демонстрировать периодические флуктуации в виде внезапной смерти и рождения перепутывания атомов. В последнее время двойная МДК широко исследовалась в большом количестве работ [18–28]. В настоящей статье мы изучали динамику атом-атомного перепутывания в двойной МДК, в которой два идентичных двухуровневых атома резонансно взаимодействуют с тепловыми полями двух резонаторов.

1. Модель и ее нестационарная динамика

Мы рассмотрели два одинаковых кубита – А и В – и две тепловые резонаторные моды копланарных резонаторов, или LC-цепей, обозначенных как «1» и «2», с одинаковыми частотами и средним числом тепловых фотонов (одинаковыми температурами резонаторов). Кубит А резонансно взаимодействует с одномодовым полем резонатора «1», а кубит В резонансно взаимодействует с полем одномодового резонатора «2». Предположим также, что константы связи поля кубитов равны. Гамильтониан рассматриваемой системы в приближении картины взаимодействия и в приближении вращающейся волны можно записать в виде

$$H = \hbar g(\sigma_A^+ a + a^+ \sigma_A^-) + \hbar \gamma(\sigma_B^+ b + b^+ \sigma_B^-), \quad (1)$$

где $\sigma_i^+ = |+\rangle_i \langle -|$ и $\sigma_i^- = |- \rangle_i \langle +|$ – операторы пере-
хода между возбужденным $|+\rangle_i$ и основным $|-\rangle_i$
состояниями в кубите ($i = A, B$); a^+ и a – операторы
рождения и уничтожения фотонов (или плаз-
монов для LC-резонатора) моды резонатора «1»;
 b^+ и b – операторы рождения и уничтожения фо-
тонов моды резонатора «2»; γ – константа связи
между каждым из кубитов и полем резонатора.

Сначала рассмотрим два кубита в начальном
перепутанном состоянии белловского типа:

$$|\Psi(0)\rangle_A = \cos\theta |+, -\rangle + \sin\theta |-, +\rangle, \quad (2)$$

а поля резонаторов изначально в тепловом состоя-
нии с матрицей плотности

$$\rho_F(0) = \sum_n p_{n_1} p_{n_2} |n_1, n_2\rangle \langle n_1, n_2|,$$

где $p_{n_j} = \bar{n}_j^{n_j} / (1 + \bar{n}_j)^{n_j+1}$ и \bar{n}_j – среднее чис-
ло фотонов в моде резонатора j ($j = 1, 2$);
 $\bar{n}_j = (\exp[\hbar\omega / k_B T] - 1)^{-1}$; k_B – постоянная Больц-
мана; T – равновесная температура резонаторов.
Тогда полная начальная матрица плотности для
рассматриваемой модели есть

$$\rho(0) = |\Psi(0)\rangle_{AA} \langle \Psi(0)| \otimes \rho_F(0).$$

Мы намерены получить точную динамику рас-
сматриваемой модели. Начнем наше исследова-
ние с ситуации, когда два атома взаимодействуют
с резонаторными полями, подготовленными в фо-
ковских состояниях, а затем обобщим полученные
результаты на случай тепловых полей.

Для фоковских состояний поля решение урав-
нения Шредингера для рассматриваемой модели
имеет вид

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle_{n_1, n_2} = & X_{1, n_1, n_2}(t) |-, -; n_1 + 1, n_2\rangle + \\ & + X_{2, n_1, n_2}(t) |-, -; n_1, n_2 + 1\rangle + \\ & + X_{3, n_1, n_2}(t) |+, -; n_1, n_2\rangle + \\ & + X_{4, n_1, n_2}(t) |+, -; n_1 - 1, n_2 + 1\rangle + \\ & + X_{5, n_1, n_2}(t) |-, +; n_1 + 1, n_2 - 1\rangle + \\ & + X_{6, n_1, n_2}(t) |-, +; n_1, n_2\rangle + \\ & + X_{7, n_1, n_2}(t) |+, +; n_1, n_2 - 1\rangle + \\ & + X_{8, n_1, n_2}(t) |+, +; n_1 - 1, n_2\rangle. \end{aligned} \quad (3)$$

В случае $n_1 \neq n_2 - 1$ или $n_2 \neq n_1 - 1$ и $n_1 \neq 0, n_2 \neq 0$
коэффициенты в формуле (3) имеют вид

