

Расчет спектров волн экранированных волноводов с произвольным диэлектрическим заполнением с помощью модифицированного метода Галеркина и метода частичных областей

С.А. Капустин, Н.А. Новоселова, С.Б. Раевский, А.А. Титаренко

Нижегородский государственный технический университет имени Р.Е. Алексеева
603950, Россия, г. Нижний Новгород
ул. Минина, 24

Аннотация – Рассматривается метод расчета спектров собственных волн круглых и прямоугольных экранированных волноводов с произвольным диэлектрическим заполнением, являющийся модификацией метода Галеркина и основанный на представлении полей волн направляющей структуры в виде разложения по собственным функциям краевой задачи для однородно заполненных волноводов. Составлен алгоритм расчета характеристик симметричных волн круглого волновода с градиентным диэлектрическим заполнением и прямоугольного экранированного волновода с произвольным и угловым диэлектрическим заполнением.

Ключевые слова – модифицированный метод Галеркина, метод частичных областей, спектр волн, симметричные волны, дисперсионное уравнение.

Введение

Широкое использование в технике СВЧ- и КВЧ-волноводов со сложным диэлектрическим заполнением обуславливает высокую актуальность разработки методов их строгого электродинамического расчета. Основными методами, используемыми на данный момент, являются метод частичных областей (МЧО) и разнообразные вариации сеточных подходов (метод моментов, метод конечных разностей и т. д.).

В работе рассматривается метод расчета спектров собственных волн круглых и прямоугольных экранированных волноводов с произвольным диэлектрическим заполнением, являющийся модификацией метода Галеркина (ММГ) и основанный на представлении полей волн направляющей структуры в виде разложения по собственным функциям краевой задачи для однородно заполненных волноводов [1; 2].

1. Расчет экранированного круглого волновода с градиентным диэлектрическим заполнением

Рассмотрим задачу о распространении Е- и Н-волн в круглом экранированном волноводе с частичным диэлектрическим заполнением, значение диэлектрической проницаемости которого произвольным образом зависит от радиальной координаты ($\epsilon(r, \varphi, z) = \epsilon(r)$) (рис. 1). Значение

магнитной проницаемости полагается величиной постоянной.

Из уравнений Максвелла получаем известное соотношение $\text{rot rot } \vec{E} = k_0^2 \epsilon(r, \varphi) \vec{E}$, которое в цилиндрической системе координат выглядит как:

$$\begin{aligned} \text{rot rot } (\vec{E})|_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_r}{\partial \varphi^2} + \\ &+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 E_r}{\partial z^2} = k_0^2 \epsilon(r, \varphi) E_r; \\ \text{rot rot } (\vec{E})|_\varphi &= \frac{1}{r^2} E_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 E_r}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} + \\ &+ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi \partial z} - \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial z^2} = k_0^2 \epsilon(r, \varphi) E_\varphi; \\ \text{rot rot } (\vec{E})|_z &= \frac{\partial^2 E_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial \varphi \partial z} - \\ &- \frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} = k_0^2 \epsilon(r, \varphi) E_z. \end{aligned} \quad (1)$$

Поля волн направляющей структуры представим в виде разложений по собственным функциям краевой задачи для однородно заполненного круглого волновода.

Рассматривая симметричные Н-волны, полагаем $\partial/\partial\varphi = 0$, $E_r = 0$, $E_z = 0$. В этом случае уравнения (1) сведутся к единственному уравнению относительно $\vec{\varphi}$ -компоненты электрического поля:

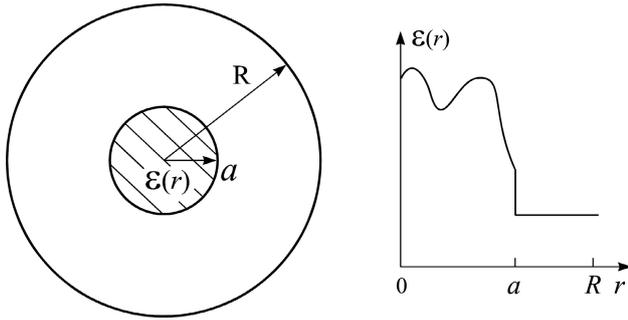


Рис. 1. Профиль диэлектрической проницаемости
 Fig. 1. Dielectric capacitivy profile

$$\frac{1}{r^2} E_\varphi - \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial z^2} = k_0^2 \varepsilon(r) E_\varphi.$$

Записывая $E_\varphi(r, \varphi, z) = E_\varphi(r, \varphi) e^{-i\beta z}$, получаем уравнение относительно функции поперечных координат:

$$\frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} E_\varphi + (k_0^2 \varepsilon(r) - \beta^2) E_\varphi = 0. \quad (2)$$

Решение уравнения (2) будем искать в виде

$$E_\varphi(r) = \sum_{n=0}^N b_n J_1(\alpha_n r), \quad (3)$$

где коэффициенты α_n определяются из уравнения $J_1(\alpha_n R) = 0$ (т. к. $E_\varphi(R) = 0$).

Подставив (3) в (2), получаем:

$$\begin{aligned} & - \sum_{n=0}^N b_n \left[\frac{\partial^2 J_1(\alpha_n r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial J_1(\alpha_n r)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} J_1(\alpha_n r) \right] = \\ & = \sum_{n=0}^N b_n k_0^2 \varepsilon(r) J_1(\alpha_n r) - \sum_{n=0}^N b_n \beta^2 J_1(\alpha_n r). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 J_1(\alpha_n r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial J_1(\alpha_n r)}{\partial r} - \\ & - \frac{1}{r^2} J_1(\alpha_n r) = -\alpha_n^2 J_1(\alpha_n r), \end{aligned}$$

получаем:

$$\sum_{n=0}^N b_n (\alpha_n^2 + \beta^2) J_1(\alpha_n r) = \sum_{n=0}^N b_n k_0^2 \varepsilon(r) J_1(\alpha_n r). \quad (4)$$

Умножив обе части уравнения (4) на $r J_1(\alpha_q r)$ и проинтегрировав в пределах $r \in [0; R]$, выводим уравнение

$$(\alpha_q^2 + \beta^2) \Gamma_q b_q = \sum_{n=0}^N b_n k_0^2 \int_0^R \varepsilon(r) r J_1(\alpha_n r) J_1(\alpha_q r) dr. \quad (5)$$

Здесь использовалось условие ортогональности функций Бесселя:

$$\int_0^R r J_1(\alpha_n r) J_1(\alpha_q r) dr = \begin{cases} \Gamma_q, & q = n; \\ 0, & q \neq n, \end{cases}$$

где $\Gamma_q = 0,5 R^2 J_0^2(\alpha_n R)$.

