

Физика волновых процессов и радиотехнические системы

УДК 621.373.1, 517.938
DOI 10.18469/1810-3189.2019.22.3.44-48

Дата поступления: 12.08.2019
Дата принятия: 04.09.2019

Физически обоснованная дискретизация времени в математических моделях генераторов регулярных и хаотических колебаний

В.В. Зайцев

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева
443086, Российская Федерация, г. Самара
Московское шоссе, 34

Рассмотрен вопрос о переходе к дискретному времени в математических моделях нелинейных динамических систем, осциллирующих в непрерывном времени. На примерах генераторов Дмитриева – Кислова и ван дер Поля описан подход, основанный на сохранении в процессе временной дискретизации импульсного отклика линейного колебательного контура, входящего в состав генератора. Такая «физически обоснованная» дискретизация позволяет сформулировать модели нелинейной динамики в дискретном времени, адекватно воспроизводящие характеристики аналоговых прототипов, что не всегда удается с помощью широко используемой комбинации явного и неявного методов Эйлера.

Ключевые слова: генераторы колебаний, дискретное время, импульсная инвариантность, дискретные автоколебания, динамический хаос.

Введение

Автоколебательные системы, осциллирующие в дискретном времени (ДВ-автогенераторы), интересны по крайней мере по двум причинам. Во-первых, они могут быть моделями реальных физических систем. Дискретное время здесь появляется в результате применения конечно-разностных алгоритмов к аналоговым моделям осцилляторов. В этом случае модели с дискретным временем должны с требуемой точностью воспроизводить характеристики аналоговых систем.

Во-вторых, нелинейные ДВ-автогенераторы могут рассматриваться как самостоятельные объекты динамики в дискретном времени. Зачастую они формируются по аналоговым прототипам, но точность воспроизведения свойств прототипов здесь не является главным требованием. Скорее речь идет об их качественном сходстве. При этом нелинейные ДВ-осцилляторы могут демонстрировать динамические эффекты, не наблюдаемые в непрерывном времени.

Традиционно для целей нелинейно динамики временная дискретизация аналоговых моделей проводится методом Эйлера. Первые исследования в этом направлении, по-видимому, выполнены в Б.Н. Чириковым [1] на основе комбинаций явного и неявного методов Эйлера. Аналогичным образом получено отображение Богданова [2; 3] и

ряд других [4; 5]. Можно также использовать методы Рунге – Кутты высших порядков. Однако такой подход не дает замкнутых алгоритмов генерации ДВ-сигналов, т. к. предполагает применение внешних функций, задающих численные методы. Реализация этих функций средствами цифровой схемотехники сложна и, как правило, требует дополнительной дискретизации [6].

Более плодотворной, на наш взгляд, является физически обоснованная временная дискретизация с использованием представлений о колебательных процессах в системе [7].

В настоящей статье представлен метод дискретизации времени в математических моделях автоколебательных систем, основанный на сохранении временного отклика линейного резонатора системы. Изложение проведено на примерах генераторов Дмитриева – Кислова [8] и ван дер Поля.

1. Генератор Дмитриева – Кислова в дискретном времени

Систему дифференциальных уравнений движения аналогового прототипа – генератора Дмитриева – Кислова можно записать как

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x &= \omega_0^2 z, \\ \frac{dz}{dt} + \omega_c z &= \mu \omega_c x \exp(-x^2), \end{aligned} \quad (1)$$

где ω_0 и Q – собственная частота и добротность резонансного контура автогенератора; ω_c – частота среза низкочастотного фильтра в цепи обратной связи; μ – параметр глубины обратной связи.