$$\begin{aligned} X_{1, n_1, n_2}(t) = & -\cos\theta (i\sqrt{1+n_1} ((n_2 + \sqrt{(1+n_1)n_2}) \times \\ & \times \Omega_1^-(n_1, n_2) \sin[\Omega_1^+(n_1, n_2)\gamma t] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \Omega_1^+(n_1, n_2) (-n_2 + \sqrt{(1+n_1)n_2}) \sin[\Omega_1^-(n_1, n_2)\gamma t]) / \\ & / (2\sqrt{(1+n_1)n_2} \Omega_1^+(n_1, n_2) \Omega_1^-(n-1, n_2))), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{2, n_1, n_2}(t) = & -\sin\theta (i\sqrt{1+n_2} ((n_1 + \sqrt{(1+n_2)n_1}) \times \\ & \times \Omega_2^-(n_1, n_2) \sin[\Omega_2^+(n_1, n_2)\gamma t] + \\ & + \Omega_2^+(n_1, n_2) (-n_1 + \sqrt{(1+n_2)n_1}) \sin[\Omega_2^-(n_1, n_2)\gamma t]) / \\ & / (2\sqrt{(1+n_2)n_1} \Omega_1^+(n_1, n_2) \Omega_1^-(n-1, n_2))), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{3, n_1, n_2}(t) = & (1/2) \cos\theta \times \\ & \times (\cos[\Omega_1^+(n_1, n_2)\gamma t] + \cos[\Omega_1^-(n_1, n_2)\gamma t]), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{4, n_1, n_2}(t) = & (1/2) (\sin\theta (\cos[\Omega_2^+(n_1, n_2)\gamma t] - \\ & - \cos[\Omega_2^-(n_1, n_2)\gamma t]), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{5, n_1, n_2}(t) = & (1/2) \cos\theta (\cos[\Omega_1^+(n_1, n_2)\gamma t] - \\ & - \cos[\Omega_1^-(n_1, n_2)\gamma t]), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{6, n_1, n_2}(t) = & (1/2) (\sin\theta (\cos[\Omega_2^+(n_1, n_2)\gamma t] + \\ & + \cos[\Omega_2^-(n_1, n_2)\gamma t]), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{7, n_1, n_2}(t) = & -\cos\theta (i\sqrt{n_2} ((1+n_1 + \sqrt{n_1(1+n_2)}) \times \\ & \times \Omega_1^-(n_1, n_2) \sin[\Omega_1^+(n_1, n_2)\gamma t] + \\ & + \Omega_1^+(n_1, n_2) (1+n_1 + \sqrt{(1+n_1)n_2}) \sin[\Omega_1^-(n_1, n_2)\gamma t]) / \\ & / (2\sqrt{(1+n_1)n_2} \Omega_1^-(n_1, n_2) \Omega_1^+(n-1, n_2))), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{8, n_1, n_2}(t) = & -\sin\theta (i\sqrt{n_1} ((1+n_2 + \sqrt{(1+n_2)n_1}) \times \\ & \times i\Omega_2^-(n_1, n_2) i \sin[\Omega_2^+(n_1, n_2)\gamma t] + \\ & + \Omega_2^+(n_1, n_2) (-1-n_2 + \sqrt{(1+n_2)n_1}) \sin[\Omega_2^-(n_1, n_2)\gamma t]) / \\ & / (2\sqrt{(1+n_2)n_1} \Omega_1^-(n_1, n_2) \Omega_1^+(n-1, n_2))), \end{aligned}$$

