

## Симметричные решения задачи синтеза трехзвенного ступенчатого СВЧ-фильтра Баттерворта

А.С. Арэфьев

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики  
443010, Россия, г. Самара,  
ул. Л. Толстого, 23

*Аннотация* – Показано, что задача синтеза трехзвенного ступенчатого СВЧ-фильтра Баттерворта имеет два симметричных решения с одинаковыми волновыми сопротивлениями крайних звеньев. Первому решению соответствует конфигурация фильтра с низкоомным центральным звеном. Второму решению соответствует конфигурация с высокоомным центральным звеном. Получены выражения для волновых сопротивлений звеньев фильтра. Приведены результаты расчета волновых сопротивлений.

*Ключевые слова* – ступенчатый СВЧ-фильтр Баттерворта, синтез ступенчатого СВЧ-фильтра.

### Введение

Ступенчатый СВЧ-фильтр представляет собой несколько регулярных отрезков линии передачи, последовательно включенных в волноводный тракт. Эти отрезки, являющиеся звеньями фильтра, имеют одинаковые электрические длины и различные волновые сопротивления. Такие фильтры предложены А. Л. Фельдштейном в 1959 году. Численный метод синтеза ступенчатых фильтров с произвольным количеством звеньев изложен в [1]. В настоящей работе получено аналитическое решение задачи синтеза трехзвенного ступенчатого СВЧ-фильтра с частотной характеристикой Баттерворта.

### 1. Постановка задачи

На рис. 1 изображена эквивалентная схема трехзвенного ступенчатого фильтра, включенного в линию передачи с волновым сопротивлением  $z_0$ . Волновые сопротивления звеньев фильтра обозначены через  $z_j$  ( $j = \overline{1,3}$ ). Предполагается, что звенья имеют одинаковую длину  $l$ .

Комплексные амплитуды прямых волн напряжения на входе и выходе фильтра связаны соотношением [1]

$$\dot{U}_0(0) = \frac{1}{2} \left( A_{11} + \frac{1}{z_0} A_{12} + z_0 A_{21} + A_{22} \right) \dot{U}_4(3l). \quad (1)$$

Здесь  $A_{mn}$  ( $m, n = 1, 2$ ) – элементы матрицы передачи фильтра  $\hat{A}$ , которая определяется как произведение матриц передачи звеньев

$$\hat{A} = \prod_{j=1}^3 \hat{A}^{(j)}, \quad (2)$$

где

$$\hat{A}^{(j)} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & iz_j \sin(\theta) \\ \frac{i}{z_j} \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (j = \overline{1,3}), \quad (3)$$

$i$  – мнимая единица,  $\theta$  – электрическая длина звена, выражающаяся через постоянную распространения волны  $\gamma$ :

$$\theta = \gamma l.$$

Соотношения (3) записаны при условии, что параметр  $\gamma$  является действительной величиной и принимает одинаковые значения для всех звеньев фильтра.

Подстановка (3) в (2) дает

$$A_{11} = \cos(\theta) \left[ \cos^2(\theta) - \left( \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3} \right) \sin^2(\theta) \right], \quad (4)$$

$$A_{12} = i \sin(\theta) \left[ (z_1 + z_2 + z_3) \cos^2(\theta) - \frac{z_1 z_3}{z_2} \sin^2(\theta) \right],$$

$$A_{21} = i \sin(\theta) \left[ \left( \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right) \cos^2(\theta) - \frac{z_2}{z_1 z_3} \sin^2(\theta) \right],$$

$$A_{22} = \cos(\theta) \left[ \cos^2(\theta) - \left( \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_3}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} \right) \sin^2(\theta) \right].$$

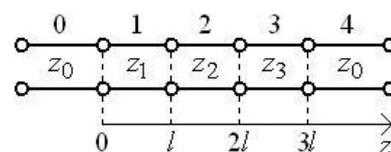


Рис. 1  
Fig. 1

С учетом (4) формулу (1) можно записать в виде

$$\frac{\dot{U}_0(0)}{\dot{U}_4(3l)} = \frac{1}{2} \left\{ \cos(\theta) \left[ 2 \cos^2(\theta) - \sigma^{[3]} \left( \frac{z_1}{z_2}, \frac{z_1}{z_3}, \frac{z_2}{z_3} \right) \sin^2(\theta) \right] + i \sin(\theta) \left[ \sigma^{[3]} \left( \frac{z_0}{z_1}, \frac{z_0}{z_2}, \frac{z_0}{z_3} \right) \cos^2(\theta) - \sigma^{[1]} \left( \frac{z_0 z_2}{z_1 z_3} \right) \sin^2(\theta) \right] \right\},$$