Уравнение (5) можно представить в матричном виде:

$$I \cdot b = T \cdot b \quad (6)$$

где

$$I_{q,n} = \begin{cases} (\alpha_q^2 + \beta^2) \Gamma_q, & q = n; \\ 0, & q \neq n, \end{cases}$$

$$T_{q,n} = k_0^2 \int_0^R \varepsilon(r) r J_1(\alpha_n r) J_1(\alpha_q r) dr.$$

Записав уравнение (6) в виде $(I - T) \cdot b = 0$ и приравняв определитель матрицы $(I - T)$ к нулю, получаем дисперсионное уравнение для симметричных Н-волн, распространяющихся в круглом волноводе с произвольной зависимостью ε от r :

$$\text{Det}(\beta) = |I - T| = 0. \quad (7)$$

Отметим, что матрица T не зависит от β , поэтому при решении дисперсионного уравнения (7) она вычисляется лишь один раз, что существенно сокращает время поиска корней дисперсионного уравнения (ДУ). Заметим, что при выводе уравнений (6), (7) никаких ограничений на вид зависимости $\varepsilon(r)$ не накладывалось, т. е. данный метод позволяет рассчитывать симметричные Н-волны при совершенно произвольном характере изменения диэлектрической проницаемости по поперечной координате, при этом ε может быть и комплексной величиной, что позволяет, например, рассчитывать волноводы со сложным распределением поглощения в поперечном сечении.

В случае симметричных Е-волн полагаем $\partial/\partial\varphi = 0$, $E_\varphi = 0$. При этом уравнения (1) перейдут в систему двух уравнений:

$$i\beta \frac{\partial E_z}{\partial r} + (k_0^2 \varepsilon(r) - \beta^2) E_r = 0;$$

$$i\beta \frac{\partial E_r}{\partial r} + i\beta \frac{1}{r} E_r + \frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + k_0^2 \varepsilon(r) E_z = 0,$$

которые, введя обозначение $\tilde{E}_z = i\beta E_z$, переписываем:

$$\frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial r} + (k_0^2 \varepsilon(r) - \beta^2) E_r = 0$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial r} + k_0^2 \varepsilon(r) \tilde{E}_z - \beta^2 \left(\frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{1}{r} E_r \right) = 0 \quad (8)$$

Граничные условия на идеально проводящей поверхности для тангенциальной и нормальной компонент электрического поля $E_\tau|_S = 0$, $\frac{\partial E_n}{\partial n}|_S = 0$ в данном случае приводят к уравнениям:

$$E_z|_{r=a} = 0, \quad \frac{\partial(rE_r)}{\partial r}\bigg|_{r=a} = 0. \quad (9)$$

Компоненты электрического поля будем искать в виде

$$\tilde{E}_z = \sum_{n=0}^N A_n J_0(\alpha_n r), \quad E_r = \sum_{m=0}^N B_m J_1(\alpha_m r) \quad (10)$$

С учетом (9) коэффициенты α_n находим из уравнения $J_0(\alpha_n R) = 0$.

Подставив (10) в (8), получаем систему функциональных уравнений:

$$\begin{aligned} & -\sum_{n=0}^N A_n \alpha_n J_1(\alpha_n r) + \sum_{m=0}^N B_m (k_0^2 \varepsilon(r) - \beta^2) J_1(\alpha_m r) = 0; \\ & \sum_{n=0}^N A_n \left(\frac{\partial^2 J_0(\alpha_n r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial J_0(\alpha_n r)}{\partial r} + k_0^2 \varepsilon(r) J_0(\alpha_n r) \right) - \\ & -\beta^2 \sum_{m=0}^N B_m \left(\frac{\partial J_1(\alpha_m r)}{\partial r} + \frac{1}{r} J_1(\alpha_m r) \right) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

С учетом равенств

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 J_0(\alpha_n r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial J_0(\alpha_n r)}{\partial r} = -\alpha_n^2 J_0(\alpha_n r); \\ & \frac{\partial J_1(\alpha_m r)}{\partial r} = \alpha_m J_0(\alpha_m r) - \frac{1}{r} J_1(\alpha_m r) \end{aligned}$$

систему (11) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & -\sum_{n=0}^N A_n \alpha_n J_1(\alpha_n r) + \\ & + \sum_{m=0}^N B_m (k_0^2 \varepsilon(r) - \beta^2) J_1(\alpha_m r) = 0; \\ & \sum_{n=0}^N A_n (k_0^2 \varepsilon(r) - \alpha_n^2) J_0(\alpha_n r) - \\ & -\beta^2 \sum_{m=0}^N B_m \alpha_m J_0(\alpha_m r) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Умножая первое уравнение (12) на $rJ_1(\alpha_q r)$, а второе на $rJ_0(\alpha_q r)$ и интегрируя в пределах $r \in [0; R]$, выводим систему уравнений:

$$\begin{aligned} & -A_q \alpha_q \Gamma_q + k_0^2 \sum_{m=0}^N B_m \int_0^R r \varepsilon(r) J_1(\alpha_m r) \times \\ & \times J_1(\alpha_q r) dr - B_q \beta^2 \Gamma_q = 0; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & k_0^2 \sum_{n=0}^N A_n \int_0^R r \varepsilon(r) J_0(\alpha_n r) J_0(\alpha_q r) dr - \\ & - A_q \alpha_q^2 \Gamma_q - B_q \beta^2 \alpha_q \Gamma_q = 0. \end{aligned}$$

Систему уравнений (13) можно записать в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} T^{(0,0)} & T^{(0,1)} \\ T^{(1,0)} & T^{(1,1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} T_{q,m}^{(0,0)} &= -\alpha_q \Gamma_q \delta_{q,m}, \\ T_{q,m}^{(0,1)} &= k_0^2 \int_0^R r \varepsilon(r) J_1(\alpha_m r) J_1(\alpha_q r) dr - \beta^2 \Gamma_q \delta_{q,m}, \\ T_{q,n}^{(1,0)} &= k_0^2 \int_0^R r \varepsilon(r) J_0(\alpha_n r) J_0(\alpha_q r) dr - \alpha_q^2 \Gamma_q \delta_{q,m}, \\ T_{q,m}^{(1,1)} &= -\beta^2 \alpha_q \Gamma_q \delta_{q,m}; \end{aligned} \quad (15)$$

Приравнявая определитель системы (14) к нулю, получаем ДУ Е-волн волновода с произвольным радиальным диэлектрическим заполнением.