где

$$\Omega_1^+(n_1, n_2) = \sqrt{2\sqrt{(1+n_1)n_2} + n_1 + n_2 + 1};$$

$$\Omega_1^-(n_1, n_2) = \sqrt{2\sqrt{(1+n_1)n_2} - n_1 - n_2 - 1};$$

$$\Omega_2^+(n_1, n_2) = \sqrt{2\sqrt{(1+n_2)n_1} + n_1 + n_2 + 1};$$

$$\Omega_2^-(n_1, n_2) = \sqrt{2\sqrt{(1+n_2)n_1} - n_1 - n_2 - 1}.$$

Для случая $n_1 = 0$ или $n_2 = 0$ коэффициенты в (3)
принимают вид

$$X_{1, 0, n_2}(t) = -i \cos\theta \cos(\sqrt{n_2}\gamma t) \sin(\gamma t),$$

$$X_{2, 0, n_2}(t) = -i \sin\theta \sin(\sqrt{1+n_2}\gamma t),$$

$$X_{3,0,n_2}(t) = \cos\theta \cos(\gamma t) \cos(\sqrt{n_2} \gamma t),$$

$$X_{4,0,n_2}(t) = 0,$$

$$X_{5,0,n_2}(t) = -\cos\theta \sin(t) \sin(\sqrt{n_2} \gamma t),$$

$$X_{6,0,n_2}(t) = \sin\theta \cos(\sqrt{1+n_2} \gamma t),$$

$$X_{7,0,n_2}(t) = -i \cos\theta \cos(t) \sin(\sqrt{n_2} \gamma t),$$

$$X_{8,0,n_2}(t) = 0;$$

$$X_{1,n_1,0}(t) = -i \cos\theta \sin(\sqrt{1+n_1} \gamma t),$$

$$X_{2,n_1,0}(t) = -i \sin\theta \cos(\sqrt{n_1} \gamma t) \sin(\gamma t),$$

$$X_{3,n_1,0}(t) = \cos\theta \cos(\sqrt{1+n_1} \gamma t),$$

$$X_{4,n_1,0}(t) = -\sin\theta \sin(\gamma t) \sin(\sqrt{n_1} \gamma t),$$

$$X_{5,n_1,0}(t) = 0,$$

$$X_{6,n_1,0}(t) = \sin\theta \cos(\gamma t) \cos(\sqrt{n_1} \gamma t),$$

$$X_{7,n_1,0}(t) = 0,$$

$$X_{8,n_1,0}(t) = -i \sin\theta \cos(\gamma t) \sin(\sqrt{n_1} \gamma t).$$

Для случая $n_1 = n - 1$, $n_2 = n$ ($n > 1$) соответственно имеем:

$$X_{1,n_1,n_2}(t) \equiv Y_{1,n}(t) = -\frac{i}{2} \cos\theta \sin(2\sqrt{n} \gamma t),$$

$$X_{2,n_1,n_2}(t) \equiv Y_{2,n}(t) = \frac{\sin\theta}{2\sqrt{2}\sqrt{n^2-1}} \times$$

$$\times i \left[\sqrt{n-1} \left(\omega_n^- (1 + (\omega_n^+)^2) \right) i \sin(\sqrt{2}\omega_n^+ \gamma t) - \right. \\ \left. - \omega_n^+ (1 + (\omega_n^-)^2) \sin i(\sqrt{2}\omega_n^- \gamma t) \right],$$

$$X_{3,n_1,n_2}(t) \equiv Y_{3,n}(t) = \frac{1}{2} \cos\theta \left[1 + \cos(2\sqrt{n} \gamma t) \right],$$

$$X_{4,n_1,n_2}(t) \equiv Y_{4,n}(t) = \frac{\sin\theta \sqrt{n^2-1}}{2\sqrt{n^2-1}} \times$$

$$\times \left(\cos(\sqrt{2}\omega_n^+ \gamma t) - \cos(\sqrt{2}\omega_n^- \gamma t) \right),$$

$$X_{5,n_1,n_2}(t) \equiv Y_{5,n}(t) = \frac{1}{2} \cos\theta \left[-1 + \cos(2\sqrt{n} \gamma t) \right],$$

$$X_{6,n_1,n_2}(t) \equiv Y_{6,n}(t) =$$

$$= \frac{1}{2} \sin\theta \left[\cos(\sqrt{2}\omega_n^+ \gamma t) + \cos(\sqrt{2}\omega_n^- \gamma t) \right],$$

$$X_{7,n_1,n_2}(t) \equiv Y_{7,n}(t) = -\frac{1}{2} \cos\theta i \sin(2\sqrt{n} \gamma t),$$

$$X_{8,n_1,n_2}(t) \equiv Y_{8,n}(t) = \frac{\sin\theta i \sqrt{1+n}}{2\sqrt{2}\sqrt{n^2-1}} \times$$

$$\times \left[i \omega_n^- \left((\omega_n^+)^2 - 1 \right) i \sin(\sqrt{2}\omega_n^+ \gamma t) + \right. \\ \left. + i \omega_n^+ \left(1 - (\omega_n^-)^2 \right) i \sin(\sqrt{2}\omega_n^- \gamma t) \right],$$

где $\omega^\pm = \sqrt{n \pm \sqrt{n^2-1}}$.

Наконец, для случая $n_1 = n - 1$, $n_2 = n$ ($n > 1$) получаем:

$$X_{1,n_1,n_2}(t) \equiv Z_{1,n}(t) = \frac{\cos\theta i \sqrt{1+n}}{2\sqrt{2}\sqrt{n^2-1}} \times$$

$$\times \left[i \omega_n^- \left((\omega_n^+)^2 - 1 \right) i \sin(\sqrt{2}\omega_n^+ \gamma t) + \right. \\ \left. + i \omega_n^+ \left(1 - (\omega_n^-)^2 \right) i \sin(\sqrt{2}\omega_n^- \gamma t) \right],$$

$$X_{2,n_1,n_2}(t) \equiv Z_{2,n}(t) = -\frac{1}{2} \sin\theta i \sin(2\sqrt{n} \gamma t),$$

$$X_{3,n_1,n_2}(t) \equiv Z_{3,n}(t) =$$

$$= \frac{1}{2} \cos\theta \left[\cos(\sqrt{2}\omega_n^+ \gamma t) + \cos(\sqrt{2}\omega_n^- \gamma t) \right],$$

$$X_{4,n_1,n_2}(t) \equiv Z_{4,n}(t) = \frac{1}{2} \sin\theta \left[1 + \cos(2\sqrt{n} \gamma t) \right],$$