Предполагая в дальнейшем дискретизацию времени с интервалом Δ и введя в рассмотрение безразмерное время $\tau = t/\Delta$, систему уравнений (1) запишем в виде

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + 2\pi\nu \frac{dx}{d\tau} + 4\pi^2\Omega_0^2x = 4\pi^2\Omega_0^2z, \quad (2)$$

$$\frac{dz}{d\tau} + 2\pi\Omega_c z = 2\pi\Omega_c \mu x \exp(-x^2). \quad (3)$$

Здесь частоты Ω_0 , Ω_c и полоса резонатора $\nu = \Omega_0/Q$ измеряются в единицах частоты дискретизации $\omega_d = 2\pi/\Delta$.

Основным условием при проведении дискретизации времени в системе (2)–(3) считаем условие сохранения импульсного отклика линейного резонатора (2) на внешнее воздействие $z(t)$. В теории синтеза линейных цифровых фильтров такой подход носит название метода импульсной инвариантности [9]. Для осциллятора (2) он дает разностное уравнение

$$x_n - 2\delta \cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} + \delta^2x_{n-2} = 2\pi\Omega_0\delta \sin(2\pi\Omega_0)z_{n-1}, \quad (4)$$

где параметр диссипации дискретного резонатора равен

$$\delta = \exp(-\pi\nu).$$

Следует отметить, что, согласно правой части уравнения (4), текущее значение осцилляций x_n зависит от воздействия z_{n-1} в предыдущий момент дискретного времени. Эта особенность примененной процедуры дискретизации позволяет сформировать рекурсивную систему без введения

в аналоговый прототип дополнительных запаздываний.

Аналогично дискретизация времени по методу импульсной инвариантности преобразует дифференциальное уравнение (3) в разностное уравнение

$$z_n - \lambda z_{n-1} = 2\pi\Omega_c \mu x_n \exp(-x_n^2), \quad (5)$$

где $\lambda = \exp(-2\pi\Omega_c)$ – параметр дискретного фильтра.

Таким образом, система разностных уравнений (4)–(5) определяет алгоритм генерации сигнала дискретным во времени генератором Дмитриева – Кислова. Режимы генерации определяются значениями совокупности четырех параметров Ω_0 , Q , Ω_c , μ и варьируются от квазигармонических до хаотических. На рис. 1 в качестве иллюстрации представлены периодограммные оценки спектров мощности $S(\Omega)$ автоколебаний в генераторе со значениями $\Omega_0 = 0.21$, $Q = 30$, $\Omega_c = 0.05$ ($\lambda = 0.73$). При этом параметр глубины обратной связи в первом случае равен $\mu = 2.5$ (пунктирная линия на графике), а во втором – $\mu = 6.75$ (сплошная линия). Форма спектров указывает на то, что первый режим – это регулярные квазигармонические автоколебания, второй – хаотические. Регулярные автоколебания совершаются в окрестности одной из двух неподвижных точек $\pm X$:

$$\pm X = \pm \sqrt{-\ln \left(\frac{(1 - 2\delta \cos(2\pi\Omega_0) + \delta^2)(1 - \lambda)}{4\pi^2\Omega_0\Omega_c\mu\delta \sin(2\pi\Omega_0)} \right)}.$$

Хаотический аттрактор на плоскости (x_{n-1}, x_n) показан на рис. 2. Он формируется переходами между окрестностями указанных неподвижных точек.

Проведя перенормировку переменной $z/\mu \rightarrow z$, систему уравнений движения ДВ-генератора Дми-