2. Расчет тестовой структуры

В качестве примера проведем расчет простейшей тестовой структуры – круглого волновода с однородным диэлектрическим стержнем (т. е. $\varepsilon(r) = \varepsilon = \text{const}$, рис. 2) и сравним результаты с полученными классическим методом частичных областей (МЧО) [3; 4].

Расчеты проводились для волновода с параметрами $R = 20$ мм, $a = 10$ мм, $\varepsilon = 3$ на частоте $f = 10$ ГГц. МЧО дает следующие результаты: для Н-волн $\beta_H = 237,68916$ м⁻¹, для Е-волн $\beta_E = 227,55000$ м⁻¹.

Предлагаемый метод (ММГ) с использованием функции

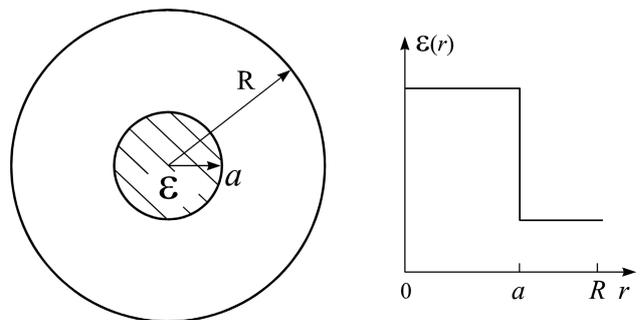


Рис. 2. Тестовая структура круглого волновода с частичным диэлектрическим заполнением
Fig. 2. Test structure of a circular waveguide with partial dielectric filling

Таблица 1. Расчет модифицированным методом Галеркина
Table 1. Calculation by the modified Galerkin method

N	Е-волны ($\beta_E = 227,5500 \text{ м}^{-1}$)	Н-волны ($\beta_H = 237,6892 \text{ м}^{-1}$)
1	233,1366	234,7509
2	234,3096	236,5369
3	232,3624	237,2738
4	231,8978	237,4027
5	230,9273	237,5506
6	230,7095	237,5777
7	230,1335	237,6259
8	230,0207	237,6347
9	229,6397	237,655
10	229,5748	237,6586
11	229,304	237,6686
12	229,2637	237,6704
13	229,0613	237,6758
14	229,0347	237,6768
15	228,8776	237,6800

$$\varepsilon(r) = \begin{cases} 3, & r \leq a; \\ 1, & a < r \leq R \end{cases}$$

дает результаты, представленные в табл. 1.

Сходимость решений, получаемых модифицированным методом Галеркина для Е и Н-волн, представлена в табл. 1 и на рис. 3.

Из табл. 1 и рис. 3 видно, что сходимость ММГ является монотонной и наступает достаточно быстро (уже при $N = 5$ разница между продольными волновыми числами не превышает 1,5 %). Из рис. 3 также видно, что в случае Н-волн сходимость наступает быстрее.

На рис. 4 пунктирной линией представлены зависимости компонент поля H_z и E_φ от координаты r , рассчитанные для Н-волны при $N = 5$.

Из рис. 4 следует, что распределения полей, рассчитанные двумя методами, практически совпадают, что подтверждает корректность предлагаемого метода.

3. Расчет волновода с градиентным диэлектрическим заполнением

На основе уравнений (15) проведем расчет дисперсионных характеристик Е-волн круглого волновода с частичным диэлектрическим заполнением параболического профиля:

$$\varepsilon(r) = \begin{cases} \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{a^2} r^2, & r \leq a; \\ 1, & a < r \leq R. \end{cases}$$

Результаты расчета дисперсионных характеристик Е-волн круглого волновода с параболическим профилем диэлектрического заполнения представлены на рис. 5. На рис. 6 приведены распределения вектора Умова – Пойнтинга по поперечному сечению волновода, рассчитанные для трех мод на частоте $f = 14$ ГГц.

4. Расчет прямоугольных экранированных волноводов с произвольным диэлектрическим заполнением

Поперечное сечение прямоугольного волновода с диэлектрическим заполнением, регулярным по продольной координате z и произвольным по поперечным, изображено на рис. 7. Значения диэлектрических проницаемостей могут быть и комплексными величинами.

Представив диэлектрическое заполнение прямоугольного волновода в виде кусочно-непрерывной функции:

$$\varepsilon(x, y) = \begin{cases} \varepsilon_1(x, y) \text{ на } S_1, \\ \varepsilon_2(x, y) \text{ на } S_2, \\ \dots, \\ \varepsilon_N(x, y) \text{ на } S_N, \\ \varepsilon \text{ на } S_\perp, \end{cases}$$

запишем уравнения Максвелла внутри волновода:

$$\text{rot}(\vec{E}) = -i\omega\mu_0\vec{H}; \quad \text{rot}(\vec{H}) = i\omega\varepsilon(x, y)\varepsilon_0\vec{E}. \quad (16)$$

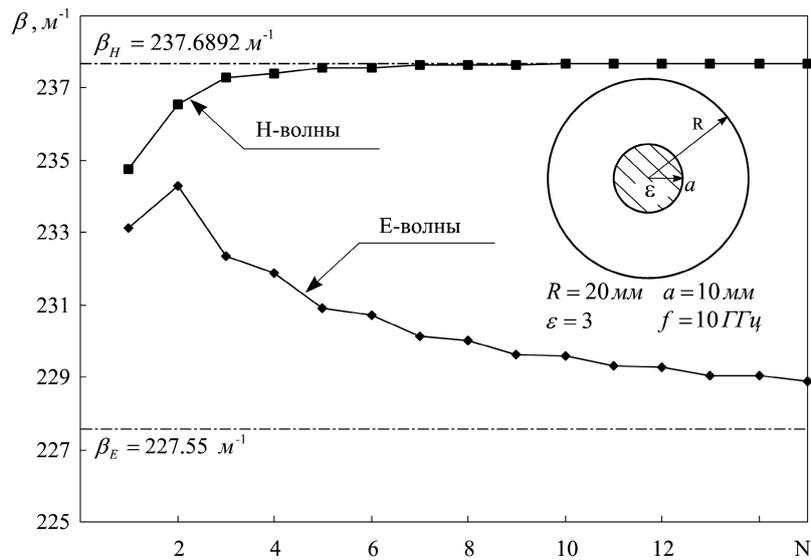


Рис. 3. Сходимость модифицированного ММГ и МЧО
 Fig. 3. The convergence of the modified MMG and MChO