$$X_{5,n_1,n_2}(t) \equiv Z_{5,n}(t) = \frac{\cos\theta}{2\sqrt{n^2-1}} \times$$

$$\times \sqrt{n^2-1} \left(\cos(\sqrt{2}\omega_n^+ \gamma t) - \cos(\sqrt{2}\omega_n^- \gamma t) \right),$$

$$X_{6,n_1,n_2}(t) \equiv Z_{6,n}(t) = \frac{1}{2} \sin\theta \left[-1 + \cos(2\sqrt{n} \gamma t) \right],$$

$$X_{7,n_1,n_2}(t) \equiv Z_{7,n}(t) = \frac{\cos\theta}{2\sqrt{2}\sqrt{n^2-1}} \times$$

$$\times i \left[\sqrt{n-1} \left(\omega_n^- (1 + (\omega_n^+)^2) \right) i \sin(\sqrt{2}\omega_n^+ \gamma t) - \right. \\ \left. - \omega_n^+ (1 + (\omega_n^-)^2) \sin i(\sqrt{2}\omega_n^- \gamma t) \right],$$

$$X_{8,n_1,n_2}(t) \equiv Z_{8,n}(t) = -\frac{i}{2} \sin\theta \sin(2\sqrt{n} \gamma t).$$

Используя зависящую от времени волновую функцию для начальных фокковских состояний поля резонатора, можно легко получить зависящую от времени матрицу плотности для тепловых полей:

$$\rho(t) = \sum_{n_1, n_2} p_{n_1} p_{n_2} |\Psi(t)\rangle_{n_1, n_2} \langle \Psi(t)|. \quad (4)$$

Взяв частичный след по переменной поля для полной матрицы плотности (4), мы можем получить приведенную атомную матрицу плотности $\rho(t)_A = \text{Tr}_F \rho(t)$ и вычислить параметр перепутанности между кубитами.

2. Перепутывание между двумя кубитами

Для системы двух кубитов, описываемых оператором $\rho_A(t)$, мера перепутывания или отрицательность может быть определена в терминах отрицательных собственных значений μ_i^- частичного транспонированная по переменным одного кубита атомная матрица плотности ($\rho_A^{T_1}$).

$$\varepsilon = -2 \sum \mu_i^-, \quad (5)$$

где $\varepsilon = 0$ означает, что два кубита находятся в сепарабельном состоянии, и $\varepsilon > 0$ – появление перепутывания между ними. Случай $\varepsilon = 1$ соответствует максимальной степени перепутывания кубитов.

Редуцированная матрица атомной плотности для рассматриваемой системы есть

$$\rho_A(t) = \begin{pmatrix} U & 0 & 0 & H \\ 0 & V & H & 0 \\ 0 & H & W & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Формулы для матричных элементов U, V, W, R и H в настоящей работе не приведены, т. к. они имеют слишком громоздкий вид. Частично транспонированная по переменным одного кубита матрица плотности для (6) есть

$$\rho_A^{T_1}(t) = \begin{pmatrix} U & 0 & 0 & H^* \\ 0 & V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W & 0 \\ H & 0 & 0 & R \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Матрица (7) имеет только одно собственное значение, которое может принимать отрицательные значения, поэтому в рассматриваемом случае отрицательность можно записать как

$$\varepsilon(t) = \sqrt{(R-U)^2 + 4H^2} - U - R. \quad (8)$$

3. Результаты и обсуждение

Отрицательность (8) для перепутанного начального атомного состояния (2) как функция безразмерного времени γt изображена на рис. 1 для вакуумных начальных состояний резонаторов. На рис. 2 представлена временная зависимость отрицательности для начального состояния кубитов (2) и тепловыми резонаторами с различными значениями средних чисел фотонов $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 0.5$ (сплошная линия), $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 1$ (штриховая линия) и $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 2$ (точечная линия). Кривые на рис. 1 и 2 были получены в предположении, что $\theta = \pi/4$.

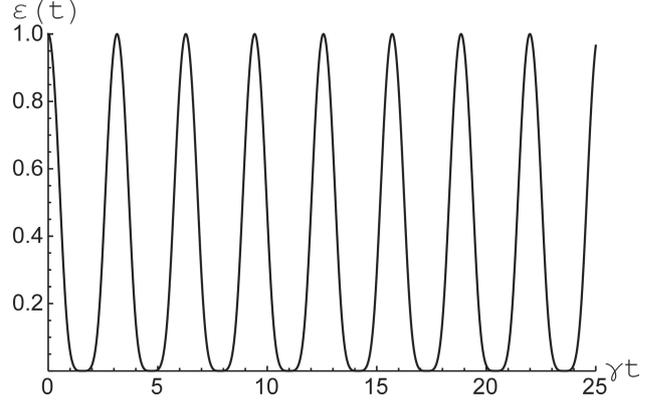


Рис. 1. Отрицательность как функция безразмерного времени γt для начального перепутанного атомного состояния (2). Среднее число фотонов для резонаторов $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 0$. Параметр $\theta = \pi/4$