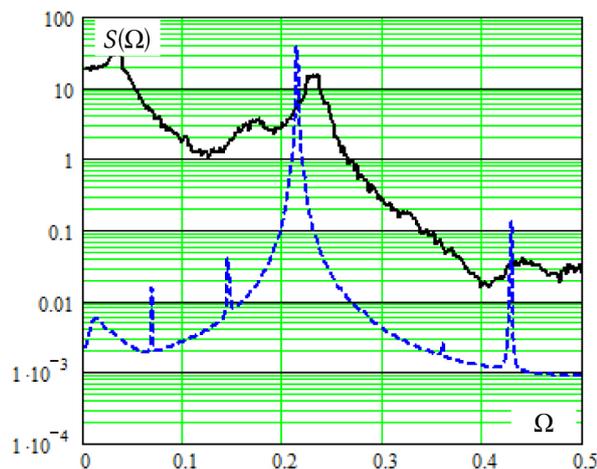


Рис. 1. Спектры мощности

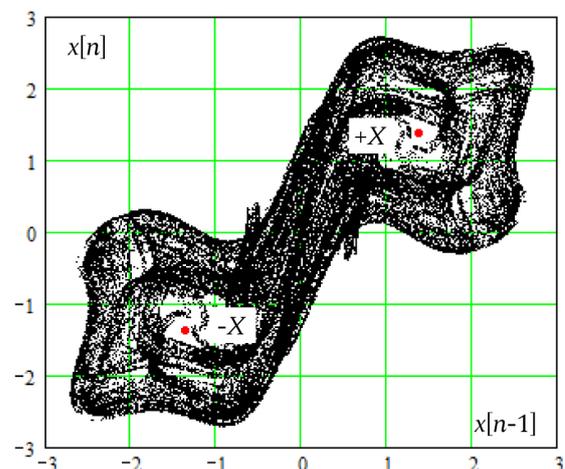


Рис. 2. Хаотический аттрактор

триева – Кислова (4)–(5) можно записать в более компактной форме:

$$\begin{aligned} x_n - 2\delta \cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} + \delta^2 x_{n-2} &= \gamma z_{n-1}, \\ z_n - \lambda z_{n-1} &= 2\pi\Omega_c x_n \exp(-x_n^2), \end{aligned} \quad (6)$$

где через $\gamma = 2\pi\Omega_0\mu\delta \sin(2\pi\Omega_0)$ обозначен эквивалентный параметр глубины обратной связи.

2. ДВ-генератор с инерционным возбуждением

Введем в кольцо генератора (6) дополнительный поворот фазы на угол π , тогда параметр γ меняет знак ($\gamma \rightarrow -\gamma$), а дискретная динамическая система

$$\begin{aligned} x_n - 2\delta \cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} + \delta^2 x_{n-2} &= -\gamma z_{n-1}, \\ z_n - \lambda z_{n-1} &= 2\pi\Omega_c x_n \exp(-x_n^2) \end{aligned} \quad (7)$$

будет относиться к классу генераторов с инерционным возбуждением [10].

С учетом того, что $\delta = \exp(-\pi\Omega_0/Q)$ и $\lambda = \exp(-2\pi\Omega_c)$, режимы генерации в ДВ-системе (7) определяются значениями совокупности четырех параметров Ω_0 , Q , Ω_c и γ .

На рис. 3 в качестве иллюстрации представлены периодограммные оценки спектров мощности $S(\Omega)$ автоколебаний в генераторе со значениями $\Omega_0 = 0.21$, $Q = 30$, $\Omega_c = 0.05$ ($\lambda = 0.73$). При этом параметр глубины обратной связи в одном случае равен $\gamma = 1.25$ (пунктирная линия на графике), а в другом – $\gamma = 9.69$ (сплошная линия). Форма спектров указывает на то, что первый режим – это регулярные квазигармонические автоколебания, второй – хаотические.

Фазовые плоскости (x_{n-1}, x_n) автоколебаний показаны на рис. 4, где кривая 1 соответствует предельному циклу регулярных автоколебаний, множество 2 – хаотическому аттрактору.

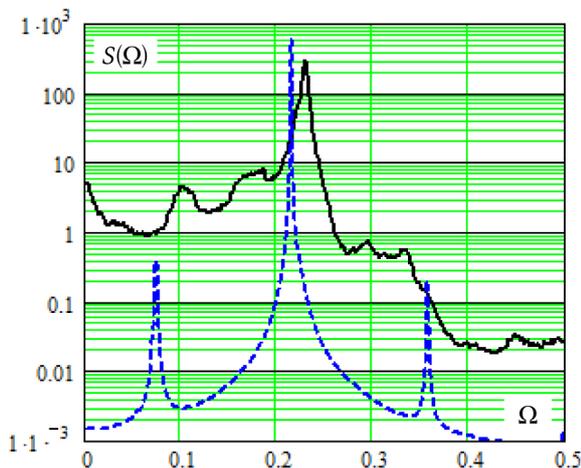


Рис. 3. Спектры мощности

3. Генератор ван дер Поля в дискретном времени

Уравнение движения генератора ван дер Поля – автоколебательной системы томсоновского типа с кубической нелинейностью – запишем в виде (с безразмерным временем):

