

Бистабильный осциллятор Дюффинга в дискретном времени

В.В. Зайцев 

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева
443086, Россия, г. Самара,
Московское шоссе, 34

Аннотация – В дискретном времени рассмотрена динамика колебательной системы с мягкой кубически-нелинейной возвращающей силой – бистабильного осциллятора Дюффинга. За основу математического анализа принята непрерывно-временная модель в форме уравнения Дюффинга. Переход к дискретному времени в уравнении проведен с использованием функции Грина линейных колебаний в окрестностях минимумов бистабильного потенциала. Такой подход к дискретизации позволил ввести в рассмотрение новый вариант нелинейной динамической системы – бистабильного дискретного осциллятора Дюффинга. Показано, что бистабильный дискретный осциллятор Дюффинга адекватно воспроизводит характеристики регулярных и хаотических колебаний аналогового прототипа.

Ключевые слова – нелинейные колебания, бистабильный потенциал, уравнение Дюффинга, дискретное время, дискретные отображения, динамический хаос, отображения Пуанкаре.

Введение

Осциллятор Дюффинга, наряду с осциллятором ван дер Поля, является, пожалуй, наиболее известной моделью теории нелинейных колебаний. Он введен в рассмотрение при исследованиях колебаний механических систем с кубически-нелинейной жесткостью пружины [1; 2]. В безразмерных переменных осциллятор представляет уравнение Дюффинга

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \delta \frac{dx}{dt} + x + x^3 = E \cos(\omega_s t), \quad (1)$$

где δ – константа линейной диссипации; E и ω_s – амплитуда и частота внешнего воздействия. Уравнение (1) широко используется также при описании явления нелинейного резонанса в радиотехнике [3] и других физических приложениях [4].

Линейная жесткость в (1) положительна. В отличие от этого, в работе [5] (см. также [6; 7]) рассмотрена бистабильная магнитоупругая система (упругая балка в поле двух постоянных магнитов) с отрицательной линейной жесткостью, в которой колебания моделируются уравнением Дюффинга вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \delta \frac{dx}{dt} - x + x^3 = E \cos(\omega_s t). \quad (2)$$

В отсутствие внешнего воздействия система (2) релаксирует к одному из двух состояний равновесия: $X_{\pm} = \pm 1$. Результаты численного интегрирования уравнения (2) демонстрируют наличие в системе режимов вынужденных колебаний с хаотическими переходами между окрестностями X_{\pm} .

Таким образом, «мягкий» осциллятор Дюффинга в форме (2) представляет интерес для численных экспериментов с бистабильными системами, в том числе для исследований индуцированных шумом переходов [8] и стохастического резонанса [9]. При этом такие исследования имеет смысл проводить с использованием образов осциллятора в дискретном времени – дискретных отображений осциллятора.

В статье [10] дискретное отображение осциллятора Дюффинга с положительной жесткостью (1) получено на основе принципа сохранения в процессе временной дискретизации импульсного отклика линейной системы-прототипа. В настоящем сообщении такой подход применен для построения дискретного отображения осциллятора с отрицательной жесткостью («мягкого» осциллятора).

1. Физически обоснованная дискретизация времени

В качестве порождающего движения рассмотрим собственные осцилляции системы (2) в окрестностях состояний равновесия X_{\pm} . Они описываются однородным линеаризованным уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (3)$$

где $\omega_0 = \sqrt{3X_{\pm}^2 - 1}$ и $Q = \omega_0 / \delta$ – частота и добротность осцилляций.

Уравнение (2) с учетом (3) преобразуем к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 G(x) + \omega_0^2 E \cos(\omega_s t). \quad (4)$$

Здесь нелинейная функция

$$G(x) = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{x^2}{3} \right) x, \quad (5)$$

а для амплитуды внешнего воздействия оставлено прежнее обозначение. Предполагая в дальнейшем переход к дискретному времени с интервалом дискретизации Δ , введем в уравнение (4) безразмерную временную переменную $\tau = t/\Delta$ и запишем его в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} + 2\pi \frac{\Omega_0}{Q} \frac{dx}{d\tau} + 4\pi^2 \Omega_0^2 x = \\ = 4\pi^2 \Omega_0^2 G(x) + 4\pi^2 \Omega_0^2 E \cos(2\pi \Omega_s \tau). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\Omega_0 = \omega_0 / \omega_d$ – собственная частота, измеряемая в единицах частоты дискретизации $\omega_d = 2\pi / \Delta$, $\alpha = \exp(-\pi \Omega_0 / Q)$ – параметр линейной диссипации.