Fig. 1. Negativity as a function of the dimensionless of time γt for the initial entangled atomic state (2). Average number of photons for resonators $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 0$. Parameter $\theta = \pi/4$

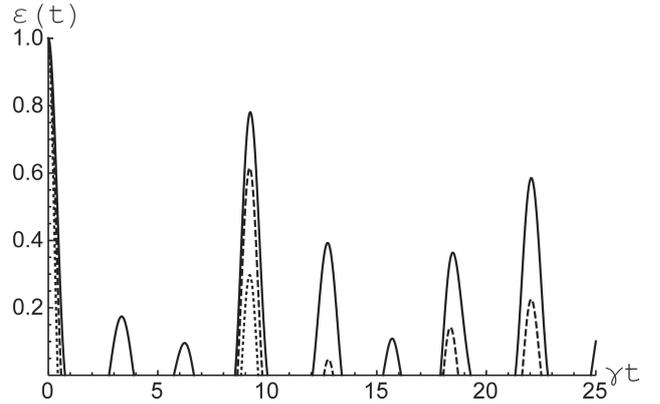


Рис. 2. Отрицательность как функция безразмерного времени γt для начального перепутанного атомного состояния (2). Среднее число фотонов для тепловых резонаторов $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 0,5$ (сплошная линия) $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 1$ (пунктирная линия) и $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 2$ (точечная линия). Параметр $\theta = \pi/4$

Fig. 2. Negativity as a function of dimensionless of time γt for the initial entangled atomic state (2). Average number of photons for thermal resonators, $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 0,5$ (solid line) $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 1$ (dotted line) and $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 2$ (dotted line). Parameter $\theta = \pi/4$

Из рис. 1 видно, что для вакуумных состояний полей резонаторов отрицательность имеет очевидную периодичность и начальная максимальная степень перепутывания кубитов восстанавливается в моменты времени $\gamma t = \pi k$, где $k = 1, 2, \dots$. Взаимодействие кубитов с тепловыми полями разрушает исходные квантовые корреляции атомов, однако для определенных моментов времени происходит частичное восстановление перепутывания кубитов даже при относительно высоких температурах резонатора ($\bar{n}_1, \bar{n}_2 \leq 2$). В этом случае периодичность эволюции параметра перепутанности нарушается. Из рис. 2 также хорошо видно,

что для теплового поля резонатора имеет место внезапная смерть и рождение перепутывания кубитов.

Заключение

Мы исследовали динамику перепутывания двух изначально перепутанных двухуровневых атомов (кубитов), взаимодействующих с двумя независимыми модами тепловых резонаторов в рамках двойной модели Джейнса – Каммингса. Нами найдено точное решение для рассматриваемой модели, и на его основе получено аналитическое

выражение для параметра перепутывания атомов – отрицательности. Результаты численного моделирования временной зависимости отрицательности показали, что начальная атомная перепутанность может частично восстановить свое первоначальное значение в процессе эволюции рассматриваемой системы даже при относительно высоких температурах резонатора. Таким образом, взаимодействие атомов с тепловыми фотонами, которые всегда присутствуют в резонаторах конечной температуры, не приводит к полному исчезновению начальных наведенных локальных квантовых корреляций состояний атомов.

