

# Физика волновых процессов и радиотехнические системы

УДК 621.396.9  
DOI 10.18469/1810-3189.2019.22.4.50-57

Дата поступления: 09.10.2019  
Дата принятия: 06.11.2019

## Математическая модель фильтрации канонических параметров спутника-ретранслятора при орбитальном движении

*И.С. Полянский, И.В. Полянская, Т.З. Фам*

Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации  
302015, Российская Федерация, г. Орел  
ул. Приборостроительная, 35

Для эффективного решения задачи оценки канонических параметров спутника-ретранслятора при орбитальном движении сформулирована содержательная постановка, в рамках которой задана обобщенная схема модели фильтрации координат и вектора скорости движения спутника-ретранслятора. Введена система ограничений и допущений. При представлении вектора состояния непрерывным векторным марковским процессом определены обобщенные уравнения состояния и наблюдения в кинематических переменных. С применением методов численного дифференцирования, схем решения обыкновенных дифференциальных уравнений, оптимизации выполнена линеаризация исходной задачи фильтрации при определении правил вычисления матриц эволюции и измерений. Работоспособность сформированных алгоритмических решений проверена на конкретных примерах.

*Ключевые слова:* математическая модель, фильтрация канонических параметров спутника-ретранслятора, возмущенное инерциальное орбитальное движение, векторный марковский процесс, расширенный фильтр Калмана.

Активно развивающиеся системы радионавигации, геолокации и радиоконтроля в системах спутниковой связи обуславливают актуальность задачи максимально точной (ошибка соизмеряется единицами метров) оценки канонических параметров (мгновенные значения координат и вектора скорости) спутников-ретрансляторов (СР) при орбитальном движении [1]. Указанная задача является одной из составляющих проблемы баллистико-навигационного обеспечения, которая в Российской Федерации решается Баллистическими центрами Министерства обороны, Института прикладной математики им. М.В. Келдыша и Росавиакосмосом. Фундаментальную основу для решения задачи оценки канонических параметров СР составляет теория баллистического проектирования искусственных спутников Земли, теория оценивания и фильтрации.

Теория баллистического проектирования основана на положениях и принципах небесной механики [2–6] при изучении особенностей вычислений матриц прецессии и нутации, звездного времени, положения Луны и Солнца относительно центра масс Земли, эффектов движения полюса Земли, разниц всемирного и всемирного координированного времени и пр. По своей сути разрабатываемые математические модели баллистики в формируемых и совершенствуемых современных численно-аналитических теориях движения

✉ van341@mail.ru (Полянский Иван Сергеевич)

искусственных спутников Земли [11] при заданных начальных условиях сводятся к решению систем дифференциальных уравнений в кинематических или оскулирующих переменных, которые задают уравнение состояние относительно прогнозируемых канонических параметров СР на текущий момент времени. Фактически канонические параметры, полученные при экстраполяции из уравнения состояния, всегда отличаются от реальных из-за действия и неполноты учета возмущающих факторов, неадекватности расчетных моделей [2]. Повышение точности указанных методов возможно при добавлении к уравнению состояния дополнительной системы уравнений наблюдения, задающей в формируемой модели разнесенных измерительных сенсоров независимое правило оценки канонических параметров СР, с последующей фильтрацией получаемых значений состояния и наблюдения по выбранному критерию в обобщенной теории байесовской фильтрации [12; 25]. Подобные решения с применением калмановской модели фильтрации координат подвижного объекта рассматриваются в работах В.С. Черняка [13], D. Musicki, W. Koch [14], В.Н. Харисова, А.И. Яковлева, А.Г. Глущенко [15], Zhixin Liu, Yongjun Zhao, Dexiu Hu, Chengcheng Liu [16], К.С. Но [17] и др. Однако указанные исследования непосредственно не рассматривают задачу фильтрации канонических параметров СР и не учитывают особенности фор-

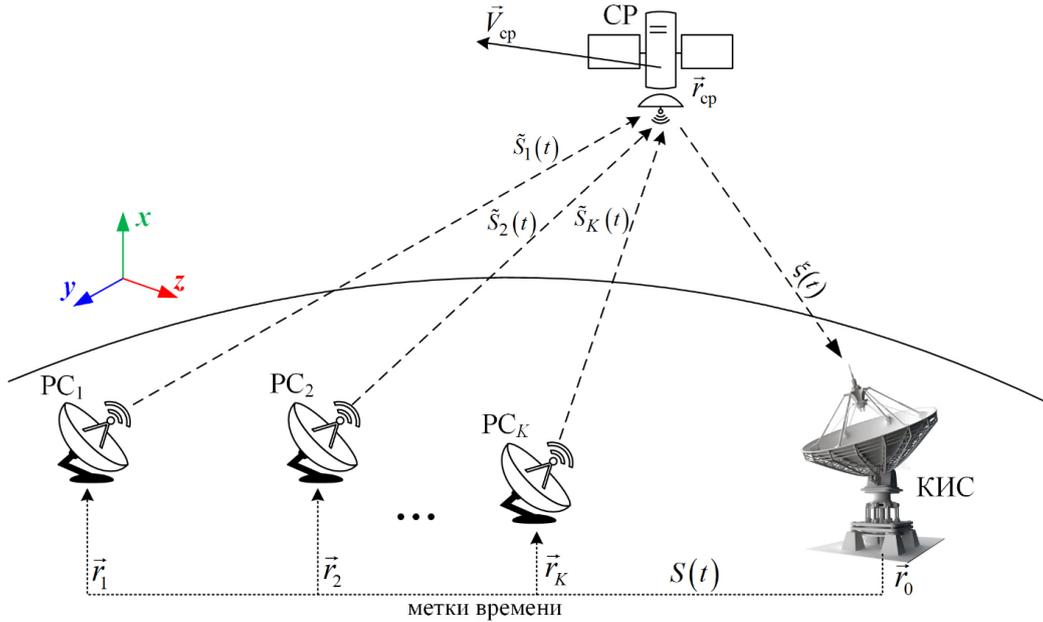


Рис. 1. Схема задачи фильтрации канонических параметров спутника-ретранслятора при орбитальном движении

мирования рекуррентных алгоритмических решений с определением матриц эволюции и перехода при линеаризации исходной модели. Последнее затрудняет построение адекватных математических моделей фильтрации канонических параметров спутника-ретранслятора при орбитальном движении. Устранение указанного недостатка является целью настоящей статьи.