Теперь уравнение движения (6) имеет вид, стандартный для осциллятора с нелинейной реактивностью, и метод статьи [10], основанный на использовании функции Грина уравнения (3), приводит к разностному уравнению для дискретных отсчетов $x_n = x(\tau_n)$ осцилляций

$$\begin{aligned} x_n - 2\alpha \cos(2\pi \Omega_0) x_{n-1} + \alpha^2 x_{n-2} = \\ = \lambda G(x_{n-1}) + \lambda E \cos(2\pi \Omega_s (n-1)), \end{aligned} \quad (7)$$

где параметр $\lambda = 2\pi \Omega_0 \alpha \sin(2\pi \Omega_0)$.

Динамическую систему, функционирующую в дискретном времени в соответствии с уравнением движения (7), в дальнейшем будем обозначать как дискретный осциллятор Дюффинга (ДОД), указывая при необходимости на отрицательную жесткость прототипа в непрерывном времени. Пользуясь терминологией нелинейной динамики, можно говорить также о дискретном отображении осциллятора Дюффинга.

2. Регулярная динамика ДОД

Нетрудно показать, что в автономном режиме уравнение (7), помимо неустойчивого $X_0 = 0$, допускает два устойчивых стационарных решения (для них сохранены прежние обозначения):

$$X_{\pm} = \pm \sqrt{3 - 2\lambda^{-1} \left(1 - 2\alpha \cos(2\pi \Omega_0) + \alpha^2 \right)}. \quad (8)$$

Они незначительно отличаются от значений $X_{\pm} = \pm 1$, наблюдаемых в осцилляторе (2). Напри-

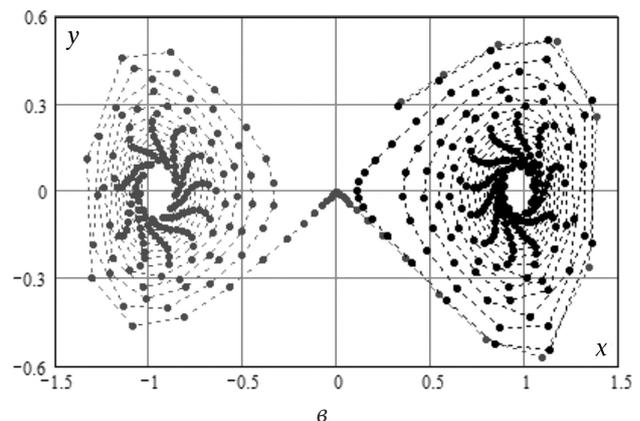
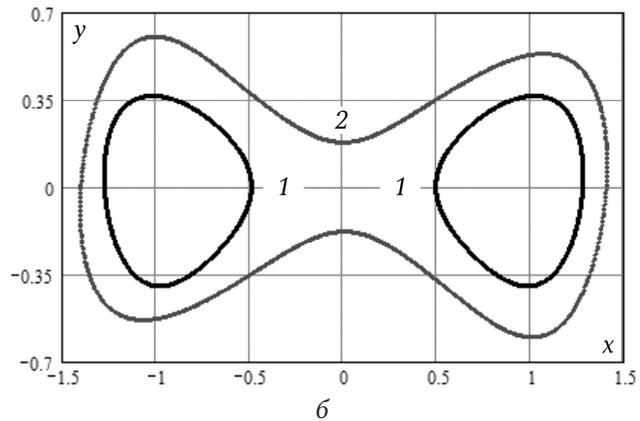
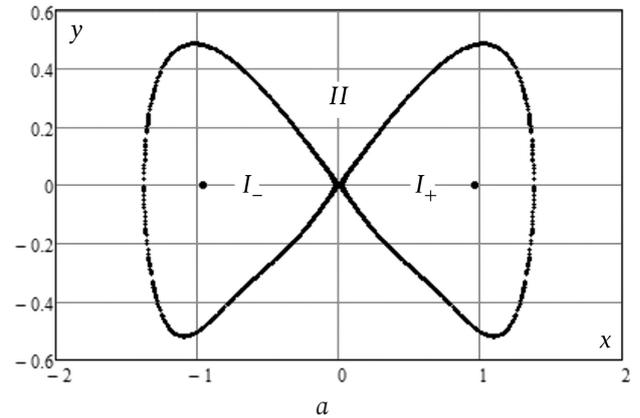