где введено обозначение

$$\sigma^{[n]}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n \left( x_j + \frac{1}{x_j} \right) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Рабочее затухание фильтра

$$L = \left| \dot{U}_0(0) / \dot{U}_4(3l) \right|^2$$

можно представить в виде многочлена по степеням  $\sin^2(\theta)$

$$L = 1 + \sum_{j=1}^3 C_j \sin^{2j}(\theta)$$

с коэффициентами

$$C_1 = \frac{1}{4} \left[ -6 - 2\sigma^{[3]} \left( \frac{z_1}{z_2}, \frac{z_1}{z_3}, \frac{z_2}{z_3} \right) + \sigma^{[3]} \left( \frac{z_0^2}{z_1^2}, \frac{z_0^2}{z_2^2}, \frac{z_0^2}{z_3^2} \right) + 2\sigma^{[3]} \left( \frac{z_0^2}{z_1 z_2}, \frac{z_0^2}{z_1 z_3}, \frac{z_0^2}{z_2 z_3} \right) \right],$$

$$C_2 = \frac{1}{4} \left[ 6 + 4\sigma^{[2]} \left( \frac{z_1}{z_2}, \frac{z_2}{z_3} \right) + 6\sigma^{[1]} \left( \frac{z_1}{z_3} \right) + \sigma^{[3]} \left( \frac{z_1^2}{z_2^2}, \frac{z_1^2}{z_3^2}, \frac{z_2^2}{z_3^2} \right) - 2\sigma^{[3]} \left( \frac{z_0^2}{z_1^2}, \frac{z_0^2}{z_2^2}, \frac{z_0^2}{z_3^2} \right) + 2\sigma^{[2]} \left( \frac{z_1^2}{z_2 z_3}, \frac{z_2^2}{z_1 z_2} \right) - 4\sigma^{[2]} \left( \frac{z_0^2}{z_1 z_2}, \frac{z_0^2}{z_2 z_3} \right) - 6\sigma^{[1]} \left( \frac{z_0^2}{z_1 z_3} \right) - 2\sigma^{[2]} \left( \frac{z_0^2 z_2}{z_1^2 z_3}, \frac{z_0^2 z_2}{z_1 z_3^2} \right) \right],$$

$$C_3 = \frac{1}{4} \left[ -2 - 2\sigma^{[2]} \left( \frac{z_1}{z_2}, \frac{z_2}{z_3} \right) - 4\sigma^{[1]} \left( \frac{z_1}{z_3} \right) - \sigma^{[3]} \left( \frac{z_1^2}{z_2^2}, \frac{z_1^2}{z_3^2}, \frac{z_2^2}{z_3^2} \right) + \sigma^{[3]} \left( \frac{z_0^2}{z_1^2}, \frac{z_0^2}{z_2^2}, \frac{z_0^2}{z_3^2} \right) - 2\sigma^{[2]} \left( \frac{z_1^2}{z_2 z_3}, \frac{z_2^2}{z_1 z_2} \right) + 2\sigma^{[2]} \left( \frac{z_0^2}{z_1 z_2}, \frac{z_0^2}{z_2 z_3} \right) + \right]$$

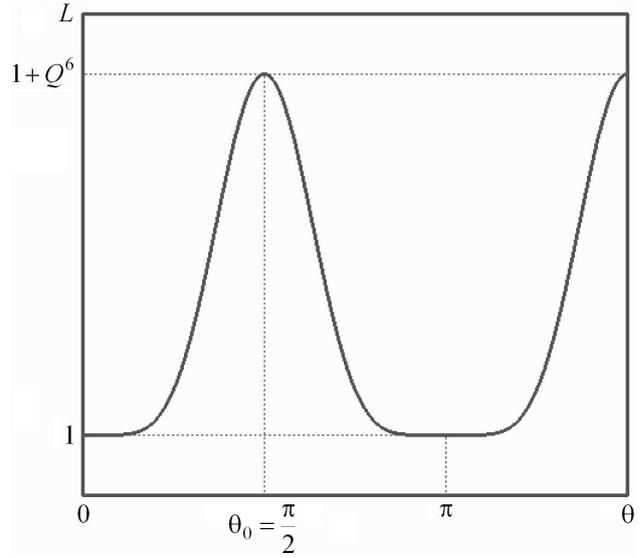


Рис. 2  
Fig. 2

$$+ 4\sigma^{[1]} \left( \frac{z_0^2}{z_1 z_3} \right) + 2\sigma^{[2]} \left( \frac{z_0^2 z_2}{z_1^2 z_3}, \frac{z_0^2 z_2}{z_1 z_3^2} \right) + \sigma^{[1]} \left( \frac{z_1^2 z_3^2}{z_0^2 z_2^2} \right)].$$