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + 2\pi\nu \frac{dx}{d\tau} + 4\pi^2\Omega_0^2 x = 2\pi\nu p (1 - x^2) \frac{dx}{d\tau}, \quad (7)$$

где p – параметр превышения порога генерации (порог $p = 1$).

Принцип сохранения импульсного отклика подобно переходу (2) \rightarrow (4) позволяет перейти от уравнения (7) в непрерывном времени к разностному уравнению

$$\begin{aligned} x_n - 2\delta \cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} + \delta^2 x_{n-2} &= \\ = 2\pi\nu\delta p \operatorname{sinc}(2\pi\Omega_0) (1 - x_{n-1}^2) y_{n-1}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\operatorname{sinc}(2\pi\Omega_0) = \sin(2\pi\Omega_0)/2\pi\Omega_0$ – кардинальный синус.

Дискретная переменная y_n – это отсчеты производной $y(\tau) = dx/d\tau$. Для их вычисления воспользуемся формулой

$$\operatorname{sinc}(2\pi\Omega_0) y_n = \cos(2\pi\Omega_0) x_n - x_{n-1}.$$

Эта формула дифференцирования точна для гармонических колебаний и с учетом квазигармоничности автоколебаний в генераторе Ван дер Поля может быть принята в качестве приближенной. Тогда уравнение (8) принимает вид

$$\begin{aligned} x_n - 2\delta \cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} + \delta^2 x_{n-2} &= \\ = 2\pi\nu\delta p (1 - x_{n-1}^2) (\cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} - x_{n-2}). \end{aligned} \quad (9)$$

Разностное уравнение движения (9) определяет алгоритм генерации дискретного сигнала – ДВ-генератор Ван дер Поля. При умеренных превышениях порога генерации ($p < 10$) он воспроиз-

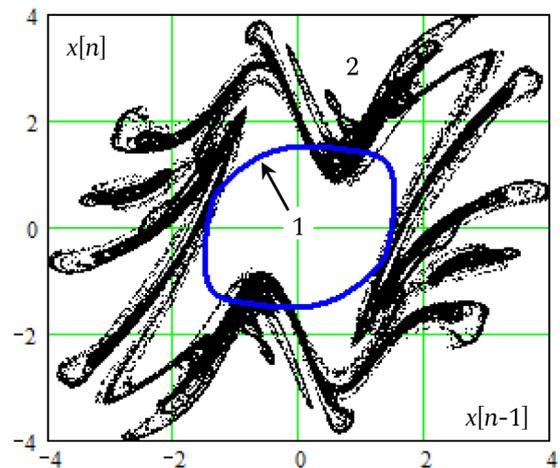


Рис. 4. Фазовые плоскости

водит в дискретном времени основные свойства аналогового прототипа [8]. На рис. 5 (пунктирной линией) и рис. 6 (линией 1) представлены оценка спектра мощности и предельный цикл генератора (9) с параметрами $\Omega_0 = 0.2$, $Q = 30$ и $p = 5$. Эти характеристики типичны для режима регулярных квазигармонических автоколебаний. Но есть и особенность ДВ-автоколебаний, состоящая в подмене частот гармоник. На рис. 3 выделяются подмененные третья ($g3$) и пятая ($g5$) гармоники.