Рис. 1. Фазовые плоскости ДОД
 Fig. 1. Phase planes of discrete Duffing oscillator

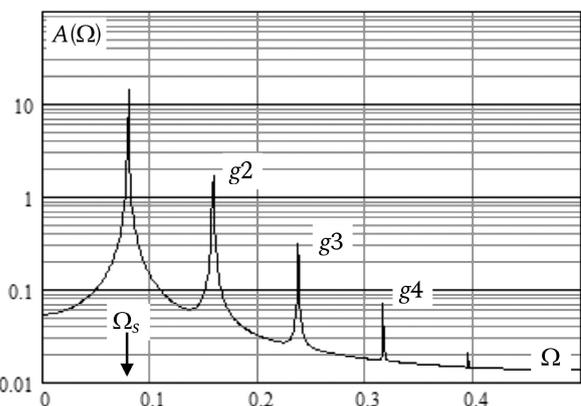


Рис. 2. Амплитудный спектр колебаний типа 1
 Fig. 2. The amplitude spectrum of the oscillations of type 1

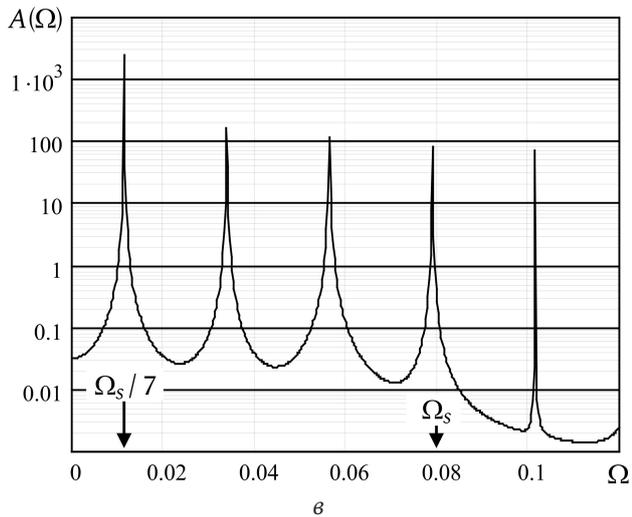
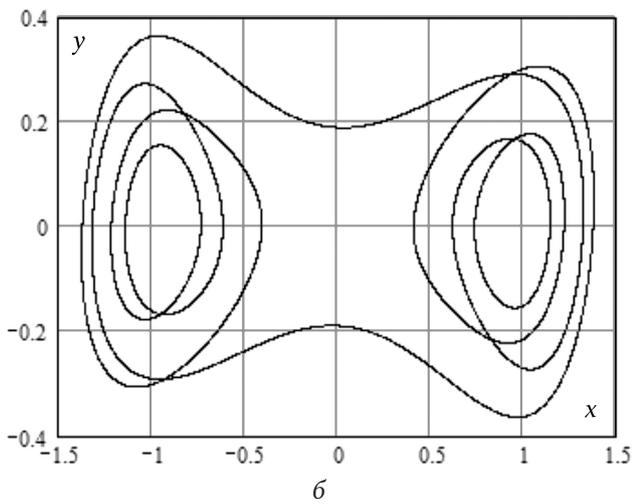
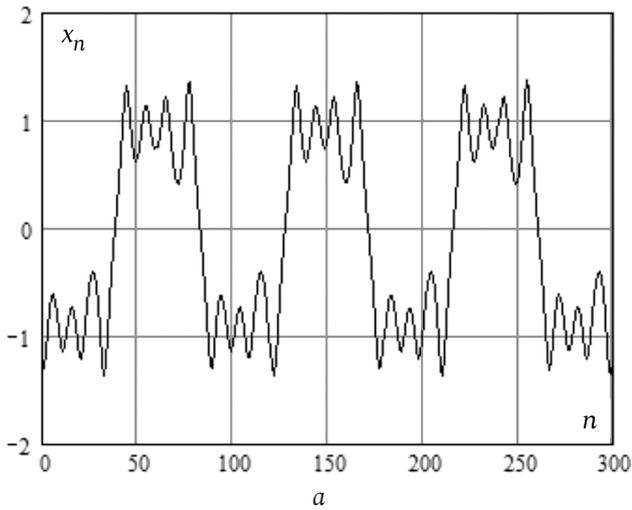