С учетом анализа решений [1; 12–16] сформирована схема задачи фильтрации канонических параметров спутника-ретранслятора при орбитальном движении (рис. 1).

Основные объекты схемы: командно-измерительная система (КИС); спутник-ретранслятор (СР);  $K$  реперных станций (РС). Вектор параметров  $\vec{\lambda}(t) = \{\vec{r}_{cp}(t), \vec{V}_{cp}(t)\}$  состояния СР является исследуемым векторным случайным процессом, который задает канонические параметры СР – положение  $\vec{r}_{cp}(t)$  и скорость  $\vec{V}_{cp}(t)$  в момент времени  $t$ . Положения КИС и РС известны и характеризуются векторами  $\vec{r}_0$  и  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_K$  соответственно.

Реперные станции  $k$ -е передают тестовый сигнал  $S(t)$  на спутник-ретранслятор с частотой  $f_k^{BB}(t)$ . Передача сигнала выполняется синхронно с помощью меток времени спутниковых радионавигационных систем ГЛОНАСС и/или GPS [1]. На входе приемника СР наблюдается сигнал  $\tilde{S}_k(t)$  ( $k = \overline{1, K}$ ), различие которого от исходного  $S(t)$  обуславливается воздействием помех среды распространения радиосигнала и смещения  $f_k^{BB}(t)$  на величину доплеровского сдвига частоты  $\Delta f_k^{BB}(\vec{\lambda}, t)$  на участке распространения от  $k$ -й

РС до СР. Ретрансляция сигнала  $S(t)$   $k$ -й РС спутником связи осуществляется на частоте  $f_k^{BB}(t) + \Delta f_k^{BB}(\vec{\lambda}, t) + \Delta f^{CP}(t)$ , где  $\Delta f^{CP}(t)$  – частота переноса СР на линию вниз (участок от СР до КИС), которая формируется из суммарной частоты всех гетеродинов приемника и передатчика СР. На входе приемника КИС сигнал  $S(t)$   $k$ -й РС наблюдается на частоте  $f_k^{BB}(t) + \Delta f_k^{BB}(\vec{\lambda}, t) + \Delta f^{CP}(t) + \Delta f_k^{BH}(\vec{\lambda}, t)$ , где  $\Delta f_k^{BH}(\vec{\lambda}, t)$  – доплеровский сдвиг частоты на участке распространения от СР до КИС. На выходе приемника КИС формируется суммарный сигнал

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^K A_k(t) S(t - T_k(\vec{\lambda}, t)) e^{2\pi i \Delta F_k(\vec{\lambda}, t)t} + \nu(t),$$

составленный из сдвинутых по временному  $T_k(\vec{\lambda}, t)$  и частотному  $\Delta F_k(\vec{\lambda}, t)$  параметрам сигналов  $k$ -х реперных станций, затухания  $A_k(t)$  сигнала на участке распространения  $k$ -я РС–СР–КИС и шума  $\nu(t)$ . Шумовой параметр  $\nu(t)$  в рассматриваемой математической модели непрерывного канала связи определяет помехи среды распространения на линиях вверх и вниз (соответствующие участки от  $k$ -й РС до СР и от СР до КИС).

Величина времени прихода  $T_k(\vec{\lambda}, t)$  сигнала  $S(t)$  от  $k$ -й РС на КИС складывается  $T_k(\vec{\lambda}, t) = \tau_k(\vec{\lambda}, t) + \delta_k^T(t)$  из ошибки  $\delta_k^T(t)$  измерения и истинного времени  $\tau_k(\vec{\lambda}, t)$  прихода на КИС сигнала от  $k$ -й РС. Значение  $\tau_k(\vec{\lambda}, t)$  удовлетворяет тождеству

$$\tau_k(\vec{\lambda}, t) = c^{-1} \left( \left| \vec{r}_k - \vec{r}_{cp}(t) \right| + \left| \vec{r}_{cp}(t) - \vec{r}_0 \right| \right), \quad (1)$$

где  $c$  – скорость света в вакууме.

Ошибка  $\delta_k^r(t)$  обуславливается ионосферной и тропосферной ошибками измерения на линиях вверх и вниз – соответствующие участки от  $k$ -й РС до СР и от СР до КИС и ошибкой синхронизации передачи сигналов РС по меткам времени.

Величина частотного сдвига  $\Delta F_k(\bar{\lambda}, t)$  принимаемого КИС сигнала  $S(t)$   $k$ -й РС от СР определяется

$$\Delta F_k(\bar{\lambda}, t) = f_k^{BB}(t) + \Delta f_k^{BB}(\bar{\lambda}, t) + \Delta f^{CP}(t) + \Delta f_k^{BH}(\bar{\lambda}, t) + \Delta f^{KIC}(t) = \Delta f_k(\bar{\lambda}, t) + \delta_k^f(t),$$

где  $\Delta f^{KIC}(t)$  – суммарная частота всех гетеродинов приемника КИС;  $\Delta f_k(\bar{\lambda}, t)$  и  $\delta_k^f(t)$  – истинный частотный сдвиг принятого КИС сигнала  $S(t)$  от  $k$ -й РС и ошибка измерения  $\Delta f_k(\bar{\lambda}, t)$  соответственно. Значение  $\Delta f_k(\bar{\lambda}, t)$  удовлетворяет тождеству

$$\Delta f_k(\bar{\lambda}, t) = \tilde{n}^{-1} \bar{V}_{CP}(t) \left( \tilde{f}_k^{BB} \frac{\bar{r}_{CP}(t) - \bar{r}_k}{|\bar{r}_{CP}(t) - \bar{r}_k|} + \tilde{f}_k^{BH} \frac{\bar{r}_0 - \bar{r}_{CP}(t)}{|\bar{r}_0 - \bar{r}_{CP}(t)|} \right), \quad (2)$$

где  $\tilde{f}_k^{BB} = \mathbb{E}[f_k^{BB}]$  и  $\tilde{f}_k^{BH} = \mathbb{E}[f_k^{BH} = f_k^{BB} + \Delta f^{CP}]$  – средние номинальные значения передачи сигнала  $S(t)$   $k$ -й РС на линиях вверх и вниз соответственно.