Легко убедиться в том, что величины  $C_j$  ( $j = \overline{1,3}$ ) удовлетворяют условиям

$$\sum_{j=1}^3 C_j = \frac{1}{4} \left[ \sigma^{[1]}(\psi) - 2 \right], \quad (6)$$

$$2C_1 + C_2 = \frac{1}{4} \left[ -6 + 2\sigma^{[1]} \left( \frac{z_1}{z_3} \right) + \sigma^{[3]} \left( \frac{z_1^2}{z_2^2}, \frac{z_1^2}{z_3^2}, \frac{z_2^2}{z_3^2} \right) + 2\sigma^{[2]} \left( \frac{z_1^2}{z_2 z_3}, \frac{z_2^2}{z_1 z_2} \right) - 2\sigma^{[1]} \left( \frac{z_0^2}{z_1 z_3} \right) - 2\sigma^{[2]} \left( \frac{z_0^2 z_2}{z_1^2 z_3}, \frac{z_0^2 z_2}{z_1 z_3^2} \right) \right], \quad (7)$$

где

$$\psi = \frac{z_1^2 z_3^2}{z_0^2 z_2^2}. \quad (8)$$

Рабочее затухание фильтра с частотной характеристикой Баттерворта задается соотношением

$$L = 1 + Q^6 \sin^6(\theta). \quad (9)$$

График функции  $L(\theta)$  приведен на рис. 2. Обозначим через  $\theta_0$ ,  $\gamma_0$  и  $\Lambda_0$  значения электрической длины звена, постоянной распространения и длины волны в линии передачи, соответствующие первому максимуму рабочего затухания фильтра. Как следует из рис. 2,  $\theta_0 = \pi/2$ . Тем самым длина звена:

$$l = \frac{\pi}{2\gamma_0} = \frac{\Lambda_0}{4}.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\sin^2(\theta)$  в выражениях (5) и (9), получаем систему нелинейных уравнений относительно волновых сопротивлений звеньев фильтра  $z_j$  ( $j = \overline{1,3}$ ):

$$C_1(z_1, z_2, z_3) = 0, \quad (10)$$

$$C_2(z_1, z_2, z_3) = 0, \quad (11)$$

$$C_3(z_1, z_2, z_3) = Q^6. \quad (12)$$

На основании (6), (10)–(12) выводим квадратное уравнение относительно параметра  $\psi$

$$\psi^2 - (2 + 4Q^6)\psi + 1 = 0.$$

Его решения

$$\psi^{(\pm)} = 1 + 2Q^6 \pm 2Q^3 \sqrt{1 + Q^6} = \left( \sqrt{1 + Q^6} \pm Q^3 \right)^2 \quad (13)$$

удовлетворяют условиям:

$$\psi^{(-)} = \left( \psi^{(+)} \right)^{-1}, \quad (14)$$

$$0 < \psi^{(-)} \left\langle 1, \psi^{(+)} \right\rangle 1. \quad (15)$$

Исходя из определения (8) величины  $\psi$ , можно выразить волновое сопротивление центрального звена фильтра  $z_2$  через волновые сопротивления крайних звеньев  $z_1, z_3$ :

$$z_2 = \frac{1}{\sqrt{\psi}} \frac{z_1 z_3}{z_0}. \quad (16)$$

С учетом (7), (16) можно записать систему уравнений (10)–(12) следующим образом:

$$C_1 = \frac{1}{4} \left[ -6 - 2\sigma^{[3]} \left( \sqrt{\psi} \frac{z_0}{z_1}, \sqrt{\psi} \frac{z_0}{z_3}, \frac{z_1}{z_3} \right) + \sigma^{[3]} \left( \frac{z_0^2}{z_1^2}, \frac{z_0^2}{z_3^2}, \psi \frac{z_0^4}{z_1^2 z_3^2} \right) + \right. \quad (17)$$

$$\left. + 2\sigma^{[3]} \left( \frac{z_0^2}{z_1 z_3}, \sqrt{\psi} \frac{z_0^3}{z_1^2 z_3}, \sqrt{\psi} \frac{z_0^3}{z_1 z_3^2} \right) \right] = 0,$$

$$2C_1 + C_2 = \frac{1}{4} \left[ -6 - 2\sigma^{[2]} \left( \frac{1}{\sqrt{\psi}} \frac{z_0}{z_1}, \frac{1}{\sqrt{\psi}} \frac{z_0}{z_3} \right) + 2\sigma^{[1]} \left( \frac{z_1}{z_3} \right) + \sigma^{[3]} \left( \psi \frac{z_0^2}{z_1^2}, \psi \frac{z_0^2}{z_3^2}, \frac{z_1^2}{z_3^2} \right) + \right. \quad (18)$$

$$\left. + 2\sigma^{[2]} \left( \sqrt{\psi} \frac{z_0 z_1}{z_3^2}, \sqrt{\psi} \frac{z_0 z_3}{z_1^2} \right) - 2\sigma^{[1]} \left( \frac{z_0^2}{z_1 z_3} \right) \right] = 0.$$