Рис. 3. Реализация (а), траектория (б) и амплитудный спектр (в) колебаний типа 2
Fig. 3. Realization (a), trajectory (b) and amplitude spectrum (c) of type 2 oscillations

мер, при $\Omega_0 = 0,1$ и $Q = 30$ $X_{\pm} = \pm 0,965$. При переходе к непрерывному времени, т. е. при $\Omega_0 \rightarrow 0$, $X_{\pm} \rightarrow \pm 1$. Таким образом, в рамках предложенного способа дискретизации времени стационарные

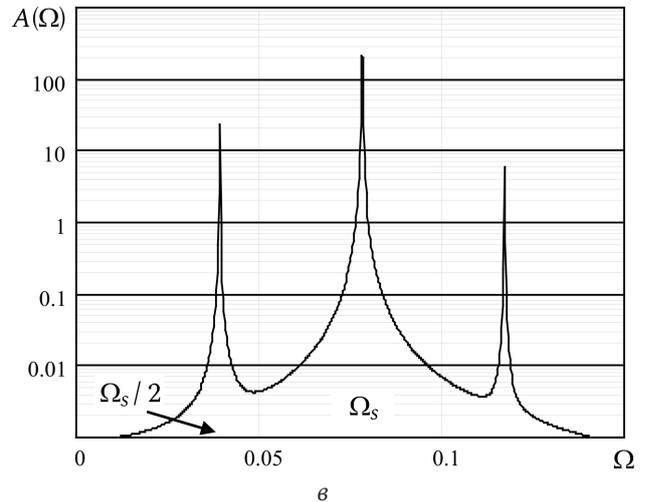
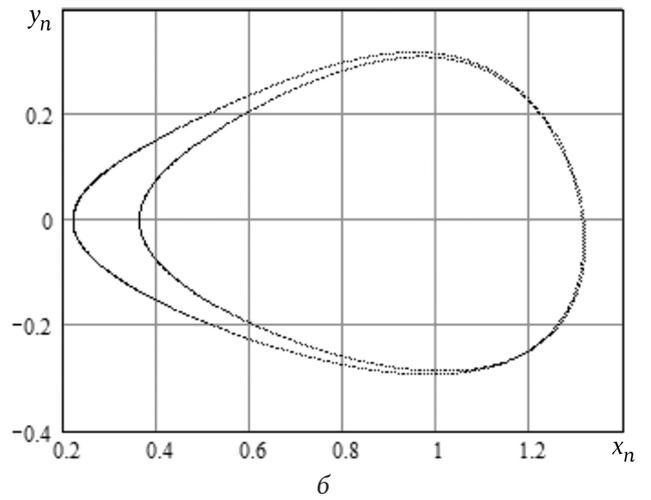
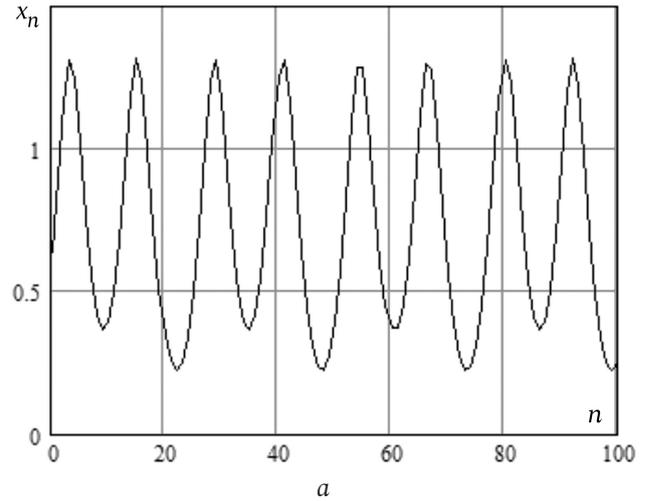