Ошибка  $\delta_k^f(t)$  обуславливается нестабильностями гетеродинов передатчиков  $k$ -х РС, СР и приемника СР, КИС.

Учитывая содержательное описание схемы фильтрации канонических параметров СР при орбитальном движении, сформулируем основные допущения и ограничения, выделяемые при решении задачи математического моделирования.

1. Математическая модель пространственного движения спутника-ретранслятора формируется в земной системе координат и задается в кинематических параметрах:

$$\begin{aligned} d\bar{V}_{CP}(t)/dt &= \mathbf{M}_{ct}(t) \left( \bar{\Psi}(t) - \mu \left| \bar{r}_{CP}(t) \right|^{-3} \bar{r}_{CP}(t) \right) - \\ &- \mathbf{M}_{ct}(t) \mathbf{M}_{ct}^T(t) \bar{V}_{CP}(t) + \bar{\Delta}_V(t); \\ d\bar{r}_{CP}(t)/dt &= \bar{V}_{CP}(t) - \\ &- \mathbf{M}_{ct}(t) \mathbf{M}_{ct}^T(t) \bar{r}_{CP}(t) + \bar{\Delta}_r(t), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\mu = GM$  – гравитационный параметр Земли;  $G = 6,6719 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$  – постоянная поля тяготения Земли;  $M = 5,974227218225421 \cdot 10^{24} \text{ кг}$  – масса Земли;  $\bar{\Delta}_V(t)$  и  $\bar{\Delta}_r(t)$  – векторные функции, которые характеризуют случайных характер изменения вектора скорости и положения СР соответственно;  $\bar{\Psi}(t)$  – возмущающее ускорение,

обусловленное действие сил (влияние нецентрированного поля тяготения Земли, притяжение третьих тел, давление солнечного света, наличие атмосферы и др. [2; 7]) на СР;  $\mathbf{M}_{ct}^T(t)$  – транспонированная матрица  $\mathbf{M}'_{ct}(t) = d\mathbf{M}_{ct}(t)/dt$ ;  $\mathbf{M}_{ct}(t)$  – матрица преобразования небесной системы координат в Земную. Предполагается, что вычисление элементов матрицы  $\mathbf{M}'_{ct}(t)$  выполняется численно с применением интерполяционного метода, например Лагранжа. Производная произвольной функции  $f(x)$  в таком случае будет определяться соотношением

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \sum_{l=0}^{2L} f(\Delta x_l) \times \begin{cases} \frac{1}{\Delta x_l - \Delta x_{l_1}} \prod_{l_2=0}^{2L} \left\{ \frac{(x - \Delta x_{l_2})}{(\Delta x_l - \Delta x_{l_2})} \right\}; \\ \times \sum_{l_1=0}^{2L} \begin{cases} 1, & l_2 = l \vee l_2 = l_1, \\ 0, & l_1 = l, \\ 0, & l_1 \neq l; \end{cases} \end{cases} \quad (4)$$

где  $\Delta x_l = x + \Delta(l-L)$ ;  $\Delta$  – шаг численного дифференцирования;  $2L$  – порядок интерполяции.

2. Правила вычисления элементов  $\bar{\Psi}(t)$ ,  $\mathbf{M}_{ct}(t)$  известны и могут быть реализованы по алгоритмам, представленным в [18].

3. Ошибки измерений  $\delta_k^r(t)$ ,  $\delta_k^f(t)$  и эволюции  $\bar{\Delta}_V(t)$ ,  $\bar{\Delta}_r(t)$ , характеризующие флуктуацию случайных параметров, являются случайными величинами, которые распределены по нормальному закону.

4. Особенности реализации многостанционного доступа РС к частотно-энергетическому ресурсу СР выносятся за рамки формируемой математической модели.

Для формирования обобщенной математической модели фильтрации канонических параметров СР представим  $\bar{\lambda}(t)$  непрерывным векторным марковским процессом, эволюция которого в общем виде определяется из уравнения состояния:

$$\dot{\bar{\lambda}}_t = \bar{\Phi}(\bar{\lambda}_t, t) + \bar{w}_t, \quad (5)$$

где  $\bar{\lambda}_t \equiv \bar{\lambda}(t)$ ;  $\dot{\bar{\lambda}}_t \equiv \frac{d\bar{\lambda}_t}{dt}$ ;  $\bar{\Phi}(\bar{\lambda}_t, t)$  – вектор сноса;  $\bar{w}_t \equiv \bar{w}(t)$  – белый гауссовский вектор-шум при  $\mathbb{E}[\bar{w}_t] = 0$  и  $\text{cov}[\bar{w}_t] = \mathbf{Q}_t$ , наблюдаемый по праву

$$\bar{\eta}_t = \bar{Y}(\bar{\lambda}_t, t) + \bar{v}_t, \quad (6)$$

где  $\eta_t \equiv \eta(t)$ ;  $\bar{v}_t \equiv \bar{v}(t)$  – белый гауссовский вектор-шум при  $\mathbb{E}[\bar{W}_t] = 0$  и  $\text{cov}[\bar{v}_t] = \mathbf{R}_t$ ;  $\bar{Y}(\bar{\lambda}_t, t)$  –

функции измерения канонических параметров СР по принимаемым сигналам РС.

С учетом заданной постановки задачи фильтрации в соотношениях состояния (5) и наблюдения (6) вектор сноса  $\bar{\Phi}(\bar{\lambda}_t, t)$  и вектор-шум  $\bar{w}_t$  для  $\bar{\lambda}(t) = \{\bar{r}_{cp}(t), \bar{V}_{cp}(t)\}$  определяются из выражения (3) соответствующими соотношениями:

$$\bar{\Phi}(\bar{\lambda}_t, t) = \begin{pmatrix} \bar{V}_{cp}(t) - \mathbf{M}_{ct}(t) \mathbf{M}_{ct}^T(t) \bar{r}_{cp}(t) \\ \mathbf{M}_{ct}(t) \left( \bar{\Psi}(t) - \frac{\mu}{|\bar{r}_{cp}(t)|^3} \bar{r}_{cp}(t) \right) \\ - \mathbf{M}_{ct}(t) \mathbf{M}_{ct}^T(t) \bar{V}_{cp}(t) \end{pmatrix}; \quad (7)$$

$$\bar{w}_t = \begin{pmatrix} \bar{\Delta}_r(t) \\ \bar{\Delta}_V(t) \end{pmatrix},$$