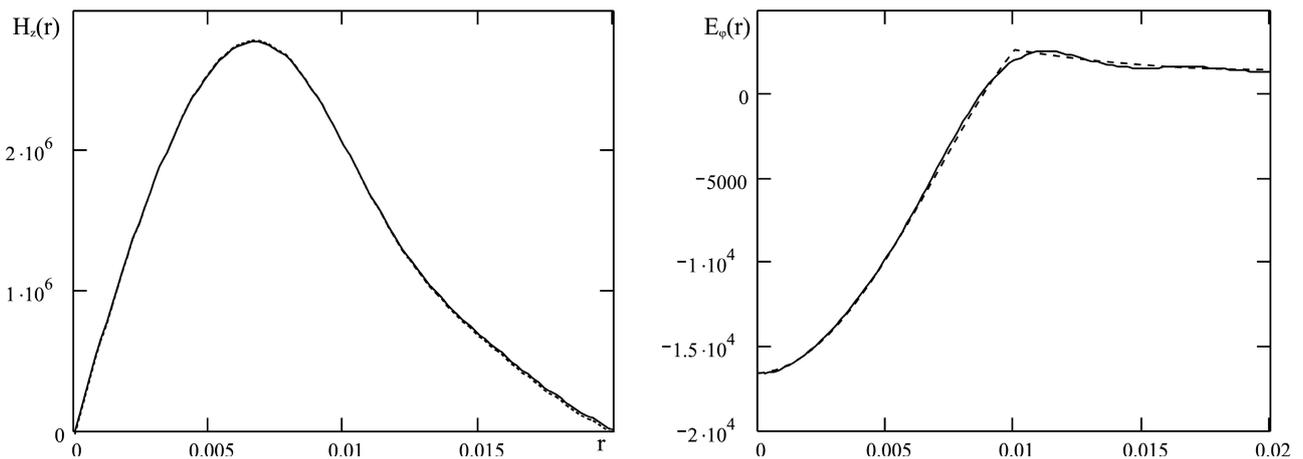


Рис. 4. Распределение поля Н-волны (пунктирная линия - МЧО, сплошная линия - ММГ)
 Fig. 4. The distribution of the field of the H-wave (dashed line - MChO, solid line - MMG)

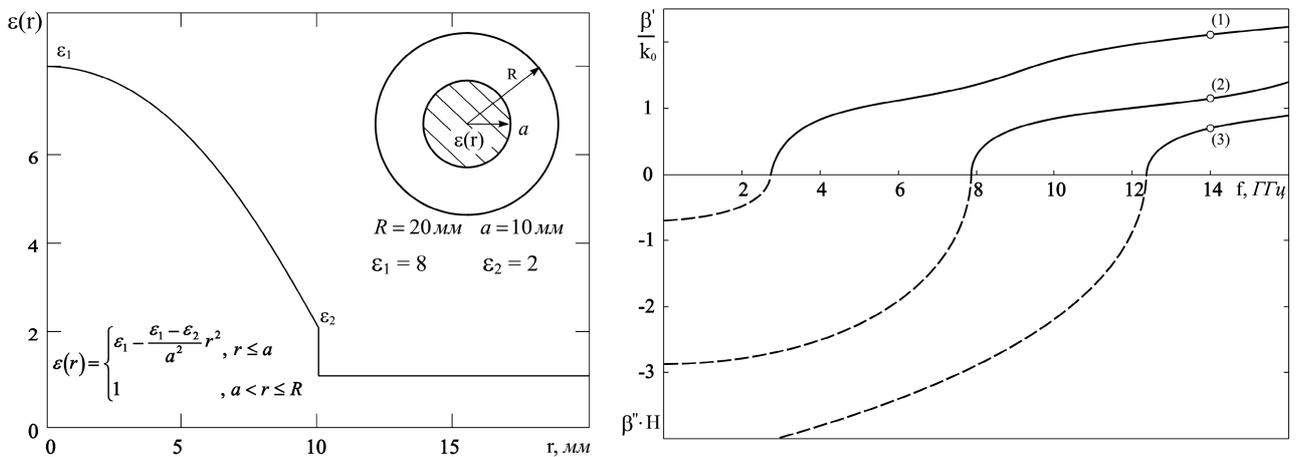


Рис. 5. Дисперсионные характеристики Е-волн круглого волновода с параболическим профилем диэлектрического заполнения
 Fig. 5. Dispersion characteristics of E-waves of a circular waveguide with a parabolic dielectric filling profile

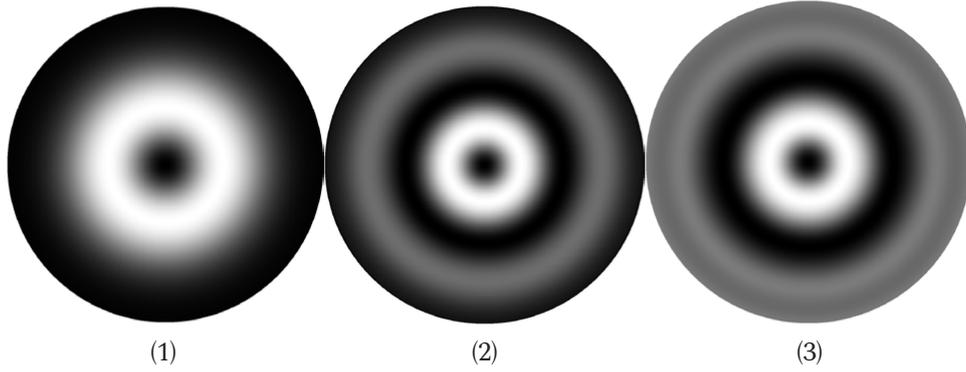


Рис. 6. Распределение мощности E-волны на частоте $f = 14$ ГГц
 Fig. 6. Power distribution of the E-wave at a frequency of $f = 14$ GHz

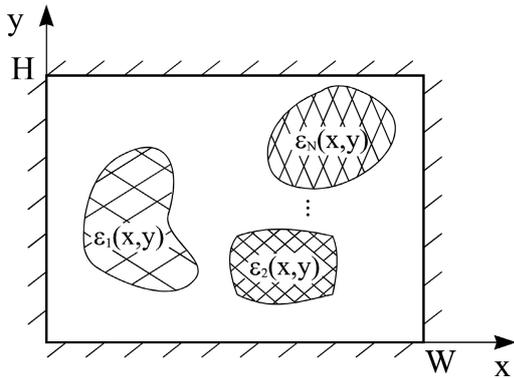


Рис. 7. Общая структура поперечного сечения волновода
 Fig. 7. General structure of the waveguide cross section

Из уравнений (16) получаем:

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \vec{E} &= k_0^2 \varepsilon(x, y) \vec{E}; \\ \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + (k_0^2 \varepsilon(x, y) - \beta^2) E_x - \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} + i\beta \frac{\partial E_z}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + (k_0^2 \varepsilon(x, y) - \beta^2) E_y - \frac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial y} + i\beta \frac{\partial E_z}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_0^2 \varepsilon(x, y) E_z + i\beta \frac{\partial E_x}{\partial x} + i\beta \frac{\partial E_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Зависимость компонент электрического поля E_x , E_y , E_z от поперечных координат будем искать в виде

$$\begin{aligned} E_x &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} (A_p \sin(\eta_p x) + \hat{A}_p \cos(\eta_p x)) \times \\ &\times (a_r \sin(\vartheta_r y) + \hat{a}_r \cos(\vartheta_r y)); \\ E_y &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} (B_p \sin(\delta_p x) + \hat{B}_p \cos(\delta_p x)) \times \\ &\times (b_r \sin(\chi_r y) + \hat{b}_r \cos(\chi_r y)); \\ E_z &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} (C_p \sin(\kappa_p x) + \hat{C}_p \cos(\kappa_p x)) \times \\ &\times (c_r \sin(\sigma_r y) + \hat{c}_r \cos(\sigma_r y)). \end{aligned} \quad (18)$$

Подчиняя компоненты (18) граничным условиям:

$$\begin{aligned} E_z|_{x=0} &= 0, \quad E_z|_{x=W} = 0, \\ E_z|_{y=0} &= 0, \quad E_z|_{y=H} = 0; \\ E_x|_{y=0} &= 0, \quad \left. \frac{\partial E_x}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \\ E_x|_{y=H} &= 0, \quad \left. \frac{\partial E_x}{\partial x} \right|_{x=W} = 0, \\ E_y|_{x=0} &= 0, \quad \left. \frac{\partial E_y}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \\ E_y|_{x=W} &= 0, \quad \left. \frac{\partial E_y}{\partial y} \right|_{y=H} = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

и заменяя бесконечный предел суммирования конечным числом M , выражения (18) приводим к виду

$$\begin{aligned} E_x &= \sum_{p=0}^M \sum_{r=0}^M A_{p,r} \cos(\eta_p x) \sin(\vartheta_r y); \\ E_y &= \sum_{p=0}^M \sum_{r=0}^M B_{p,r} \sin(\delta_p x) \cos(\chi_r y); \\ E_z &= \sum_{p=0}^M \sum_{r=0}^M C_{p,r} \sin(\kappa_p x) \sin(\sigma_r y). \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \eta_p &= \frac{\pi p}{H}; \quad \vartheta_r = \frac{\pi(r+1)}{H}; \quad \delta_p = \frac{\pi(p+1)}{W}; \\ \chi_r &= \frac{\pi r}{H}; \quad \kappa_p = \frac{\pi(p+1)}{W}; \quad \sigma_r = \frac{\pi(r+1)}{H}; \\ p &= 0, 1, \dots, M; \quad r = 0, 1, \dots, M. \end{aligned}$$

В этом случае члены сумм (20) являются решениями краевой задачи для однородно заполненного прямоугольного волновода с граничными условиями (19).

Запишем выражения (20) как

$$\begin{aligned} E_x &= \sum_{n=0}^N a_n \cos(\alpha_n^{(x)} x) \sin(\gamma_n^{(x)} y), \\ E_y &= \sum_{m=0}^N b_m \sin(\alpha_m^{(y)} x) \cos(\gamma_m^{(y)} y), \\ E_z &= \sum_{t=0}^N c_t \sin(\alpha_t^{(z)} x) \sin(\gamma_t^{(z)} y), \end{aligned} \quad (21)$$

где $N = (M+1)^2 - 1$. При одиночном суммировании (21) учитывается весь спектр функций в (20).

Коэффициенты $\alpha_n^{(x,y,z)}$ и $\gamma_n^{(x,y,z)}$ записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \alpha_{p+(M+1)r}^{(x)} &= \eta_p, & \gamma_{p+(M+1)r}^{(x)} &= \vartheta_r, & \alpha_{p+(M+1)r}^{(y)} &= \delta_p, \\ \gamma_{p+(M+1)r}^{(y)} &= \chi_r, & \alpha_{p+(M+1)r}^{(z)} &= k_p, & \gamma_{p+(M+1)r}^{(z)} &= \sigma_r, \end{aligned}$$

где $p = 0, 1, \dots, M$; $r = 0, 1, \dots, M$. Например, при $M = 2$ $\alpha^{(x)}$ и $\gamma^{(x)}$ запишутся в виде

$$\begin{aligned} \alpha^{(x)} &= (\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_0, \eta_1, \eta_2)^T, \\ \gamma^{(x)} &= (\vartheta_0, \vartheta_0, \vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_1, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_2, \vartheta_2)^T. \end{aligned}$$

Таким образом, решение задачи о расчете волноводов с произвольным заполнением сводится к представлению электрического поля в виде (21). Связь между x -, y -, z -составляющими поля в (21) определяется коэффициентами a_n , b_m , c_t , значения которых находятся из системы алгебраических уравнений путем подстановки (21) в (17) и использования условий ортогональности собственных функций краевой задачи для однородно заполненного прямоугольного волновода. Подставив выражения (21) в систему (17), получаем систему функциональных уравнений, которую проецируем на базис собственных функций краевых задач для однородно заполненного прямоугольного волновода.

С учетом обозначений:

$$\begin{aligned} N_{q,n}^{(x)} &= \int_0^H \int_0^W \cos(\alpha_n^{(x)} x) \sin(\gamma_n^{(x)} y) \cos(\alpha_q^{(x)} x) \times \\ &\times \sin(\gamma_q^{(x)} y) dx dy = \delta_{q,n} \frac{HW}{2} \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha_n^{(x)} = 0; \\ 0,5, & \text{если } \alpha_n^{(x)} \neq 0; \end{cases} \\ N_{q,n}^{(y)} &= \int_0^H \int_0^W \sin(\alpha_n^{(y)} x) \cos(\gamma_n^{(y)} y) \sin(\alpha_q^{(y)} x) \times \\ &\times \cos(\gamma_q^{(y)} y) dx dy = \delta_{q,n} \frac{HW}{2} \begin{cases} 1, & \text{если } \gamma_n^{(y)} = 0; \\ 0,5, & \text{если } \gamma_n^{(y)} \neq 0; \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} N_{q,n}^{(z)} &= \int_0^H \int_0^W \sin(\alpha_n^{(z)} x) \sin(\gamma_n^{(z)} y) \sin(\alpha_q^{(z)} x) \times \\ &\times \sin(\gamma_q^{(z)} y) dx dy = \delta_{q,n} \frac{HW}{4}; \end{aligned}$$