Рис. 4. Реализация (а), траектория (б) и амплитудный спектр (в) колебаний с удвоением периода
Fig. 4. Realization (a), trajectory (b) and amplitude spectrum (c) of oscillations with doubling the period

состояния осциллятора испытывают лишь слабые возмущения.

На рис. 1, а на фазовой плоскости ДОД показаны состояния $X_{\pm} = \pm 0,965$ и гомоклиническая орбита состояния $X_0 = 0$. Гомоклиническая орбита делит

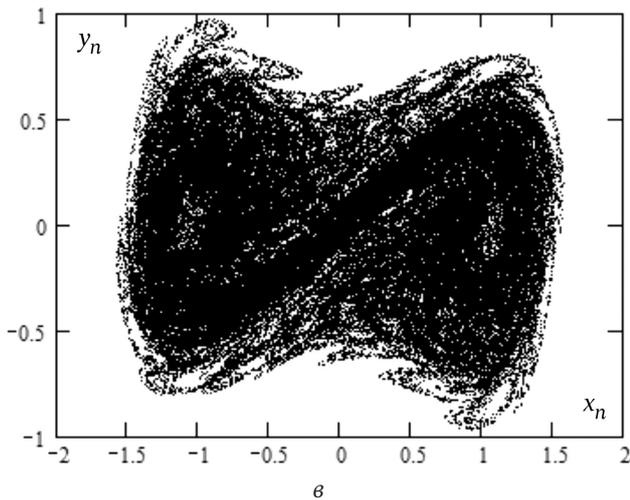
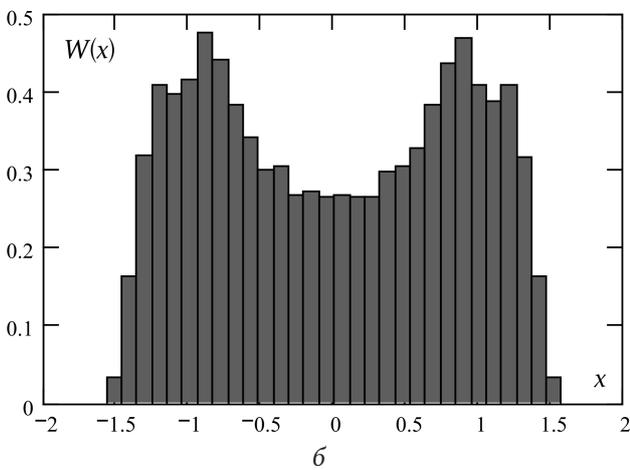
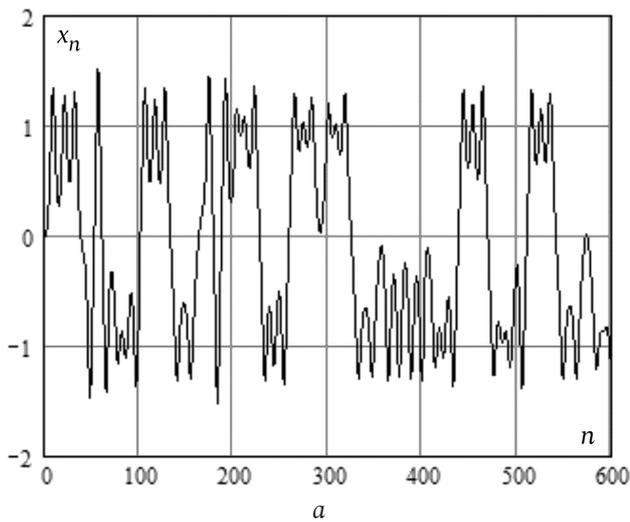


Рис. 5. Характеристики хаотических колебаний
 Fig. 5. Characteristics of chaotic oscillations

фазовую плоскость на области I_- , I_+ и II . Траектории консервативного осциллятора ($Q \rightarrow \infty$) на рис. 1, б в зависимости от начальных условий либо локализованы в областях I_- или I_+ (локальные осцилляции 1 в окрестностях стационарных состояний), либо принадлежат области II (глобальные осцилляции 2 между состояниями X_{\pm}).