а функция измерения  $\bar{Y}(\bar{\lambda}_t, t)$  задается решением системы из 6 уравнений, составленных тождествами (1), (2), и при обозначениях

$$G_k^r(\bar{\lambda}, t) = |\bar{r}_k - \bar{r}_{cp}(t)| + |\bar{r}_{cp}(t) - \bar{r}_0| - c\tau_k(\bar{\lambda}, t),$$

$$G_k^f(\bar{\lambda}, t) = \bar{V}_{cp}(t) \times$$

$$\times \left( \frac{\tilde{f}_k^{BB}}{\Delta f_k(\bar{\lambda}, t)} \frac{\bar{r}_{cp}(t) - \bar{r}_k}{|\bar{r}_{cp}(t) - \bar{r}_k|} + \frac{\tilde{f}_k^{BH}}{\Delta f_k(\bar{\lambda}, t)} \frac{\bar{r}_0 - \bar{r}_{cp}(t)}{|\bar{r}_0 - \bar{r}_{cp}(t)|} \right) - c,$$

задаваемых в виде

$$\begin{pmatrix} G_{k_1}^r(\bar{\lambda}, t) & G_{k_2}^r(\bar{\lambda}, t) & G_{k_3}^r(\bar{\lambda}, t) \\ G_{k_1}^f(\bar{\lambda}, t) & G_{k_2}^f(\bar{\lambda}, t) & G_{k_3}^f(\bar{\lambda}, t) \end{pmatrix}^T = \bar{G}(\bar{\lambda}, t) = 0, \quad (8)$$

где  $k_1, k_2, k_3 \in [1; K] : k_1 \neq k_2 \neq k_3$ .

Приняв дополнительное ограничение о том, что на длительности  $\Delta t$  элементы вектора  $\bar{\lambda}_t$  при достаточно медленном изменении постоянны, разобьем интервал наблюдения  $[0, T]$  на тактовые подынтервалы  $t \in [t_j, t_{j+1}]$  ( $\Delta t = t_{j+1} - t_j; j = \overline{1, N_t}; N_t = \lfloor T/\Delta t \rfloor$ ) и перепишем уравнения состояния (5) и наблюдения (6) в виде

$$\dot{\bar{\lambda}}_j = \bar{\Phi}(\bar{\lambda}_j, t_j) + \bar{w}_j; \quad (9)$$

$$\bar{\eta}_j = \bar{Y}(\bar{\lambda}_j, t_j) + \bar{v}_j, \quad (10)$$

где  $\bar{\lambda}_j \equiv \bar{\lambda}(t_j); \bar{\eta}_j \equiv \bar{\eta}(t_j); \bar{w}_j \equiv \bar{w}(t_j); \bar{v}_j \equiv \bar{v}(t_j)$ .

С учетом заданного дополнительного ограничения оценка частотных  $\Delta f_k(\bar{\lambda}_j, t_j)$  и временных  $\tau_k(\bar{\lambda}_j, t_j)$  параметров в (8), принимаемого КИС сигнала  $k$ -й РС, выполняется по правилу макси-

мального правдоподобия взаимной функции неопределенности (ВНФ), которое представлено, например, в [19].

Решение системы нелинейных уравнений (8) предлагается выполнять численно, например методом Ньютона [20], при составлении приближения наблюдаемого вектора состояния  $\bar{\eta}_j$  СР итерационным вычислением

$$\bar{\eta}_j^{[n+1]} = \bar{\eta}_j^{[n]} - \mathbf{H}^{-1}(\bar{\eta}_j^{[n]}, t_j) \bar{G}(\bar{\eta}_j^{[n]}, t_j), \quad (11)$$

где  $n \in [0; N]$ ,  $N$  - максимальное число итераций;  $\bar{\eta}_j^{[0]} = \bar{\lambda}_j$ ;  $\mathbf{H}(\bar{\eta}_j^{[n]}, t_j)$  - матрица Якоби для системы функций  $\bar{G}(\bar{\eta}_j^{[n]}, t_j)$ . Основные элементы матрицы  $\mathbf{H}(\bar{\lambda}, t)$  при обозначениях  $\bar{r}_{cp} = (r_1^{cp}, r_2^{cp}, r_3^{cp})^T$ ,  $\bar{r}_k = (r_1^k, r_2^k, r_3^k)^T$ ,  $\bar{r}_0 = (r_1^0, r_2^0, r_3^0)^T$ ,  $\bar{V}_{cp} = (V_1^{cp}, V_2^{cp}, V_3^{cp})^T$  задаются через следующие частные производные:

$$\begin{aligned} \partial G_k^r / \partial r_{1,2,3}^{cp} &= (r_{1,2,3}^{cp} - r_{1,2,3}^k) |\bar{r}_k - \bar{r}_{cp}|^{-1} + \\ &+ (r_{1,2,3}^{cp} - r_{1,2,3}^0) |\bar{r}_{cp} - \bar{r}_0|^{-1}; \\ \frac{\partial G_k^f}{\partial r_{1,2,3}^{cp}} &= \frac{-\tilde{f}_k^{BB}}{\Delta f_k} \left( \frac{r_{1,2,3}^{cp} - r_{1,2,3}^k}{|\bar{r}_k - \bar{r}_{cp}|} \frac{\bar{r}_{cp} - \bar{r}_k}{|\bar{r}_{cp} - \bar{r}_k|} \bar{V}_{cp} - \frac{V_{1,2,3}^{cp}}{|\bar{r}_{cp} - \bar{r}_k|} \right) + \\ &+ \frac{\tilde{f}_k^{BH}}{\Delta f_k} \left( \frac{r_{1,2,3}^{cp} - r_{1,2,3}^0}{|\bar{r}_0 - \bar{r}_{cp}|} \frac{\bar{r}_{cp} - \bar{r}_0}{|\bar{r}_{cp} - \bar{r}_0|} \bar{V}_{cp} - \frac{V_{1,2,3}^{cp}}{|\bar{r}_{cp} - \bar{r}_0|} \right); \\ \frac{\partial G_k^f}{\partial V_{1,2,3}^{cp}} &= \frac{\tilde{f}_k^{BB}}{\Delta f_k} \frac{r_{1,2,3}^{cp} - r_{1,2,3}^k}{|\bar{r}_k - \bar{r}_{cp}|} - \frac{\tilde{f}_k^{BH}}{\Delta f_k} \frac{r_{1,2,3}^{cp} - r_{1,2,3}^0}{|\bar{r}_{cp} - \bar{r}_0|}. \end{aligned} \quad (12)$$