где $\delta_{q,n}$ – символ Кронекера, получаем систему матричных уравнений:

$$\begin{aligned} -\left(\Gamma^{(x)} N^{(x)} + \beta^2 N^{(x)}\right) a + k_0^2 Q^{(x)} a + \\ + W^{(x)} b + i\beta V^{(x)} c = 0; \\ -\left(\Gamma^{(y)} N^{(y)} + \beta^2 N^{(y)}\right) b + k_0^2 Q^{(y)} a + \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} + W^{(y)} a + i\beta V^{(y)} c = 0; \\ -\Gamma^{(z)} N^{(z)} c + k_0^2 Q^{(z)} c - \\ - i\beta W^{(z)} a - i\beta V^{(z)} b = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_{q,n}^{(x)} &= \left(\gamma_n^{(x)}\right)^2 \delta_{q,n}, & \Gamma_{q,n}^{(y)} &= \left(\alpha_n^{(y)}\right)^2 \delta_{q,n}, \\ \Gamma_{q,t}^{(y)} &= \left[\left(\alpha_t^{(z)}\right)^2 + \left(\gamma_t^{(z)}\right)^2 \right] \delta_{q,t} \end{aligned}$$

– диагональные матрицы,

$$\begin{aligned} Q_{q,n}^{(x)} &= \int_0^H \int_0^W \varepsilon(x, y) \cos(\alpha_n^{(x)} x) \sin(\gamma_n^{(x)} y) \times \\ &\times \cos(\alpha_q^{(x)} x) \sin(\gamma_q^{(x)} y) dx dy; \\ W_{q,m}^{(x)} &= \alpha_m^{(y)} \gamma_m^{(y)} \int_0^H \int_0^W \cos(\alpha_m^{(y)} x) \sin(\gamma_m^{(y)} y) \times \\ &\times \cos(\alpha_q^{(x)} x) \sin(\gamma_q^{(x)} y) dx dy = \end{aligned} \quad (24)$$

$$= \alpha_m^{(y)} \gamma_m^{(y)} \begin{cases} \frac{WH}{4}, & \text{если } \alpha_m^{(y)} = \alpha_q^{(x)} \text{ и } \gamma_m^{(y)} = \gamma_q^{(x)}; \\ 0, & \text{если } \alpha_m^{(y)} \neq \alpha_q^{(x)} \text{ или } \gamma_m^{(y)} \neq \gamma_q^{(x)}; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V_{q,t}^{(x)} &= \alpha_t^{(z)} \int_0^H \int_0^W \cos(\alpha_t^{(z)} x) \sin(\gamma_t^{(z)} y) \times \\ &\times \cos(\alpha_q^{(x)} x) \sin(\gamma_q^{(x)} y) dx dy = \\ &= \alpha_t^{(z)} \begin{cases} \frac{WH}{4}, & \text{если } \alpha_t^{(z)} = \alpha_q^{(x)} \text{ и } \gamma_t^{(z)} = \gamma_q^{(x)}; \\ 0, & \text{если } \alpha_t^{(z)} \neq \alpha_q^{(x)} \text{ или } \gamma_t^{(z)} \neq \gamma_q^{(x)}; \end{cases} \end{aligned}$$

$$Q_{q,m}^{(y)} = \int_0^H \int_0^W \varepsilon(x, y) \sin(\alpha_m^{(y)} x) \cos(\gamma_m^{(y)} y) \times$$

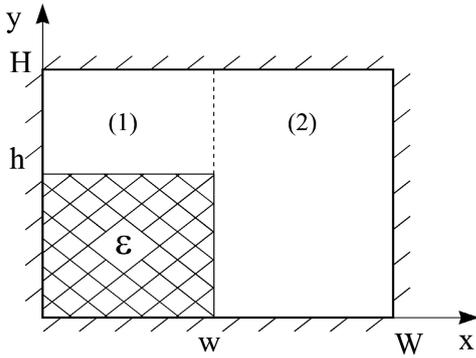


Рис. 8. Прямоугольный волновод с угловым координатным диэлектрическим заполнением

Решения дисперсионного уравнения, полученные в различных приближениях двумя способами, приведены в табл. 2 и на рис. 9.

В табл. 2 представлены результаты решения дисперсионной задачи методом частичных областей (второй столбец) и модифицированным методом Галеркина (третий столбец). Первый столбец – порядок приближения M. Рис. 9 – графическое изображение данных табл. 2.

Из табл. 2 и рис. 9 видно, что оба метода дают сходимость к одному и тому же значению. При этом результаты близки уже на малых приближениях (при M = 5 нормированные постоянные распространения, полученные двумя методами, отличаются лишь на 0,2 %). С помощью МЧО и ММГ были рассчитаны дисперсионные характеристики данного волновода в частотном диапазоне от 2 ГГц до 16 ГГц (рис. 10). Результаты расчетов, получен-

Таблица 2
 Table 2

M	β/k_0 (МЧО)	β/k_0 (метод Галеркина)
2	1,755013	1,753340
3	1,754223	1,757953
4	1,754177	1,758168
5	1,754127	1,757674
6	1,754045	1,757714
7	1,754059	1,757299
8	1,754024	1,756771
9	1,754026	1,756791
10	1,754022	1,756399
11	1,754013	1,756185
12	1,754017	1,756157
13	1,754009	1,755862
14	1,754010	1,755804
15	1,754009	1,755589

ные обоими методами, практически полностью совпадают (дисперсионные кривые графически неразличимы).

Как видно из рисунка, в спектре собственных волн волновода присутствуют комплексные волны (КВ), дисперсионные характеристики которых начинаются в точках жордановой кратности волновых чисел.