Создавая группу автоколебательных систем типа (9), можно определять их уравнением движения

$$x_n - 2\delta \cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} + \delta^2 x_{n-2} = 2\pi\nu\delta p(1 - x_{n-1}^2)(\kappa x_{n-1} - x_{n-2}), \quad (10)$$

где $\cos(2\pi\Omega_0) \leq \kappa \leq 1$. Отметим, что при значениях $\kappa \approx 1$ в ДВ-генераторе (10) достаточно легко реализуется режим хаотических автоколебаний (хаотический осциллятор ван дер Поля). Например, на рис. 3 сплошной линией показана оценка спектра мощности генератора (10) при $\kappa = 1$ (остальные параметры сохраняют свои предыдущие значения). Хаотический аттрактор автоколебаний на рис. 4 представлен множеством 2.

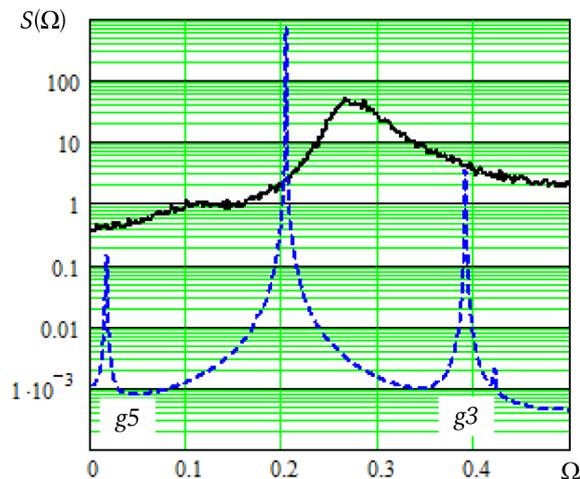


Рис. 5. Спектры мощности

Заключение

Использование физических представлений о процессах, протекающих в динамических системах, позволяет проводить дискретизацию времени в аналоговых моделях систем без привлечения численных алгоритмов высокого порядка точности, снижающих вычислительную эффективность и скорость обработки и формирования дискретных (цифровых) сигналов. Для систем с резонансными элементами дискретизацию времени целесообразно проводить на основе принципа сохранения импульсного отклика в аналоговых и дискретных резонаторах. Кроме того, скорость квазигармонических осцилляций предполагается вычислять с помощью формул дифференцирования гармонических функций. Такой подход позволяет сформулировать рекурсивные алгоритмы генерации в дискретном времени регулярных и хаотических колебаний. Регулярные режимы генерации предлагается использовать для нелинейной фильтрации, например для синхронного детектирования дискретных сигналов с амплитудной и частотной модуляцией. Дискретные хаотические колебания позволяют, в частности, осуществлять маскировку полезной информации [11].