Прогнозирование состояния  $\bar{\lambda}_{j+1}$  СР в момент времени  $t_{j+1}$  осуществляется решением обыкновенного дифференциального уравнения  $\dot{\bar{\lambda}}_j = \bar{\Phi}(\bar{\lambda}_j, t_j)$  из (9) с применением явного метода Рунге - Кутты [21]:

$$\bar{\lambda}_{j+1} = \bar{\lambda}_j + h \sum_{i=0}^s b_i \kappa_{ji};$$

$$\kappa_{ji} = \bar{\Phi} \left( \bar{\lambda}_j + h \sum_{i'=1}^{i-1} a_{i'i'} \kappa_{ji'}, t_j + c_i h \right), \quad (13)$$

$$\kappa_{j0} = \bar{\Phi}(\bar{\lambda}_j, t_j),$$

где  $h \leq \Delta t$  - величина шага по временной сетке;  $s$  - число этапов численной схемы;  $a_{i'i'}$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  - вещественные коэффициенты, которые могут быть заданы по правилам из [21].

Рекуррентное вычисление (11) формирует приближенный вид  $\bar{Y}_{\varepsilon_N}(\bar{\lambda}_j, t_j)$  функции измерения  $\bar{Y}(\bar{\lambda}_j, t_j)$  и совместно с численным решением (13) позволяют задать нелинейную задачу фильтрации канонических параметров СР при орбитальном движении:

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_{j+1} &= \bar{\lambda}_j + \bar{\Phi}_{\varepsilon_h}(\bar{\lambda}_j, t_j) + \bar{w}_{j+1}; \\ \bar{\eta}_{j+1} &= \bar{Y}_{\varepsilon_N}(\bar{\lambda}_{j+1}, t_{j+1}) + \bar{v}_{j+1}.\end{aligned}\quad (14)$$

где

$$\bar{\Phi}_{\varepsilon_h}(\bar{\lambda}_j, t_j) = h \sum_{i=0}^s b_i \bar{\Phi} \left( \bar{\lambda}_j + h \sum_{i'=1}^{i-1} a_{i'i'} \kappa_{j'i'}, t_j + c_i h \right).$$

Выполним линеаризацию сформированной модели (14) при разложении функции эволюции  $\bar{\lambda}_j + \bar{\Phi}_{\varepsilon_h}(\bar{\lambda}_j, t_j)$  и функции измерения  $\bar{Y}_{\varepsilon_N}(\bar{\lambda}_j, t_j)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $\bar{\lambda}_j$  по первому члену:

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_{j+1} &= \mathbf{A}_j \bar{\lambda}_j + \bar{\mathbf{B}}_j + \bar{w}_{j+1}; \\ \bar{\eta}_{j+1} &= \mathbf{C}_{j+1} \bar{\lambda}_{j+1} + \bar{\mathbf{D}}_{j+1} + \bar{v}_{j+1},\end{aligned}\quad (15)$$

где  $\mathbf{A}_j = \mathbf{J}_M(\bar{\lambda}_j, t_j) + \mathbf{E}$ ;  $\bar{\mathbf{B}}_j = \bar{\Phi}_{\varepsilon_h}(\bar{\lambda}_j, t_j) - \mathbf{J}_M(\bar{\lambda}_j, t_j) \bar{\lambda}_j$ ;  $-\mathbf{J}_M(\bar{\lambda}_j, t_j) \bar{\lambda}_j$ ;  $\mathbf{J}_M(\bar{\lambda}_j, t_j)$  – матрица Якоби для системы функций  $\bar{\Phi}_{\varepsilon_h}(\bar{\lambda}_j, t_j)$ ;  $\bar{\mathbf{D}}_{j+1} = -\mathbf{H}^{-1}(\bar{\lambda}_{j+1}, t_{j+1}) \bar{\mathbf{G}}(\bar{\lambda}_{j+1}, t_{j+1}) + \mathbf{J}_S(\bar{\lambda}_{j+1}, t_{j+1}) \bar{\lambda}_{j+1}$ ;  $\mathbf{C}_{j+1} = \mathbf{E} - \mathbf{J}_S(\bar{\lambda}_{j+1}, t_{j+1})$ ;  $\mathbf{J}_S(\bar{\lambda}_{j+1}, t_{j+1})$  – матрица Якоби для системы функций  $\mathbf{H}^{-1}(\bar{\lambda}_{j+1}, t_{j+1}) \bar{\mathbf{G}}(\bar{\lambda}_{j+1}, t_{j+1})$ ;  $\mathbf{E}$  – единичная матрица. Элементы матриц  $\mathbf{J}_M(\bar{\lambda}_j, t_j)$ ,  $\mathbf{J}_S(\bar{\lambda}_{j+1}, t_{j+1})$  предлагается вычислять численно с применением интерполяционного метода Лагранжа по заданному правилу (4).

Разработанная математическая модель (14) с учетом правила (15) по ее линеаризации позволяет применить известный алгоритм расширенного фильтра Калмана [22; 25] с использованием современных численных методов [26–28] для решения задачи оптимальной фильтрации канонических параметров СР при орбитальном движении.

Для практического обоснования сформированного решения в Mathcad проведено математическое моделирование рассматриваемой задачи. Исходные данные вычислительного эксперимента выбраны следующими.

1. Параметры СР: Ямал-401 (номер спутника в базе NORAD 40345); номер витка на момент эпохи 1605; начальное время и дата моделирования 12 часов 40 минут 43 секунд 6.04.2019; длитель-

ность измерений 2 дня; эксцентриситет орбиты 0,0000373; наклон орбиты 0,00025481807079117 рад; долгота восходящего узла 3,3725276388966745 рад; аргумент перигея 4,208400724261799 рад; средняя аномалия 0,7031373050924515 рад; частота обращения 1,00271746 обор./день; значения первой и второй производных среднего движения по времени –0,00000231 и 0 соответственно.

2. Параметры КИС: широта 52°47'54"; долгота 36°04'42"; высота над уровнем моря 0.