Список литературы

1. Buluta I., Ashab S., Nori F. Neutral and artificial atoms for quantum computation // *Rep. Prog. Phys.* 2011. Vol. 74. P. 104401. DOI: <https://doi.org/10.1088/0034-4885/74/10/104401>.
2. Hybrid quantum circuits: Superconducting circuits interacting with other quantum systems / Z.-L. Xiang [et al.] // *Rev. Mod. Phys.* 2013. Vol. 85. P. 623–653. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.85.623>.
3. Georgescu I.M., Ashhab S., Nori F. Quantum simulation // *Rev. Mod. Phys.* 2014. Vol. 88. P. 153–186. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.153>.
4. Cavity-loss-induced generation of entangled atoms / M.B. Plenio [et al.] // *Phys. Rev.* 1999. Vol. A59. P. 2468. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.59.2468>.
5. Entanglement induced by a single-mode heat environment / M.S. Kim [et al.] // *Phys. Rev.* 2002. Vol. A65. P. 040101. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.65.040101>.
6. Zhou L., Song H.S. Entanglement induced by a single-mode thermal field and criteria for entanglement // *J. Opt.* 2002. Vol. B4. P. 425–429. DOI: <https://doi.org/10.1088/1464-4266/4/6/310>.
7. The entanglement of two dipole-dipole coupled in a cavity interacting with a thermal field / L.S. Aguiar [et al.] // *J. Opt.* 2015. Vol. B7. P. 769–771. DOI: <https://doi.org/10.1088/1464-4266/7/12/049>.
8. The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms interacting with a thermal field via two-photon process / X.-P. Liao [et al.] // *Chin. Physics.* 2008. Vol. B17. P. 2137–2142. DOI: <https://doi.org/10.1088/1674-1056/17/6/032>.
9. Башкиров Е.К., Мастюгин М.С. Влияние диполь-дипольного взаимодействия и атомной когерентности на перепутывание двух атомов с вырожденными двухфотонными переходами // *Оптика и спектроскопия.* 2014. Т. 116. № 4. P. 678–683. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0030400X14040067>.
10. Bashkurov E.K., Mastuygin M.S. The dynamics of entanglement in two-atom Tavis–Cummings model with non-degenerate two-photon transitions for four-qubits initial atom-field entangled states // *Optics Communications.* 2014. Vol. 313. P. 170–174. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2013.10.007>.
11. Bashkurov E.K., Mastuygin M.S. The influence of atomic coherence and dipole-dipole interaction on entanglement of two qubits with nondegenerate two-photon transitions // *Pramana-Journal of Physics.* 2015. Vol. 84. P. 127–135. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12043-014-0836-0>.
12. Bashkurov E.K., Mastuygin M.S. Entanglement between two qubits induced by thermal field // *Journal of Physics: Conference Series.* 2016. Vol. 735. P. 012025. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/735/1/012025>.
13. Hu Y.-H., Fang M.-F. Control of entanglement between two atoms by the Stark shift // *Chin. Phys. B.* 2010. Vol. 19 (7). P. 070302. DOI: <https://doi.org/10.1088/1674-1056/19/7/070302>.
14. Bashkurov E.K. Thermal entanglement between a Jaynes–Cummings atom and an isolated atom // *Intern. J. Theor. Phys.* 2018. Vol. 57 (12). P. 3761–3771. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10773-018-3888-y>.
15. Zhang J.S., Chen A.X., Wu K.H. Influence of the Stark shift on entanglement sudden death and birth in cavity QED // *Chin. Phys. Lett.* 2011. Vol. 28. P. 010301. DOI: <https://doi.org/10.1088/0256-307X/28/1/010301>.
16. Yöncü M.Y., Yu T., Eberly J.H. Sudden death of entanglement of two Jaynes–Cummings atoms // *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 2006. Vol. 39. P. 621–625. DOI: <https://doi.org/10.12693/APhysPolA.125.1069>.
17. Yöncü M.Y., Yu T., Eberly J.H. Pairwise concurrence dynamics: a four-qubit model // *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 2007. Vol. 40. P. 45–59. DOI: <https://doi.org/10.1088/0953-4075/40/9/S02>.
18. Effect of the Stark shift on entanglement in a double two-photon JC model / Y.H. Hu [et al.] // *Journal of Modern Optics.* 2008. Vol. 55 (21). P. 3551–3562. DOI: <https://doi.org/10.1080/09500340802337382>.
19. Sudden death and long-lived entanglement between two atoms in a double JC model system / Y.-H. Hu [et al.] // *Int. J. Theor. Phys.* 2008. Vol. 47. P. 2554–2565. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10773-008-9689-y>.
20. Du M., Fang M.-F., Liu X. Sudden birth of entanglement between two atoms in a double JC model // *Chin. Opt. Lett.* 2009. Vol. 7 (5). P. 443–445. DOI: <https://doi.org/10.3788/COL20090705.0443>.

21. Xie Q., Fang M.-F. Entanglement Dynamics of the double intensity-dependent coupling Jaynes–Cummings models // *Int. J. Theor. Phys.* 2012. Vol. 51. P. 778–786. DOI: <https://doi.org/10.7498/aps.62.074202>.
22. Xie Q., Fang M.-F. Entanglement dynamics of atoms in double Jaynes–Cummings models with Kerr medium // *Commun. Theor. Phys.* 2010. Vol. 54 (5). P. 840–844. DOI: <https://doi.org/10.7498/aps.62.110301>.
23. Geometry in the entanglement dynamics of the double Jaynes–Cummings model / A.R. Vieira [et al.] // *Braz. J. Phys.* 2014. Vol. 44. P. 19–29. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13538-013-0174-6>.
24. Baghshahi H.R., Tavassoly M.Z., Faghihi M.J. Entanglement criteria of two two-level atoms interacting with two coupled modes // *Int. J. Theor. Phys.* 2015. Vol. 54 (8), P. 2839–2854. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10773-015-2520-7>.
25. Dynamics of two qubits coupled independently to cavities in the ultrastrong coupling regime: Analytical results / W.-T. Zhu [et al.] // *Chin. Phys. Lett.* 2016. Vol. 33 (5). P. 050302. DOI: <https://doi.org/10.1088/0256-307X/33/5/050302>.
26. Bashkirov E.K., Evseev M.M. The influence of dipole-dipole interaction on entanglement of two superconducting qubits in the framework of double Jaynes–Cummings model // *J. Phys.: Conference Ser.* 2017. Vol. 917 (6). P. 062011. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/917/6/062011>.
27. Bashkirov E.K., Evseev M.M. Entanglement in a detuned double Jaynes–Cummings model // *Progress in Biomedical Optics and Imaging – Proceedings of SPIE*. 2019. Vol. 11066. P. 110660J. DOI: <https://doi.org/10.1117/12.2520115>.
28. Bashkirov E.K. Entanglement between two dipole-coupled qubits interacting with two independent slightly detuned cavity modes // *Intern. J. Theor. Phys.* 2019. Vol. 58 (7). P. 2346–2356. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10773-019-04126-3>.