Очевидно, что система (17), (18) инвариантна относительно замены  $z_3 \leftrightarrow z_1$ . Запишем уравнение (17) двумя способами:

$$C_1(z_1, z_3) = 0, \quad (19)$$

$$C_1(z_3, z_1) = 0. \quad (20)$$

Выражая первый аргумент  $C_1$  из (18) и (19), получаем две одинаковые зависимости  $z_1(z_3)$  и  $z_3(z_1)$ . Если предположить, что система уравнений (17), (18) имеет хотя бы одно решение, то графики функций  $z_1(z_3)$  и  $z_3(z_1)$ , построенные на плоскости  $(z_1, z_3)$ , будут иметь по меньшей мере одну точку пересечения, располагающуюся на линии

$$z_3 = z_1. \quad (21)$$

Абсцисса и ордината данной точки задают искоемое решение уравнений (17), (18). Таким образом, если задача синтеза трехзвенного ступенчатого фильтра Баттерворта разрешима, то хотя бы одно ее решение соответствует симметричной конфигурации фильтра, в которой крайние звенья имеют одинаковые волновые сопротивления.

Производя замену (21), можно привести (18) к уравнению четвертой степени относительно неизвестной  $z_1$ :

$$2z_0^2 z_1^2 \frac{\psi}{1-\psi} (2C_1 + C_2) = \sum_{j=0}^3 \alpha_j z_1^j + z_1^4 = 0 \quad (22)$$

$$\text{с коэффициентами} \quad \alpha_0 = -\psi z_0^4, \quad \alpha_1 = -2\sqrt{\psi} z_0^3, \quad (23)$$

$$\alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 2\sqrt{\psi} z_0.$$

Легко показать, что при условии (21) левые части уравнений (17), (18) связаны соотношением

$$C_1 = \frac{\psi}{(1-\psi)^2} (2C_1 + C_2)^2.$$

Тем самым одни и те же значения волнового сопротивления  $z_1$  одновременно обращают в тождества уравнения (17), (18).

## 2. Решение задачи синтеза фильтра

Воспользуемся решением Декарта – Эйлера уравнения четвертой степени [2]. Введем обозначения:

$$\beta_0 = \alpha_0 - \frac{1}{4} \alpha_1 \alpha_3 + \frac{1}{16} \alpha_2 \alpha_3^2 - \frac{3}{256} \alpha_3^4, \quad (24)$$

$$\beta_1 = \alpha_1 - \frac{1}{2} \alpha_2 \alpha_3 + \frac{1}{8} \alpha_3^3, \quad \beta_2 = \alpha_2 - \frac{3}{8} \alpha_3^2.$$

Решения уравнения (22) имеют вид:

$$z_{1,1} = \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} - \text{sign}(\beta_1) \sqrt{y_3} - \frac{1}{4} \alpha_3, \quad (25)$$

$$z_{1,2} = \sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} + \text{sign}(\beta_1) \sqrt{y_3} - \frac{1}{4} \alpha_3, \quad (26)$$

$$z_{1,3} = -\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \text{sign}(\beta_1) \sqrt{y_3} - \frac{1}{4} \alpha_3, \quad (27)$$

$$z_{1,4} = -\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} - \text{sign}(\beta_1)\sqrt{y_3} - \frac{1}{4}\alpha_3. \quad (28)$$

Здесь  $y_j$  ( $j = \overline{1,3}$ ) – решения кубического уравнения

$$\sum_{j=0}^2 \delta_j y^j + y^3 = 0,$$

где

$$\delta_0 = -\frac{1}{64}\beta_1^2, \quad \delta_1 = -\frac{1}{4}\beta_0 + \frac{1}{16}\beta_2^2, \quad \delta_2 = \frac{1}{2}\beta_2. \quad (29)$$

Величины  $y_j$  ( $j = \overline{1,3}$ ) задаются соотношениями (решение Кардано [2]):

$$y_1 = \eta_1 + \eta_2 - \frac{1}{3}\delta_2, \quad (30)$$

$$y_{2,3} = -\frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2) \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}(\eta_1 - \eta_2) - \frac{1}{3}\delta_2.$$

Здесь

$$\eta_{1,2} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}\tau_0 \pm \sqrt{\varsigma}}, \quad (31)$$

$$\varsigma = \frac{1}{4}\tau_0^2 + \frac{1}{27}\tau_1^3, \quad (32)$$

$$\tau_0 = \delta_0 - \frac{1}{3}\delta_1\delta_2 + \frac{2}{27}\delta_2^3, \quad (33)$$

$$\tau_1 = \delta_1 - \frac{1}{3}\delta_2^2. \quad (34)$$

С учетом (23) формулы (24), (29), (32)–(34) дают

$$\beta_0 = -\frac{3}{16}\psi^2 z_0^4, \quad \beta_1 = \sqrt{\psi}(\psi - 2)z_0^3,$$

$$\beta_2 = -\frac{3}{2}\psi z_0^2, \quad \delta_0 = -\frac{1}{64}\psi(\psi - 2)^2 z_0^6,$$

$$\delta_1 = \frac{3}{16}\psi^2 z_0^4, \quad \delta_2 = -\frac{3}{4}\psi z_0^2,$$

$$\tau_0 = \frac{1}{16}\psi(\psi - 1)z_0^6, \quad \tau_1 = 0,$$

$$\varsigma = \frac{1}{4}\tau_0^2 = \frac{1}{1024}\psi^2(\psi - 1)^2 z_0^{12}.$$

Согласно (31), (35),

$$\eta_{1,2} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\tau_0 [-1 \pm \text{sign}(\tau_0)]}.$$