3. Параметры РС: число РС  $K = 4$ ;  $\tilde{f}_k^{\text{BB}} = 5866$  МГц;  $\tilde{f}_k^{\text{BB}} = 3541$  МГц;  $B = 20$  кГц; широта РС №1 55°45'07"; долгота РС №1 37°36'56"; высота над уровнем моря РС №1 0; широта РС №2 56°51'27"; долгота РС №2 60°36'44"; высота над уровнем моря РС №2 0; широта РС №3 56°29'51"; долгота РС №3 84°58'27"; высота над уровнем моря РС №3 0; широта РС №4 54°42'23"; долгота РС №4 20°30'39"; высота над уровнем моря РС №4 0.

4. Параметры модели состояния СР: поверхность Земли аппроксимируется геоидом EGM2008; возмущение параметров орбиты в модели состояния СР задано притяжением централизованного поля Земли, Луны и Солнца; возмущение параметров орбиты в реальной модели состояния СР дополнено давлением солнечного излучения и нецентрированным притяжением Земли (использованы алгоритмические реализации из [18]).

Для выбранных параметров среднеквадратическая ошибка за время наблюдения модели состояния СР по положению составляет  $\sigma_r = 94,14$  м, а по скорости –  $\sigma_v = 1,495 \cdot 10^{-6}$  м/с.

На рис. 2 приведены зависимости среднеквадратической ошибки оценки канонических параметров СР при орбитальном движении от  $K$ ,  $\Delta t$  и  $\tilde{\gamma}$ , усредненной на заданном интервале наблюдения по 100 расчетам.

Результаты проведенного моделирования подтверждают работоспособность и результативность разработанных алгоритмических решений. По данным апостериорных исследований (рис. 2), сформированное алгоритмическое решение фильтрации канонических параметров СР при орбитальном движении относительно погрешностей экстраполяции и наблюдения в среднем дает возможность снизить среднеквадратическую ошибку оценки в 1,78 раза. Предложенная линеаризация в модели фильтрации при уточнении особенностей формирования рекуррентных алгоритмических решений с определением матриц эволюции и перехода с минимальными вычислительными

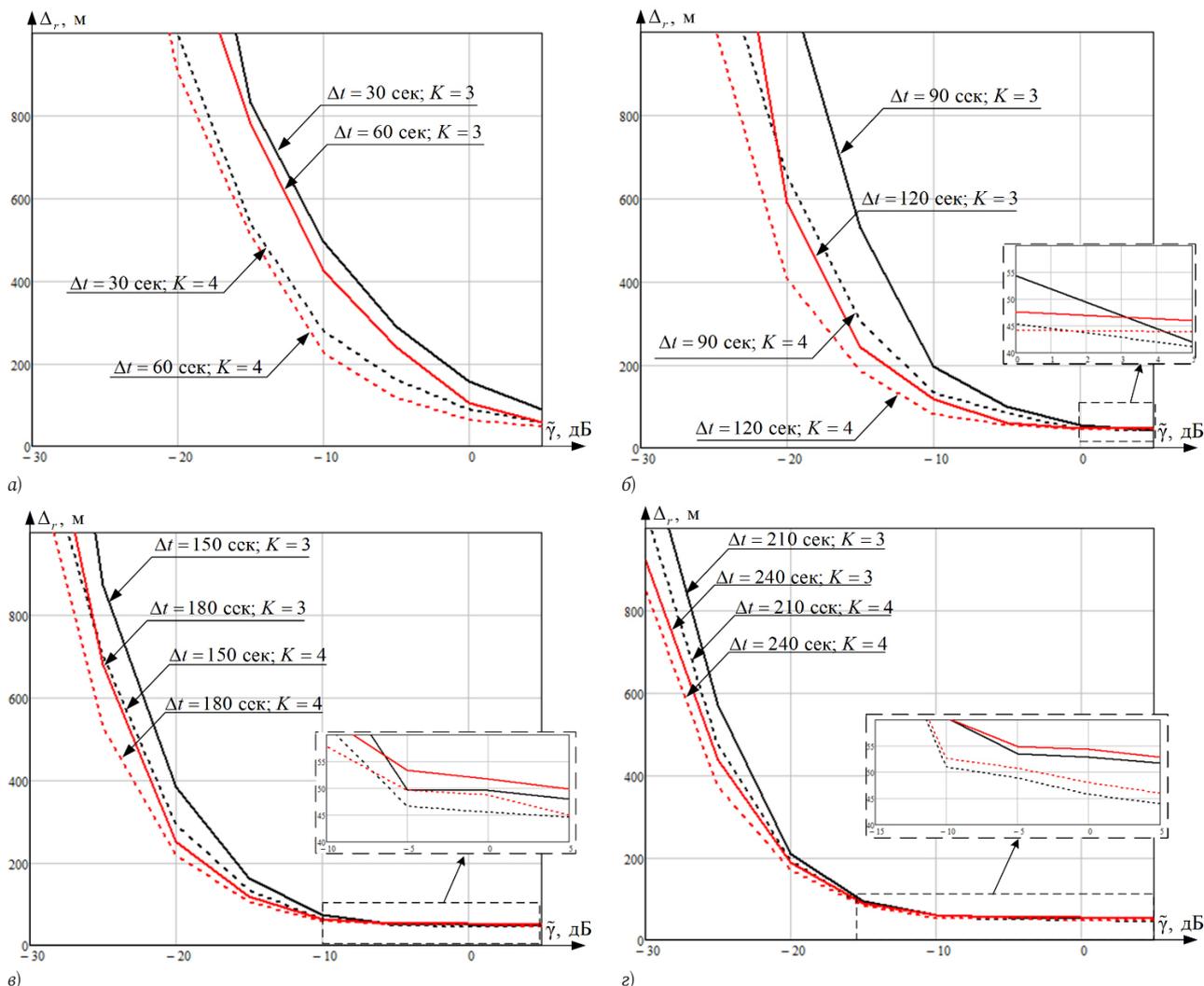


Рис. 2. Графики зависимости среднеквадратической ошибки оценки канонических параметров СР при орбитальном движении от  $K$ ,  $\Delta t$  и  $\tilde{\gamma}$

затратами позволяет снизить накопление ошибок экстраполяции при увеличении времени наблюдения с относительно большой ошибкой наблюдения. Также апостериорно полученные зависимости (рис. 2) среднеквадратической ошибки оценки

канонических параметров СР позволяют сформировать рекомендации по использованию конкретного числа реперных станций для заданных длительности интервала дискретизации и отношению сигнал/шум принимаемого тестового сигнала.