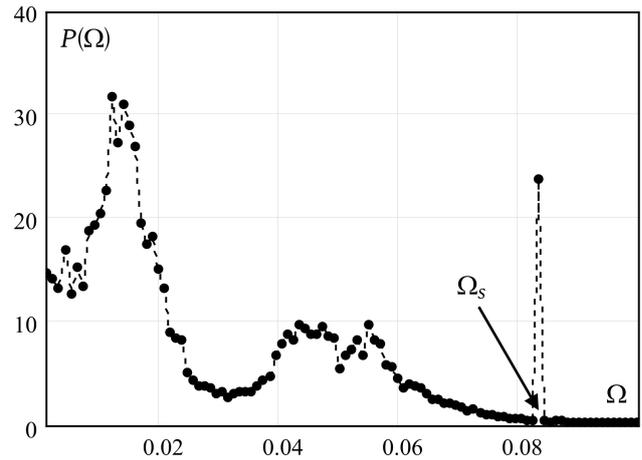


Рис. 6. Спектр мощности хаотических колебаний
 Fig. 6. Power spectrum of chaotic oscillations

Наличие диссипации приводит систему в одно из устойчивых состояний (рис. 1, в).

В режиме внешнего воздействия ДОД (7) демонстрирует различные варианты ангармонических колебаний. В частности, траектории области 1 – это простейшие нелинейные осцилляции со спектром, обогащенным гармониками, как это следует из рис. 2, на котором представлен амплитудный спектр $A(\Omega)$ вынужденных колебаний ДОД с параметрами $\Omega_0 = 0,1$, $Q = 30$, $\Omega_s = 0,079$, $E = 0,05$.

При увеличении амплитуды внешнего воздействия до значения $E = 0,07$ в осцилляторе наблюдаются вынужденные колебания, имеющие траекторию в области 2, показанную на рис. 3, б. Отрезок их реализации изображен на рис. 3, а. Амплитудный спектр на рис. 3, в указывает на то, что основным типом движения здесь являются субгармонические колебания с частотой $\Omega_s/7$, составляющей одну седьмую часть частоты внешнего воздействия. В окрестностях потенциальных ям они сопровождаются более высокочастотными колебаниями с траекториями области 1 с частотой, близкой к частоте Ω_0 .

Переход к траекториям в области 2 в ряде случаев сопровождается бифуркациями удвоения периода траекторий в области 1. Рис. 4 иллюстрирует этот эффект для системы с параметрами $\Omega_0 = 0,1$, $Q = 30$, $\Omega_s = 0,078$, $E = 0,07$. С ростом амплитуды внешнего воздействия E серия повторных бифуркаций приводит к переходу от периодического движения к хаотическому.

3. Хаотическая динамика ДОД

Пример типичной реализации хаотических колебаний дан на рис. 5, а для осциллятора с параметрами $\Omega_0 = 0,1$, $Q = 30$, $\Omega_s = 0,0833$, $E = 0,11$. Гистограммная оценка плотности вероятности

процесса x_n приведена на рис. 5, б, и фазовый портрет колебаний – на рис. 5, в.

Визуально реализация процесса указывает на его нерегулярность: осцилляции в окрестностях состояний X_{\pm} сопровождаются хаотическими переходами между ними. Фрактальная структура хаотического аттрактора на рис. 5, в характеризуется значением корреляционного показателя $\nu = 1,88 \pm 0,01$.

На рис. 6 приведена периодограммная оценка спектра мощности процесса x_n . Как видно из графика, спектр содержит дискретную линию на частоте внешнего воздействия $\Omega_s = 0,08333$ и сплошную компоненту. Наличие сплошной части спектра является еще одним эвристическим критерием динамического хаоса [11].