На основании (35) имеем

$$\eta_{1,2} = \frac{z_0^2}{2} \sqrt[3]{\frac{\psi(\psi - 1)}{4} [-1 \pm \text{sign}(\psi - 1)]},$$

или

$$\eta_1 = \begin{cases} -\frac{z_0^2}{2} \sqrt[3]{\frac{\psi(\psi - 1)}{2}} & (\psi < 1), \\ 0 & (\psi > 1), \end{cases}$$

$$\eta_2 = \begin{cases} 0 & (\psi < 1), \\ -\frac{z_0^2}{2} \sqrt[3]{\frac{\psi(\psi - 1)}{2}} & (\psi > 1). \end{cases}$$

Тем самым

$$\begin{aligned} \eta_1 + \eta_2 &= -\frac{z_0^2}{2} \sqrt[3]{\frac{\psi(\psi - 1)}{2}}, \\ \eta_1 - \eta_2 &= \text{sign}(\psi - 1) \frac{z_0^2}{2} \sqrt[3]{\frac{\psi(\psi - 1)}{2}}. \end{aligned} \quad (36)$$

Подстановка (36) в (30) дает

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{z_0^2}{4} \left[ \psi - 2 \sqrt[3]{\frac{\psi(\psi - 1)}{2}} \right], \\ y_{2,3} &= \frac{z_0^2}{4} \left\{ \psi + \sqrt[3]{\frac{\psi(\psi - 1)}{2}} \left[ 1 \pm i\sqrt{3} \text{sign}(\psi - 1) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (37)$$

Поскольку величины  $y_2$  и  $y_3$  являются комплексно сопряженными:

$$y_3 = y_2^*,$$

то

$$\sqrt{y_3} = \left( \sqrt{y_2} \right)^*. \quad (38)$$

В соответствии с (35) имеем

$$\text{sign}(\beta_1) = \text{sign}(\psi - 2). \quad (39)$$

Равенства (23), (38), (39) позволяют записать решения (25)–(28) уравнения (22) в виде

$$z_{1,1} = \begin{cases} \sqrt{y_1} + 2\text{Re}(\sqrt{y_2}) - \frac{z_0}{2}\sqrt{\psi} & (\psi < 2), \\ \sqrt{y_1} + 2i\text{Im}(\sqrt{y_2}) - \frac{z_0}{2}\sqrt{\psi} & (\psi > 2), \end{cases} \quad (40)$$

$$z_{1,2} = \begin{cases} \sqrt{y_1} - 2\text{Re}(\sqrt{y_2}) - \frac{z_0}{2}\sqrt{\psi} & (\psi < 2), \\ \sqrt{y_1} - 2i\text{Im}(\sqrt{y_2}) - \frac{z_0}{2}\sqrt{\psi} & (\psi > 2), \end{cases} \quad (41)$$

$$z_{1,3} = \begin{cases} -\sqrt{y_1} + 2i\text{Im}(\sqrt{y_2}) - \frac{z_0}{2}\sqrt{\psi} & (\psi < 2), \\ -\sqrt{y_1} + 2\text{Re}(\sqrt{y_2}) - \frac{z_0}{2}\sqrt{\psi} & (\psi > 2), \end{cases} \quad (42)$$

$$z_{1,4} = \begin{cases} -\sqrt{y_1} - 2i\text{Im}(\sqrt{y_2}) - \frac{z_0}{2}\sqrt{\psi} & (\psi < 2), \\ -\sqrt{y_1} - 2\text{Re}(\sqrt{y_2}) - \frac{z_0}{2}\sqrt{\psi} & (\psi > 2). \end{cases} \quad (43)$$

Используя (13), легко убедиться в справедливости соотношения

$$\begin{aligned} \psi^{(\pm)} \left( \psi^{(\pm)} - 1 \right) &= \\ &= 2Q^3 \left[ 4Q^9 + 3Q^3 \pm (4Q^6 + 1)\sqrt{1+Q^6} \right] = \\ &= \pm 2Q^3 \left( \sqrt{1+Q^6} \pm Q^3 \right)^3 = \pm 2Q^3 \left( \psi^{(\pm)} \right)^{3/2}. \end{aligned}$$