На частоте 14 ГГц в точках, обозначенных на рис. 10 цифрами (1)–(3), обоими методами были рассчитаны распределения вектора Умова –

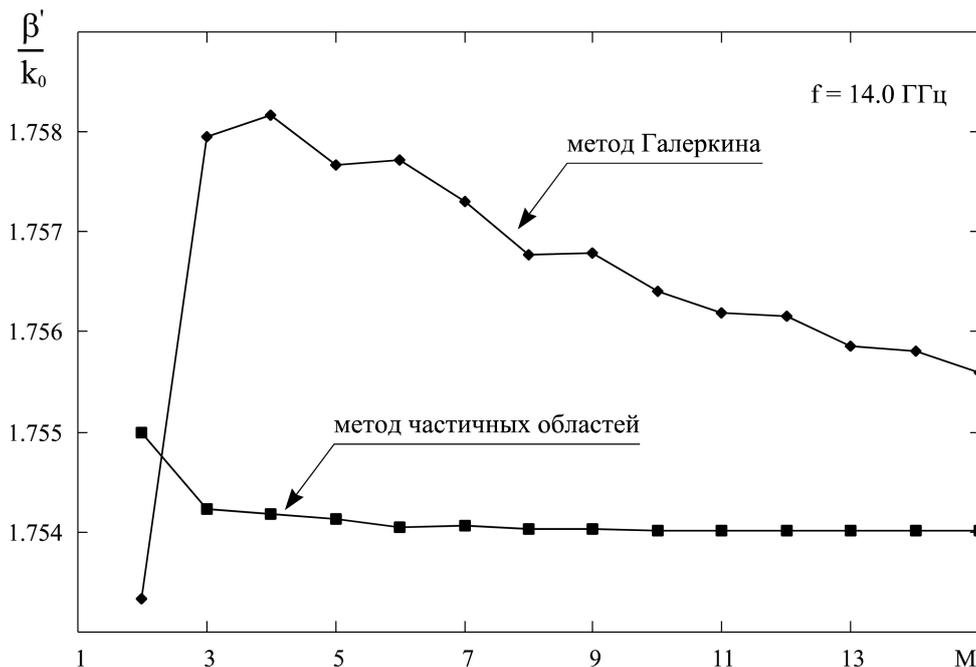


Рис. 9. Сходимость модифицированного метода Галеркина и МЧО
 Fig. 9. Convergence of the modified Galerkin method and the MChO

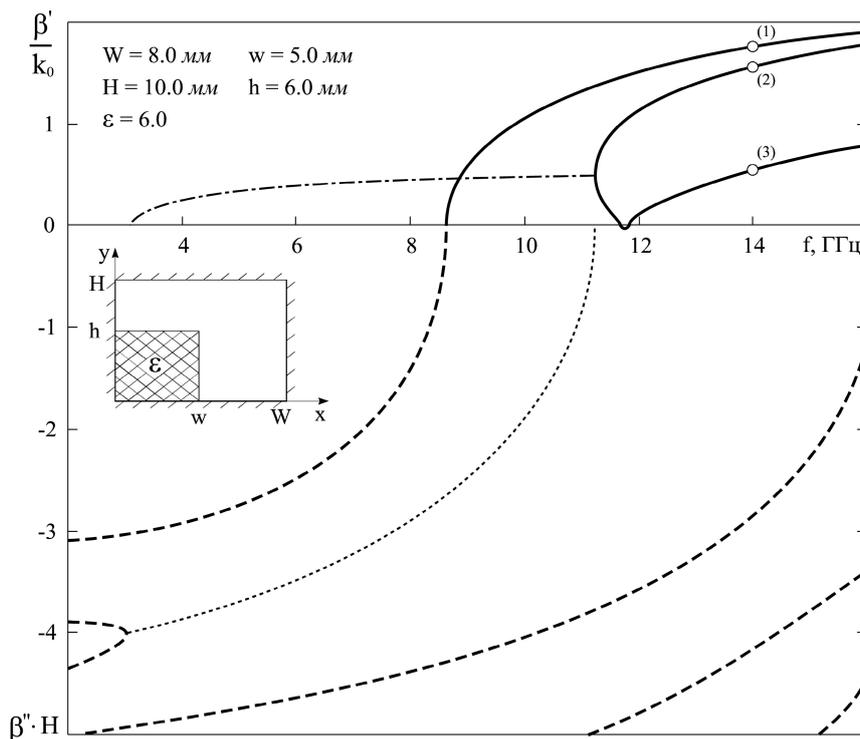
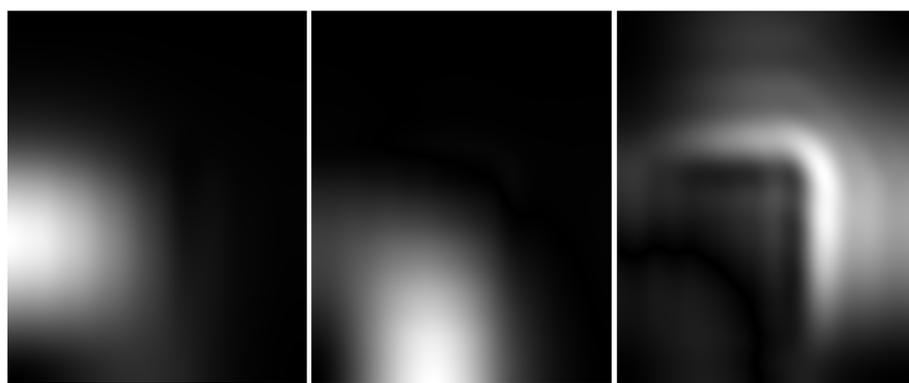
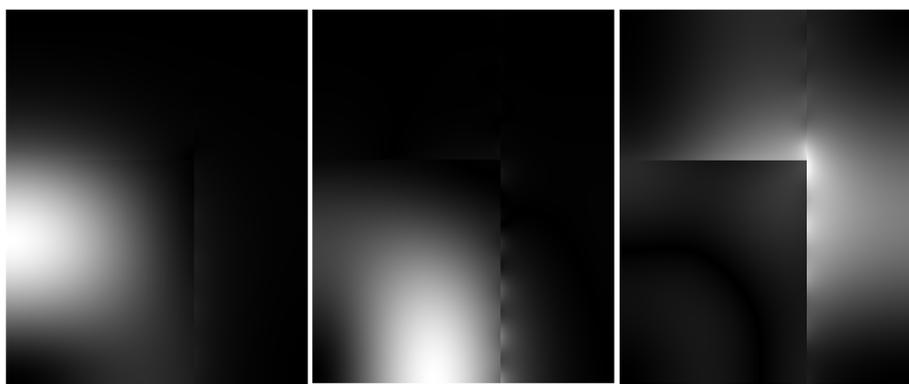


Рис. 10. Дисперсионные характеристики прямоугольного волновода с частичным диэлектрическим заполнением
Fig. 10. Dispersion characteristics of a rectangular waveguide with partial dielectric filling



(1) (2) (3)

a – модифицированный метод Галеркина



(1) (2) (3)

b – метод частичных областей (с использованием аппарата LM и LE-волн)

Рис. 11. Поток мощности в прямоугольном волноводе с угловым координатным диэлектрическим заполнением: заполнением
 (*a* – предложенный метод; *b* – МЧО)

Fig. 11. Power flow in a rectangular waveguide with an angular coordinate dielectric filling: filling (*a* – the proposed method; *b* – MChO)

Пойнтинга по поперечному сечению волновода. Световое представление распределения плотности потока мощности приведено на рис. 11.