### Список литературы

1. Севидов В.В., Чемаров А.О. Определение координат спутников-ретрансляторов в разностно-дальномерной системе геолокации // Известия высших учебных заведений России. Радиоэлектроника. 2015. № 3. С. 41–47.
2. Охочимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета. М.: Наука, 1990. 448 с.
3. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / В.К. Абалакин [и др.]. Изд. 2-е, доп. и перераб.. М.: Наука, 1976. 864 с.
4. Брауэр Д., Клеменс Дж. Методы небесной механики. М.: Мир, 1964. 515 с.
5. Монтенбрук О., Пфлеггер Т. Астрономия на персональном компьютере. СПб.: Питер, 2002. 320 с.
6. Баринов К.Н., Бурдаев М.Н., Мамон П.А. Динамика и принципы построения орбитальных систем космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1975. 232 с.
7. Аксенов Е.П. Теория движения искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1977. 360 с.
8. Балк М.В. Элементы динамики космического полета. М.: Наука, 1965. 339 с.
9. Лоуден Д.Ф. Оптимальные траектории для космической навигации / пер. с англ. В.К. Исаева. М.: Мир, 1966. 152 с.
10. Эльясберг П.Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1965. 540 с.
11. Чазов В.В. Разработка и применением алгоритмов численно-аналитического метода вычисления положения искусственных спутников Земли: дис. ... д-ра. физ.-мат. наук. М., 2013. 210 с.

12. Возенкрафт Дж., Джекобс И. Теоретические основы техники связи. М.: Мир, 1969. 640 с.
13. Черняк В.С. Многопозиционная радиолокация. М.: Радио и связь, 1993. 416 с.
14. Musicki D., Koch W. Geolocation using TDOA and FDOA measurements // 11th International Conference on Information Fusion. 2008. P. 1–8.
15. Харисов В.Н., Яковлев А.И., Глушенко А.Г. Оптимальная фильтрация координат подвижного объекта // Радиотехника и электроника. 1984. Т. 29. № 10. С. 1939–1947.
16. A moving source localization method for distributed passive sensor using TDOA and FDOA measurements / L. Zhixin [et al.] // International Journal of Antennas and Propagation. 2016. Vol. 2016. P. 8625039-1–12. DOI: <http://dx.doi.org/10.1155/2016/8625039>.
17. Ho K.C., Xu W. An accurate algebraic solution for moving source location using TDOA and FDOA measurements // IEEE Transactions on Signal Processing. 2004. Vol. 52. № 9. P. 2453–2463.
18. Чазов В.В. Прогноз орбитального движения космического аппарата. Численная модель. Научно-технический отчет. URL: [http://vadimchazov.narod.ru/text\\_pdf/comalg.pdf](http://vadimchazov.narod.ru/text_pdf/comalg.pdf).
19. Волков Р.В., Саяпин В.Н., Севидов В.В. Модель измерения временной задержки и частотного сдвига радиосигнала, принятого от спутника-ретранслятора при определении местоположения земной станции // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2016. № 19. С. 14–18.
20. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.Г. Численные методы. 6-е изд. М.: Лаборатория базовых знаний, 2008. 636 с.
21. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи / пер. с англ. И.А. Кульчицкой и С.С. Филипова. М.: Мир, 1990. 512 с.
22. Джиган В.И. Адаптивная фильтрация сигналов: теория и алгоритмы. М.: Техносфера, 2013. 512 с.
23. Solar System Dynamics. URL: <http://ssd.jpl.nasa.gov>.
24. Полянский И.С., Патронов Д.Ю. Максимально правдоподобная оценка дисперсионно-ковариационной матрицы // Современные проблемы науки и образования. 2013. № 1. URL: <http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=8516>.
25. Chen Z. Bayesian filtering: from Kalman filters to particle filters, and Beyond // Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics. 2003. № 182 (1). P. 1–69.
26. Полянский И.С. Метод одномерной безусловной оптимизации в задаче оценки развязки парциальных лучей многолучевой антенны зеркального типа // Современные проблемы науки и образования. 2012. № 4. URL: <http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=6880>.
27. Распределение однородного непрерывного ограниченного ресурса в иерархических системах транспортного типа с древовидной структурой / И.С. Полянский [и др.] // Информационные системы и технологии. 2013. № 2 (76). С. 99–106.
28. Полянский И.С., Степанов Д.Е., Фролов М.М. Гибридный генетический метод с градиентным обучением и прогнозированием для решения задач глобальной оптимизации многоэкстремальных функций // Вестник Брянского государственного технического университета. 2014. № 3 (43). С. 138–146.