Тем самым

$$\sqrt[3]{\frac{\psi^{(\pm)}(\psi^{(\pm)}-1)}{2}} = \pm Q\sqrt{\psi^{(\pm)}}.$$

С учетом этого выражения (37) принимают вид:

$$y_1^{(\pm)} = \frac{z_0^2}{4}\sqrt{\psi^{(\pm)}}\left(\sqrt{\psi^{(\pm)}} \mp 2Q\right), \quad (44)$$

$$y_2^{(\pm)} = \frac{z_0^2}{4}\sqrt{\psi^{(\pm)}} \times \left[\sqrt{\psi^{(\pm)}} \pm Q \pm i\sqrt{3}Q\text{sign}\left(\psi^{(\pm)}-1\right)\right]. \quad (45)$$

В соответствии с (13), (14)

$$\begin{aligned} \sqrt{\psi^{(+)}-2Q} &= \frac{1}{\sqrt{\psi^{(-)}}} - 2Q = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\psi^{(-)}}}\left(1+2Q^4-2Q\sqrt{1+Q^6}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\psi^{(-)}}}\left(1-2Q^2\right)^2\left(1+2Q^4+2Q\sqrt{1+Q^6}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$y_1^{(+)} > 0.$$

Таким же свойством обладает и параметр  $y_1^{(-)}$ .

Это означает, что  $\sqrt{y_1^{(\pm)}}$  является действительной величиной

$$\text{Re}\left(\sqrt{y_1^{(\pm)}}\right) = \sqrt{y_1^{(\pm)}}.$$

Пусть два комплексных числа связаны соотношением

$$a+ib = \sqrt{A+iB}.$$

Их действительные и мнимые части удовлетворяют условиям:

$$A = a^2 - b^2, \quad (46)$$

$$B = 2ab. \quad (47)$$

Выражая  $b$  из (47) и подставляя в (46), получаем квадратное уравнение относительно  $a^2$ :

$$a^4 - Aa^2 - \frac{B^2}{4} = 0.$$

Его решение имеет вид

$$a^2 = \frac{1}{2}\left(A + \sqrt{A^2 + B^2}\right).$$

Поскольку действительная часть главного значения квадратного корня из комплексного числа является положительной величиной, то

$$a = \sqrt{\frac{1}{2}\left(A + \sqrt{A^2 + B^2}\right)}. \quad (48)$$

На основании (45), (48) получаем

$$\text{Re}\left(\sqrt{y_2^{(\pm)}}\right) = \frac{z_0}{2\sqrt{2}}\sqrt[4]{\psi^{(\pm)}} \times \quad (49)$$

$$\times \sqrt{\sqrt{\psi^{(\pm)}} \pm Q + \sqrt{\psi^{(\pm)} \pm 2Q\sqrt{\psi^{(\pm)}} + 4Q^2}.$$

Согласно (15), (40), (44), (49),

$$\begin{aligned} z_{1,1}^{(-)} &= \frac{z_0}{2}\sqrt[4]{\psi^{(-)}}\left(\sqrt{\sqrt{\psi^{(-)}}+2Q} + \right. \\ &\left. + \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{\psi^{(-)}}-Q+\sqrt{\psi^{(-)}-2Q\sqrt{\psi^{(-)}}+4Q^2}} - \sqrt[4]{\psi^{(-)}}\right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$z_{1,1}^{(-)} > \frac{z_0}{2}\sqrt[4]{\psi^{(-)}}\left(\sqrt{\sqrt{\psi^{(-)}}+2Q} - \sqrt[4]{\psi^{(-)}}\right) > 0,$$

или

$$z_{1,1}^{(-)} > 0. \quad (50)$$

Используя (44), (49), имеем

$$\left(\sqrt{y_1^{(-)}} - \frac{z_0}{2}\sqrt{\psi^{(-)}}\right)^2 - 4\left[\text{Re}\left(\sqrt{y_2^{(-)}}\right)\right]^2 =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{z_0^2}{2}\sqrt{\psi^{(-)}}\left(2Q - \sqrt{\psi^{(-)}} + 2Q\sqrt{\psi^{(-)}} - \right. \\ &\left. - \sqrt{\psi^{(-)} - 2Q\sqrt{\psi^{(-)}} + 4Q^2}\right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{z_0^2}{2}\sqrt{\psi^{(-)}}\left(2Q + \sqrt{\psi^{(-)}} + 2Q\sqrt{\psi^{(-)}} + \right. \\ &\left. + \sqrt{\psi^{(-)} - 2Q\sqrt{\psi^{(-)}} + 4Q^2}\right)^{-1} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times \left[4Q^2 - \left(\sqrt{\psi^{(-)}} + 2Q\sqrt{\psi^{(-)}} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \sqrt{\psi^{(-)} - 2Q\sqrt{\psi^{(-)}} + 4Q^2}\right)^2\right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -z_0^2\sqrt{\psi^{(-)}}\left(2Q + \sqrt{\psi^{(-)}} + 2Q\sqrt{\psi^{(-)}} + \right. \\ &\left. + \sqrt{\psi^{(-)} - 2Q\sqrt{\psi^{(-)}} + 4Q^2}\right)^{-1} \times \end{aligned}$$

$$\times \left[\psi^{(-)} + \sqrt{\left(\psi^{(-)}\right)^2 + 8Q^3\sqrt{\psi^{(-)}}}\right] < 0.$$