References

1. Buluta I., Ashab S., Nori F. Neutral and artificial atoms for quantum computation. *Rep. Prog. Phys.*, 2011, vol. 74, p. 104401. DOI: <https://doi.org/10.1088/0034-4885/74/10/104401>.
2. Xiang Z.-L. et al. Hybrid quantum circuits: Superconducting circuits interacting with other quantum systems. *Rev. Mod. Phys.*, 2013, vol. 85, pp. 623–653. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.85.623>.
3. Georgescu I.M., Ashhab S., Nori F. Quantum simulation. *Rev. Mod. Phys.*, 2014, vol. 88, pp. 153–186. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.153>.
4. Plenio M.B. et al. Cavity-loss-induced generation of entangled atoms. *Phys. Rev.*, 1999, vol. A59, p. 2468. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.59.2468>.
5. Kim M.S. et al. Entanglement induced by a single-mode heat environment. *Phys. Rev.*, 2002, vol. A65, p. 040101. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.65.040101>.
6. Zhou L., Song H.S. Entanglement induced by a single-mode thermal field and criteria for entanglement. *J. Opt.*, 2002, vol. B4, pp. 425–429. DOI: <https://doi.org/10.1088/1464-4266/4/6/310>.
7. Aguiar L.S. et al. The entanglement of two dipole-dipole coupled in a cavity interacting with a thermal field. *J. Opt.*, 2015, vol. B7, pp. 769–771. DOI: <https://doi.org/10.1088/1464-4266/7/12/049>.
8. Liao X.-P. et al. The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms interacting with a thermal field via two-photon process. *Chin. Physics*, 2008, vol. B17, pp. 2137–2142. DOI: <https://doi.org/10.1088/1674-1056/17/6/032>.
9. Bashkirov E.K., Mastjugin M.S. The effect of dipole-dipole interaction and atomic coherence on the entanglement of two atoms with degenerate two-photon transitions. *Optika i spektroskopija*, 2014, vol. 116, no. 4, pp. 678–683. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0030400X14040067>. (In Russ.)
10. Bashkirov E.K., Mastjugin M.S. The dynamics of entanglement in two-atom Tavis–Cummings model with non-degenerate two-photon transitions for four-qubits initial atom–field entangled states. *Optics Communications*, 2014, vol. 313, pp. 170–174. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2013.10.007>.
11. Bashkirov E.K., Mastjugin M.S. The influence of atomic coherence and dipole-dipole interaction on entanglement of two qubits with nondegenerate two-photon transitions. *Pramana-Journal of Physics*, 2015, vol. 84, pp. 127–135. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12043-014-0836-0>.
12. Bashkirov E.K., Mastjugin M.S. Entanglement between two qubits induced by thermal field. *Journal of Physics: Conference Series*, 2016, vol. 735, p. 012025. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/735/1/012025>.
13. Hu Y.-H., Fang M.-F. Control of entanglement between two atoms by the Stark shift. *Chin. Phys. B*, 2010, vol. 19 (7), p. 070302. DOI: <https://doi.org/10.1088/1674-1056/19/7/070302>.
14. Bashkirov E.K. Thermal entanglement between a Jaynes–Cummings atom and an isolated atom. *Intern. J. Theor. Phys.*, 2018, vol. 57 (12), pp. 3761–3771. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10773-018-3888-y>.
15. Zhang J.S., Chen A.X., Wu K.H. Influence of the Stark shift on entanglement sudden death and birth in cavity QED. *Chin. Phys. Lett.*, 2011, vol. 28, p. 010301. DOI: <https://doi.org/10.1088/0256-307X/28/1/010301>.
16. Yöncac M.Y., Yu T., Eberly J.H. Sudden death of entanglement of two Jaynes–Cummings atoms. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, 2006, vol. 39, pp. 621–625. DOI: <https://doi.org/10.12693/APhysPolA.125.1069>.
17. Yöncac M.Y., Yu T., Eberly J.H. Pairwise concurrence dynamics: a four-qubit model. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, 2007, vol. 40, pp. 45–59. DOI: <https://doi.org/10.1088/0953-4075/40/9/S02>.
18. Hu Y.H. et al. Effect of the Stark shift on entanglement in a double two-photon JC model. *Journal of Modern Optics*, 2008, vol. 55 (21), pp. 3551–3562. DOI: <https://doi.org/10.1080/09500340802337382>.
19. Hu Y.-H. et al. Sudden death and long-lived entanglement between two atoms in a double JC model system. *Int. J. Theor. Phys.*, 2008, vol. 47, pp. 2554–2565. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10773-008-9689-y>.