Таким образом, на примере прямоугольного волновода с частичным диэлектрическим заполнением показана двойственность предложенного метода.

Заключение

1. Предлагаемый метод расчета волноводов, неоднородно заполненных диэлектриком, является универсальным: единственное ограничение – внешняя металлизированная граница должна быть координатной. При этом легко формулируется краевая задача для соответствующего однородно заполненного волновода (волновода сравнения), и определяется базис представления полей.

2. Метод обладает преимуществом по сравнению с МЧО при решении задач подобного класса, так как не требует введения в частичных областях, для которых нельзя сформулировать краевую за-

дачу Штурма – Лиувилля, непрерывного спектра собственных функций.

3. Метод прост в алгебраизации дисперсионных задач и среди множества компьютерных методов представляется наиболее строгим и математически обоснованным.

4. Составлен алгоритм расчета характеристик симметричных волн цилиндрического волновода с осесимметричным диэлектрическим заполнением, имеющим произвольную зависимость $\varepsilon(r)$. Метод, являющийся модификацией метода Галеркина, не требует аналитического представления поля.

5. Сравнением результатов решений тестовых задач подтверждены корректность и действенность предложенного метода.

6. Метод является альтернативным по отношению к МЧО в тех случаях, когда последний требует многослойной аппроксимации диэлектрического заполнения, и может быть распространен на все волноводы с координатными экранирующими поверхностями.

Список литературы

1. Агалаков А.Н., Раевский С.Б., Титаренко А.А. Применение модифицированного метода Галеркина к решению задач дифракции // Радиотехника и электроника. 2011. Т. 56. № 7. С. 773–781.
2. Агалаков А.Н., Раевский С.Б., Титаренко А.А. Спектральный метод расчета прямоугольных экранированных волноводов с произвольным анизотропным заполнением // Радиотехника и электроника. 2013. Т. 58. № 6. С. 553–563.
3. Иларионов Ю.А., Раевский С.Б., Сморгонский В.Я. Расчет гофрированных и частично заполненных волноводов. М.: Советское радио, 1980. 200 с.
4. Устройства СВЧ- и КВЧ-диапазонов / Ю.А. Иларионов [и др.]. М.: Радиотехника, 2013. 751 с.
5. Агалаков А.Н., Раевский С.Б., Титаренко А.А. О решении краевых задач для волноводов с анизотропным заполнением // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т. 53. № 7. С. 1113–1123.

References

1. Agalakov A.N., Raevskij S.B., Titarenko A.A. The use of a modified Galerkin method to solve diffraction problems. *Radiotekhnika i elektronika*, 2011, vol. 56, no. 7, pp. 773–781. (In Russ.)
2. Agalakov A.N., Raevskij S.B., Titarenko A.A. The spectral method for calculating the rectangular waveguides with arbitrary anisotropic flooding. *Radiotekhnika i elektronika*, 2013, vol. 58, no. 6, pp. 553–563. (In Russ.)
3. Ilarionov Ju.A., Raevskij S.B., Smorgonskij V.Ja. *Calculation of Corrugated and Partly Filled Waveguides*. Moscow: Sovetskoe radio, 1980, 200 p. (In Russ.)
4. Ilarionov Ju.A. et al. *Microwave Devices and EHF Bands*. Moscow: Radiotekhnika, 2013, 751 p. (In Russ.)
5. Agalakov A.N., Raevskij S.B., Titarenko A.A. The solution of boundary value problems for waveguides with anisotropic flooding. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki*, 2013, vol. 53, no. 7, pp. 1113–1123. (In Russ.)

Physics of Wave Processes and Radio Systems 2020, vol. 23, no. 1, pp. 20–31

Calculation of the wave spectra of shielded waveguides with arbitrary dielectric filling using the modified Galerkin method and the partial domain method

S.A. Kapustin, N.A. Novoselova, S.B. Raevskii, A.A. Titarenko

Nizhny Novgorod State Technical University n. a. R.E. Alekseev
24, Minin Street
Nizhny Novgorod, 603950, Russia

Abstract – We consider a method for calculating the natural wave spectra of round and rectangular shielded waveguides with arbitrary dielectric filling, which is a modification of the Galerkin method and based on the representation of the wave fields of the guiding structure in the form of an expansion in the eigenfunctions of the boundary value problem for uniformly filled waveguides. An algorithm for calculating the characteristics of symmetric waves of a circular waveguide with gradient dielectric filling and a rectangular shielded waveguide with arbitrary and angular dielectric filling has been compiled.

Keywords – modified Galerkin method, partial region method, wave spectrum, symmetric waves, dispersion equation.

Информация об авторах

Капустин Сергей Андреевич, 1994 г. р., аспирант кафедры «Физика и техника оптической связи» Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексева.

Область научных интересов: прикладная электродинамика, техника СВЧ-, КВЧ- и оптического диапазонов.

E-mail: physics@nntu.ru

Новоселова Наталия Анатольевна, кандидат технических наук, доцент кафедры «Физика и техника оптической связи» Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексева.

Область научных интересов: прикладная электродинамика, техника СВЧ-, КВЧ- и оптического диапазонов.

E-mail: physics@nntu.ru

Раевский Сергей Борисович, 1941 г. р., доктор технических наук, профессор кафедры «Физика и техника оптической связи» Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексева. Заслуженный деятель науки РФ.

Область научных интересов: электродинамика, техника СВЧ-, КВЧ- и оптического диапазонов.

E-mail: physics@nntu.ru

Титаренко Алексей Александрович, биография недоступна на момент публикации.

Information about the Authors

Sergey A. Kapustin was born in 1994, postgraduate student of the Department of Physics and Optical Communication Technology, Nizhny Novgorod State Technical University n. a. R.E. Alekseev.

Research interests: applied electrodynamics, microwave, EHF and optical ranges.

E-mail: physics@nntu.ru

Natalia A. Novoselova, Candidate of Technical Sciences, associate professor of the Department of Physics and Optical Communication Technology, Nizhny Novgorod State Technical University n. a. R.E. Alekseev.

Research interests: applied electrodynamics, microwave, EHF and optical ranges.

E-mail: physics@nntu.ru

Sergey B. Raevskii was born in 1941, Doctor of Technical Sciences, professor of the Department of Physics and Optical Communication Technology, Nizhny Novgorod State Technical University n. a. R.E. Alekseev, Honored Scientist of the Russian Federation.

Research interests: electrodynamics, microwave, EHF and optical ranges.

E-mail: physics@nntu.ru

Alexey A. Titarenko, biography not available at the time of publication.