4. Отображение Пуанкаре хаотических колебаний ДОД

Для режима хаотических колебаний, помимо аттрактора на рис. 5, в, приведем также отображение Пуанкаре осцилляций. Введя фазовую переменную θ_n , ДОД (7) представим в виде автономной системы

$$\begin{aligned} x_n - 2\alpha \cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} + \alpha^2 x_{n-2} &= \\ = \lambda G(x_{n-1}) + \lambda E \cos(\theta_{n-1}), & (9) \\ 4\pi\Omega_0 y_n = 3x_n - 4x_{n-1} + x_{n-2}, & \\ \theta_n = \theta_{n-1} + 2\pi\Omega_s. & \end{aligned}$$

Отображения Пуанкаре формируются в сечениях трехмерного пространства (x, y, θ) динамической системы (9) плоскостями $\theta_n : \text{mod}(2\pi) = \text{const}$. На рис. 7 представлено сечение Пуанкаре ДОД с параметрами $\Omega_0 = 0,1$, $Q = 30$, $\Omega_s = 0,0833$,

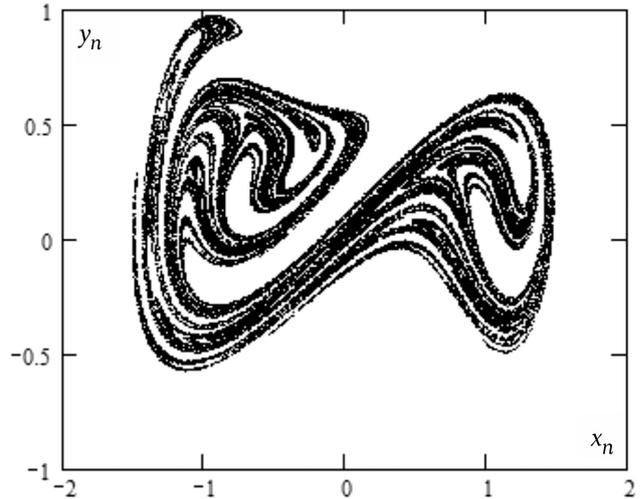


Рис. 7. Отображение Пуанкаре ДОД
Fig. 7. Poincaré mapping of discrete Duffing oscillator

$E = 0,11$, плоскостью $\theta_n : \text{mod}(2\pi) = 2\pi/3$. Корреляционный показатель для этого отображения имеет значение $\nu = 1,72 \pm 0,01$.

Визуально и по значению корреляционного показателя представленное здесь отображение Пуанкаре соответствует приведенным в [6].

Заключение

Введенный в рассмотрение вариант осциллятора Дюффинга с мягкой восстанавливающей силой, функционирующий в дискретном времени, – «мягкий» дискретный осциллятор Дюффинга – предлагается использовать для исследования физических явлений в бистабильных колебательных системах, находящихся под действием детерминированных и случайных сигналов. В режиме генерации динамического хаоса бистабильный ДОД может служить источником псевдослучайных сигналов.

Список литературы

1. Kovacic I., Brennan M.J. The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and their Behavior. New York: John Wiley & Sons, 2011. 386 p.
2. Hayashi C. Nonlinear oscillations in physical systems. New York: McGraw-Hill, 1964. 432 p.
3. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. Изд. 2-е. М.: Физматлит, 2005. 292 с.
4. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. Изд. 2-е. М.: Либроком, 2010. 552 с.
5. Moon F.C., Holmes P.J. A magnetoelastic strange attractor // J. Sound Vibration. 1979. Vol. 65. № 2. P. 275–296. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(79\)90520-0](https://doi.org/10.1016/0022-460X(79)90520-0).
6. Moon F.C. Chaotic Vibrations. New York: John Wiley & Sons, 1987. 312 p.
7. Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. 5th ed. Berlin: Springer-Verlag, 1996. 462 p.
8. Horsthemke W., Lefever R. Noise-Induced Transitions. Berlin: Springer-Verlag, 2006. 318 p.
9. Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка / В.С. Анищенко [и др.] // УФН. 1999. Т. 169. № 1. С. 7–38.
10. Зайцев В.В., Шилин А.Н., Юдин А.Н. Отображение осциллятора Дюффинга в дискретном времени // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2014. Т. 17. № 2. С. 40–43.
11. Многоликий хаос / Е.Ф. Мищенко [и др.]. М.: Физматлит, 2012. 429 с.