20. Du M., Fang M.-F., Liu X. Sudden birth of entanglement between two atoms in a double JC model. *Chin. Opt. Lett.*, 2009, vol. 7 (5), pp. 443–445. DOI: <https://doi.org/10.3788/COL20090705.0443>.
21. Xie Q., Fang M.-F. Entanglement Dynamics of the double intensity-dependent coupling Jaynes–Cummings models. *Int. J. Theor. Phys.*, 2012, vol. 51, pp. 778–786. DOI: <https://doi.org/10.7498/aps.62.074202>.
22. Xie Q., Fang M.-F. Entanglement dynamics of atoms in double Jaynes–Cummings models with Kerr medium. *Commun. Theor. Phys.*, 2010, vol. 54 (5), pp. 840–844. DOI: <https://doi.org/10.7498/aps.62.110301>.
23. Vieira A.R. et al. Geometry in the entanglement dynamics of the double Jaynes–Cummings model. *Braz. J. Phys.*, 2014, vol. 44, pp. 19–29. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13538-013-0174-6>.
24. Baghshahi H.R., Tavassoly M.Z., Faghihi M.J. Entanglement criteria of two two-level atoms interacting with two coupled modes. *Int. J. Theor. Phys.*, 2015, vol. 54 (8), pp. 2839–2854. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10773-015-2520-7>.
25. Zhu W.-T. et al. Dynamics of two qubits coupled independently to cavities in the ultrastrong coupling regime: Analytical results. *Chin. Phys. Lett.*, 2016, vol. 33 (5), p. 050302. DOI: <https://doi.org/10.1088/0256-307X/33/5/050302>.
26. Bashkirov E.K., Evseev M.M. The influence of dipole-dipole interaction on entanglement of two superconducting qubits in the framework of double Jaynes–Cummings model. *J. Phys.: Conference Ser.*, 2017, vol. 917 (6), p. 062011. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/917/6/062011>.
27. Bashkirov E.K., Evseev M.M. Entanglement in a detuned double Jaynes–Cummings model. *Progress in Biomedical Optics and Imaging – Proceedings of SPIE*, 2019, vol. 11066, p. 110660J. DOI: <https://doi.org/10.1117/12.2520115>.
28. Bashkirov E.K. Entanglement between two dipole-coupled qubits interacting with two independent slightly detuned cavity modes. *Intern. J. Theor. Phys.*, 2019, vol. 58 (7), pp. 2346–2356. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10773-019-04126-3>.

Physics of Wave Processes and Radio Systems

2020, vol. 23, no. 1, pp. 7–13

DOI 10.18469/1810-3189.2020.23.2.7-13

Received 13 January 2020
Accepted 18 February 2020

Thermal entanglement in a double Jaynes–Cummings model

Evgeny K. Bashkirov , Maria O. Guslyannikova

Samara National Research University
34, Moskovskoye shosse,
Samara, 443086, Russia

Abstract – In this paper, we have investigated the entanglement dynamics between two initially entangled qubits interacting with two independent thermal cavities modes in the framework of resonant double Jaynes–Cummings model. We obtain the exact solution for the model under consideration and derive the time dependence of the atom-atom negativity. Results reveal that for entangled atoms the initial atomic quantum correlations can partially restore its original values for a finite interval of time, even for relatively high cavity temperatures.

Keywords – double Jaynes–Cummings model, two-level atoms, atom-atom entanglement, negativity, thermal fields.

Информация об авторах

Башкиров Евгений Константинович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей и теоретической физики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева, г. Самара, Россия.

Область научных интересов: квантовая оптика и квантовая радиофизика, квантовая информатика, теория неравновесных явлений.

E-mail: bash@samsu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2569-1322>

Гусляникова Мария Олеговна, аспирант 3-го года обучения кафедры общей и теоретической физики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева, г. Самара, Россия.

Область научных интересов: квантовая оптика и квантовая радиофизика, квантовая информатика.

E-mail: ssau@ssau.ru

Information about the Authors

Evgeny K. Bashkirov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, Samara, Russia.

Research interests: quantum optics and quantum radiophysics, quantum informatics, theory of nonequilibrium phenomena.

E-mail: bash@samsu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2569-1322>

Maria O. Guslyannikova, 3-year of study postgraduate student of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, Samara, Russia.

Research interests: quantum optics and quantum radiophysics, quantum informatics.

E-mail: ssau@ssau.ru