## References

1. Sevidov V.V., Chemarov A.O. Determining the coordinates of relay satellites in range-difference geolocation system. *Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij Rossii. Radioelektronika*, 2015, no. 3, pp. 41–47. [In Russian].
2. Ohotsimskij D.E., Siharulidze Ju.G. *Basics of Space Flight Mechanics*. Moscow: Nauka, 1990, 448 p. [In Russian].
3. Abalakin V.K. et al. *Reference Guide on Celestial Mechanics and Astrodynamics*. 2nd ed. Moscow: Nauka, 1976, 864 p. [In Russian].
4. Brauer D., Klemens J. *Methods of Celestial Mechanics*. Moscow: Mir, 1964, 515 p. [In Russian].
5. Montenbruk O., Pflieger T. *Astronomy on the Personal Computer*. Saint-Petersburg: Piter, 2002, 320 p. [In Russian].
6. Barinov K.N., Burdaev M.N., Mamon P.A. *Dynamics and Principles of the Orbiting Spacecraft Systems*. Moscow: Mashinostroenie, 1975, 232 p. [In Russian].
7. Aksenov E.P. *Theory of Motion of Artificial Satellites*. Moscow: Nauka, 1977, 360 p. [In Russian].
8. Balk M.V. *Elements of Space Flight Dynamics*. Moscow: Nauka, 1965, 339 p. [In Russian].
9. Loudon D.F. *Optimal Trajectories for Space Navigation*. Trans. from English. V.K. Isayev. Moscow: Mir, 1966, 152 p. [In Russian].
10. El'jasberg P.E. *Introduction to the Theory of Flight of Artificial Satellites*. Moscow: Nauka, 1965, 540 p. [In Russian].
11. Chazov V.V. *Development and application of algorithms for numerical and analytical method of calculating the position of artificial satellites: doctoral thesis*. Moscow, 2013. 210 p.
12. Vozenkraft J., Dzhekobs I. *Theoretical Foundations of Communication Technology*. Moscow: Mir, 1969, 640 p. [In Russian].
13. Chernjak V.S. *The Multi-Radar*. Moscow: Radio i svjaz', 1993, 416 p. [In Russian].
14. Musicki D., Koch W. Geolocation using TDOA and FDOA measurements. *11th International Conference on Information Fusion*, 2008, pp. 1–8.
15. Harisov V.N., Jakovlev A.I., Gluschenko A.G. Optimal filtering coordinates of the movable object. *Radiotekhnika i elektronika*, 1984, vol. 29, no. 10, pp. 1939–1947. [In Russian].
16. Zhixin L. et al. A moving source localization method for distributed passive sensor using TDOA and FDOA measurements. *International Journal of Antennas and Propagation*, 2016, vol. 2016, pp. 8625039-1–12. DOI: <http://dx.doi.org/10.1155/2016/8625039>.

17. Ho K.C., Xu W. An accurate algebraic solution for moving source location using TDOA and FDOA measurements. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2004, vol. 52, no. 9, pp. 2453–2463.
18. Chazov V.V. *Prediction of the orbital motion of the spacecraft. Numerical model*. Scientific and Technical Report. URL: [http://vadimchazov.narod.ru/text\\_pdf/comalg.pdf](http://vadimchazov.narod.ru/text_pdf/comalg.pdf).
19. Volkov R.V., Sajapin V.N., Sevidov V.V. Model measuring the time delay and frequency shift of the radio signal received from the relay satellite earth station when determining the position. *T-Comm: Telekommunikatsii i transport*, 2016, no. 19, pp. 14–18. [In Russian].
20. Bahvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.G. *Numerical Methods*. 6th ed. Moscow: Laboratorija bazovyh znaniy, 2008, 636 p. [In Russian].
21. Hajrer E., Nersett S., Vanner G. *The Solution of Ordinary Differential Equations. Non-Rigid Tasks*. Trans. from English I.A. Kulchitskaya and S.S. Filipov. Moscow: Mir, 1990, 512 p. [In Russian].
22. Dzhigan V.I. *Adaptive Signal Filtering: Theory and Algorithms*. Moscow: Tehnosfera, 2013, 512 p. [In Russian].
23. *Solar System Dynamics*. URL: <http://ssd.jpl.nasa.gov>.
24. Poljanskij I.S., Patronov D.Ju. Maximum likelihood estimation of variance-covariance matrix. *Sovremennye problemy nauki i obrazovanija*, 2013, no. 1. URL: <http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=8516>. [In Russian].
25. Chen Z. Bayesian filtering: from Kalman filters to particle filters, and Beyond. *Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics*, 2003, no. 182 (1), pp. 1–69.
26. Poljanskij I.S. Method of dimensional unconstrained optimization problem in assessing decoupling partial beams multibeam antenna mirror type. *Sovremennye problemy nauki i obrazovanija*, 2012, no. 4. URL: <http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=6880>. [In Russian].
27. Poljanskij I.S. et al. Homogeneous distribution continuous limited resource in hierarchical systems transport type tree structure. *Informatsionnye sistemy i tehnologii*, 2013, no. 2 (76), pp. 99–106. [In Russian].
28. Poljanskij I.S., Stepanov D.E., Frolov M.M. Hybrid genetic method with the gradient learning and forecasting to meet the challenges of global optimization functions multiextremal. *Vestnik Brjanskogo gosudarstvennogo tehničeskogo universiteta*, 2014, no. 3 (43), pp. 138–146. [In Russian].

UDC 621.396.9

DOI 10.18469/1810-3189.2019.22.4.50-57

Received: 09.10.2019

Accepted: 06.11.2019

## Mathematical model filtering canonical parameters of satellite-repeater in orbital motion

*I.S. Polyanskii, I.V. Polyanskaya, T.Z. Pham*

The Academy of the Federal Guard Service of the Russian Federation  
35, Priborostroitel'naya Street  
Oryol, 302015, Russian Federation

For the effective solution of the problem estimation of canonical parameters the satellite-repeater at orbital motion the substantial statement within which the generalized scheme of model filtration of coordinates and a vector of speed movement the satellite-repeater is given is formulated. The system of restrictions and assumptions is introduced. When the state vector is represented by a continuous vector Markov process, the generalized equations of state and observations in kinematic variables are determined. Using the methods of numerical differentiation, schemes for solving ordinary differential equations, optimization, linearization of the original filtration problem in determining the rules for calculating the evolution and measurement matrices is performed. The efficiency of the generated algorithmic solutions is tested on specific examples.

**Keywords:** mathematical model, filtering canonical parameters of the relay satellite, perturbed inertial orbital motion, vector Markov process, extended Kalman filter.

**Полянский Иван Сергеевич**, доктор физико-математических наук, сотрудник Академии Федеральной службы охраны Российской Федерации. Автор 136 научных публикаций.

*Область научных интересов:* математическое моделирование, динамические системы, дифференциальные уравнения, методы оптимизации, оптимальное управление, конформные отображения, вычислительная электродинамика, цифровая обработка сигналов.

*E-mail:* van341@mail.ru

**Полянская Инна Валерьевна**, кандидат экономических наук, сотрудник Академии Федеральной службы охраны Российской Федерации. Автор 93 научных публикаций.

*Область научных интересов:* менеджмент, эконометрика, методы статистического анализа данных, динамические системы, экономическая безопасность.

*E-mail:* van341@mail.ru

**Фам Туан Зап**, адъюнкт Академии Федеральной службы охраны Российской Федерации. Автор 6 научных публикаций.

*Область научных интересов:* радиотехника, теория фильтрации координат подвижных объектов, алгоритмы цифровой обработки сигналов на ПЛИС.

*E-mail:* giapptvn1412@gmail.com