References

1. Kovacic I., Brennan M.J. *The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and their Behavior*. New York: John Wiley & Sons, 2011, 386 p.
2. Hayashi C. *Nonlinear Oscillations in Physical Systems*. New York: McGraw-Hill, 1964, 432 p.
3. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Ryskin N.M. *Nonlinear Vibrations*. 2nd ed. Moscow: Fizmatlit, 2005, 292 p. (In Russ.)
4. Landa P.S. *Nonlinear Waves*. 2nd ed. Moscow: Librokom, 2010, 552 p. (In Russ.)
5. Moon F.C., Holmes P.J. A magnetoelastic strange attractor. *J. Sound Vibration*, 1979, vol. 65, no. 2, pp. 275–296. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(79\)90520-0](https://doi.org/10.1016/0022-460X(79)90520-0).
6. Moon F.C. *Chaotic Vibrations*. New York: John Wiley & Sons, 1987, 312 p.
7. Guckenheimer J., Holmes P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. 5th ed. Berlin: Springer-Verlag, 1996, 462 p.
8. Horsthemke W., Lefever R. *Noise-Induced Transitions*. Berlin: Springer-Verlag, 2006, 318 p.
9. Anischenko V.S. et al. Stochastic resonance noise enhanced order. *UFN*, 1999, vol. 169, no. 1, pp. 7–38. (In Russ.)
10. Zaitsev V.V., Shilin A.N., Judin A.N. Showing Duffing oscillator in discrete time. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2014, vol. 17, no. 2, pp. 40–43. (In Russ.)
11. Mischenko E.F. et al. *The Many Faces of Chaos*. Moscow: Fizmatlit, 2012, 429 p. (In Russ.)

Physics of Wave Processes and Radio Systems 2020, vol. 23, no. 1, pp. 52–57

DOI 10.18469/1810-3189.2020.23.1.52-57

Received 17 December 2019

Accepted 14 January 2020

The bistable Duffing oscillator in discrete time

V.V. Zaitsev 

Samara National Research University
34, Moskovskoye shosse,
Samara, 443086, Russia

Abstract – The dynamics of an oscillatory system with a soft cubic-nonlinear return force – a bistable Duffing oscillator, in discrete time are consider. The mathematical analysis is based on a continuous-time model in the form of the Duffing equation. The transition to discrete time in the equation is performed using the Green function of linear oscillations in the vicinity of the minima of the bistable potential. This approach to sampling allowed us to introduce a new version of a nonlinear dynamic system – the bistable discrete Duffing oscillator. It is shown that the bistable discrete Duffing oscillator adequately reproduces the characteristics of regular and chaotic oscillations of the analog prototype.

Keywords – nonlinear oscillations, bistable potential, Duffing equation, discrete time, discrete mappings, dynamic chaos, Poincare mappings.

Информация об авторах

Зайцев Валерий Васильевич, 1952 г. р., с. Борское Куйбышевской области. Окончил Куйбышевский государственный университет (1975 г.) и аспирантуру при Горьковском государственном университете (1980 г., ГГУ, кафедра А.Н. Малахова). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ГГУ (1980 г.). Профессор кафедры оптики и спектроскопии Самарского университета. Автор более 200 научных работ.

Область научных интересов: автоколебательные системы, статистическая радиофизика, компьютерное моделирование в радиофизике.

E-mail: zaitsev@samsu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2544-8197>

Information about the Authors

Valery V. Zaitsev was born in Borskoye village of Kuibyshev region, in 1952. He graduated from the Kuibyshev State University in 1975 and post-graduated from the Gorky State University in 1980 (GSU, Department of A.N. Malakhov). He received the Ph.D. degree in physics and mathematics from GSU in 1980. He is currently a Professor of the Department of Optics and Spectroscopy, Samara University, Samara, Russia. He has authored more than 200 articles.

Research interests: self-oscillating systems, statistical radiophysics, and computer modeling in radiophysics.

E-mail: zaitsev@samsu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2544-8197>