Тем самым

$$\sqrt{y_1^{(-)}} - \frac{z_0}{2} \sqrt{\psi^{(-)}} < 2 \operatorname{Re} \left( \sqrt{y_2^{(-)}} \right)$$

и, согласно (15), (41),

$$z_{1,2}^{(-)} < 0. \quad (51)$$

В соответствии с (44)

$$\begin{aligned} \sqrt{y_1^{(+)}} + \frac{z_0}{2} \sqrt{\psi^{(+)}} &= \\ &= \frac{z_0}{2} \sqrt[4]{\psi^{(+)}} \left( \sqrt{\sqrt{\psi^{(+)}} - 2Q} + \sqrt[4]{\psi^{(+)}} \right) < \end{aligned} \quad (52)$$

$$< z_0 \sqrt{\psi^{(+)}}.$$

На основании (49) имеем

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \left( \sqrt{y_2^{(+)}} \right) &= \frac{z_0}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{\psi^{(+)}} \times \\ &\times \sqrt{\sqrt{\psi^{(+)}} + Q + \sqrt{\psi^{(+)}} + 2Q\sqrt{\psi^{(+)}} + 4Q^2} > \\ &> \frac{z_0}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{\psi^{(+)}} \sqrt{\sqrt{\psi^{(+)}} + Q + \sqrt{\psi^{(+)}}} > z_0 \sqrt{\psi^{(+)}}. \end{aligned} \quad (53)$$

Принимая во внимание (52), (53), приходим к условию

$$2 \operatorname{Re} \left( \sqrt{y_2^{(+)}} \right) > \sqrt{y_1^{(+)}} + \frac{z_0}{2} \sqrt{\psi^{(+)}}. \quad (54)$$

Соотношения (42), (54) дают

$$z_{1,3}^{(+)} > 0 \quad \left( \psi^{(+)} > 2 \right). \quad (55)$$

Исходя из (54), получаем также

$$\sqrt{y_1^{(+)}} + 2 \operatorname{Re} \left( \sqrt{y_2^{(+)}} \right) > \frac{z_0}{2} \sqrt{\psi^{(+)}} \quad (56)$$

$$\sqrt{y_1^{(+)}} < 2 \operatorname{Re} \left( \sqrt{y_2^{(+)}} \right) + \frac{z_0}{2} \sqrt{\psi^{(+)}}. \quad (57)$$

Следствием (40), (41), (56), (57) являются неравенства:

$$z_{1,1}^{(+)} > 0, \quad z_{1,2}^{(+)} < 0 \quad \left( 1 < \psi^{(+)} < 2 \right). \quad (58)$$

Наконец, согласно (43),

$$z_{1,4}^{(+)} < 0, \quad \left( \psi^{(+)} > 2 \right). \quad (59)$$

Условия (50), (51), (55), (58), (59) позволяют утверждать, что среди всех решений (40)–(43) уравнений (22) действительными положительными являются  $z_{1,1}^{(-)}$ ,  $z_{1,1}^{(+)}$  при  $(1 < \psi^{(+)} < 2)$  и  $z_{1,3}^{(+)}$  при  $(\psi^{(+)} > 2)$ . В соответствии с (16), (21), (40), (42), (44), (49) симметричные решения задачи синтеза трехзвенного ступенчатого фильтра Баттерворта задаются соотношениями:

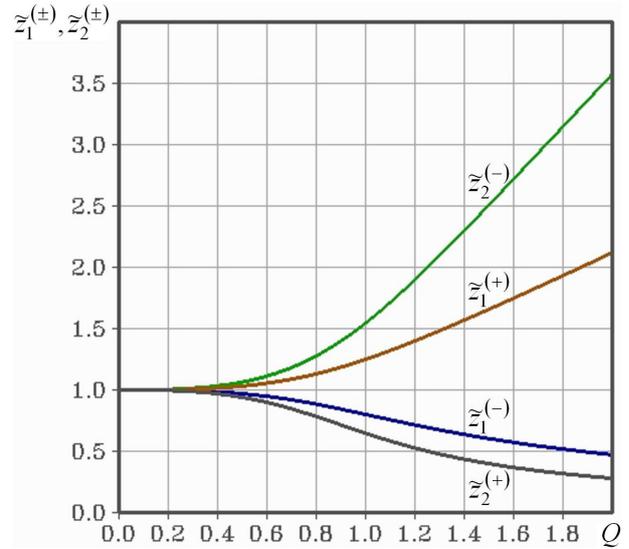


Рис. 3  
Fig. 4

$$\begin{aligned} z_1^{(\pm)} = z_3^{(\pm)} &= \\ &= \frac{z_0}{2} \sqrt[4]{\psi^{(\pm)}} \left[ -\operatorname{sign} \left( \psi^{(\pm)} - 2 \right) \sqrt{\sqrt{\psi^{(\pm)}} \mp 2Q} + \right. \\ &+ \sqrt{2} \sqrt{\sqrt{\psi^{(\pm)}} \pm Q + \sqrt{\psi^{(\pm)}} \pm 2Q\sqrt{\psi^{(\pm)}} + 4Q^2} - \\ &\left. - \sqrt[4]{\psi^{(\pm)}} \right], \quad z_2^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{\psi^{(\pm)}}} \frac{\left( z_1^{(\pm)} \right)^2}{z_0}. \end{aligned} \quad (60)$$

Принимая во внимание первое неравенство (15), отмечаем, что множитель  $-\operatorname{sign}(\psi^{(-)} - 2)$  в выражении (60) для волновых сопротивлений  $z_1^{(-)}$ ,  $z_3^{(-)}$  можно заменить на единицу.

Согласно (13), величина  $\psi^{(+)}$  принимает значение  $\psi^{(+)} = 2$  при  $Q = 1/\sqrt{2}$ . (61)

Легко убедиться в том, что подстановка (61) обращает выражение  $\sqrt{\sqrt{\psi^{(+)}} - 2Q}$  в ноль. Таким образом, в отличие от множителя  $\operatorname{sign}(\psi^{(+)} - 2)$ , произведение  $\operatorname{sign}(\psi^{(+)} - 2) \sqrt{\sqrt{\psi^{(+)}} - 2Q}$  является непрерывной функцией  $Q$ . Очевидно, что этим свойством обладают и решения  $z_1^{(+)}$ ,  $z_3^{(+)}$  задачи синтеза фильтра, определяемые формулой (60). Что касается функций  $z_1^{(-)}(Q)$  и  $z_3^{(-)}(Q)$ , то их непрерывность также не вызывает сомнений.

На рис. 3 представлены зависимости нормированных волновых сопротивлений звеньев фильтра

$$\tilde{z}_j^{(\pm)} = \frac{z_j^{(\pm)}}{z_0} \quad (j = 1, 2)$$

от параметра  $Q$ . Как следует из графиков, при любых значениях  $Q$  величины  $z_1^{(\pm)}$ ,  $z_2^{(\pm)}$  удовлетворяют условиям:

$$z_1^{(-)} \left\langle z_0 \left\langle z_2^{(-)}, z_1^{(+)} \right\rangle z_0 \right\rangle z_2^{(+)}.$$

## Заключение

Таким образом, задача синтеза трехзвенного ступенчатого СВЧ-фильтра Баттерворта имеет два симметричных решения. Этим решениям соответствуют конфигурации фильтра с низкоомным и высокоомным центральными звеньями.

## Список литературы

1. Фельдштейн А.Л., Явич Л.Р. Синтез четырехполюсников и восьмиполюсников на СВЧ. М.: Связь, 1971. 388 с.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970. 720 с.

## References

1. Fel'dshtejn A.L., Javich L.R. *Synthesis of Quadripoles and Microwave Vospol'yusnikov*. Moscow: Svjaz', 1971, 388 p. (In Russ.)
2. Korn G., Korn T. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*. Moscow: Nauka, 1970, 720 p. (In Russ.)

## Physics of Wave Processes and Radio Systems 2020, vol. 23, no. 1, pp. 32–38

DOI 10.18469/1810-3189.2020.23.1.32-38

Received 11 March 2020  
Accepted 24 March 2020

## Symmetric solutions of problem of synthesis of three-link stepped microwave filter of Butterworth

A.S. Aref'ev

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics  
23, L. Tolstoy Street,  
Samara, 443010, Russia

*Abstract* – It is demonstrated, that the problem of synthesis of three-link stepped microwave filter of Butterworth has two symmetric solutions. These solutions have equal wave impedances of the first and last links. The first solution corresponds to filter configuration with low-resistance central link. The second solution corresponds to configuration with high-resistance central link. The expressions for wave impedances of filter links are derived. The results of computation of wave impedances are brought.

*Keywords* – stepped microwave filter of Butterworth; synthesis of stepped microwave filter.

## Информация об авторах

**Арефьев Алексей Сергеевич**, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры радиоэлектронных систем Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики (г. Самара).

*Область научных интересов:* электродинамика, техника СВЧ, физика полупроводников.

*E-mail:* arefyev.as@inbox.ru

## Information about the Authors

**Aleksey S. Arefyev**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, professor of the Department of Radioelectronic Systems, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia.

*Research interests:* electrodynamics, microwave technology, semiconductor physics.

*E-mail:* arefyev.as@inbox.ru