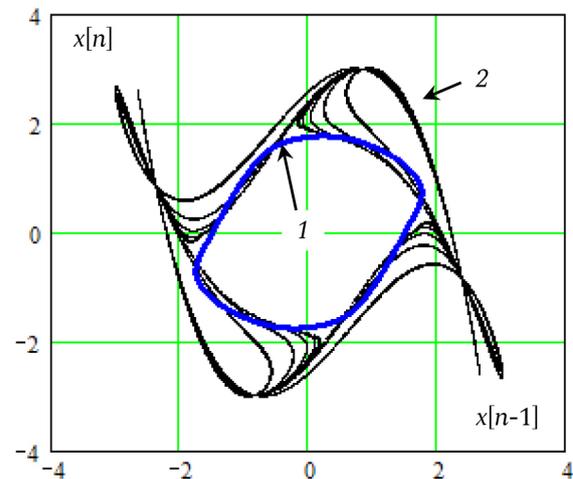


Рис. 6. Фазовые плоскости

Список литературы

1. Чириков Б.В. Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности. Новосибирск: ИЯФ СО АН СССР, 1969. 314 с.
2. The Bogdanov map: bifurcations, mode locking, and chaos in a dissipative system / D.K. Arrowsmith [et al.] // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1993. Vol. 3. № 4. P. 803-842.
3. Кузнецов А.П., Савин А.В., Седова Ю.В. Бифуркация Богданова – Такенса: от непрерывной к дискретной модели // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17. № 6. С. 64–83.
4. Морозов А.Д. Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах. М.; Ижевск: НИЦ РХД, Ижевский институт компьютерных исследований, 2005. 424 с.
5. Генераторы хаотических колебаний / Б.И. Шахтарин [и др.]. М.: Гелиос АРВ, 2007. 248 с.
6. Зайцев В.В., Карлов А.В., Федюнин Э.Ю. О дискретных моделях колебательных систем // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2015. Т. 18. № 1. С. 38–43.

7. Зайцев В.В. Дискретный осциллятор ван дер Поля: конечные разности и медленные амплитуды // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25. № 6. С. 70–78. DOI: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2017-25-6-70-78>.
8. Дмитриев А.С., Кислов В.Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989. 280 с.
9. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. Изд. 2-е. М.: Техносфера, 2006. 856 с.
10. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. Изд. 2-е. М.: Либроком, 2010. 552 с.
11. Дмитриев А.С., Панас А.И. Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002. 252 с.

References

1. Chirikov B.V. Issledovaniya po teorii nelineynogo rezonansa i stohastichnosti [Research on the theory of nonlinear resonance and stochasticity]. Novosibirsk: IYAF SO AN SSSR, 1969. 314 p. [in Russian].
2. Arrowsmith D.K. [et al.] The Bogdanov map: bifurcations, mode locking, and chaos in a dissipative system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1993, vol. 3, no. 4, pp. 803–842 [in English].
3. Kuznetsov A.P., Savin A.V., Sedova Yu.V. Bifurkatsiya Bogdanova – Takensa: ot nepreryvnoy k diskretnoy modeli [Bogdanov – Takens bifurcation: from flows to discrete systems]. *Izvestiya vuzov. Prikladnaya nelineynaya dinamika* [Izvestiya VUZ. Applied nonlinear dynamics], 2009, vol. 17, no. 6, pp. 39–158 [in Russian].
4. Morozov A.D. Rezonansy, tsikly i haos v kvazikonservativnykh sistemah [Resonances, cycles and chaos in quasi-conservative systems]. М.; Izhevsk: NITS RHD, Izhevskiy institut komp'yuternykh issledovaniy, 2005. 424 p. [in Russian].
5. Shahtarin B.I. [et al.] Generatory haoticheskikh kolebaniy [Generators of chaotic oscillations]. М.: Gelios ARV, 2007. 248 p. [in Russian].
6. Zaitsev V.V., Karlov A.V., Fedyunin E.Yu. O diskretnykh modelyakh kolebatel'nykh sistem [About discrete models of oscillating systems]. *Fizika volnovykh protsessov i radiotekhnicheskie sistemy* [Physics of wave processes and radio systems], 2015, vol. 18, no. 1, pp. 38–43 [in Russian].
7. Zaitsev V.V. Diskretnyi ostsillyator van der Polya: konechnye raznosti i medlennye amplitudy [The discrete van der Pol oscillator: finite differences and slow amplitudes]. *Izvestiya vuzov. Prikladnaya nelineynaya dinamika* [Izvestiya VUZ. Applied nonlinear dynamics], 2017, vol. 25, no. 6, pp. 70–78. DOI: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2017-25-6-70-78> [in Russian].
8. Dmitriev A.S., Kislov V.Ya. Stokhasticheskie kolebaniya v radiofizike i elektronike [Stochastic oscillations in radiophysics and electronics]. М.: Nauka, 1989. 280 p. [in Russian].
9. Oppenheim A., Schafer R. Discrete-time signal processing. Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1999. 870 p. [in English].
10. Landa P.S. Nelineynye kolebaniya i volny. Izd. 2-е. [Nonlinear oscillations and waves. 2th edition]. М.: Librokom, 2010. 552 p. [in Russian].
11. Dmitriev A.S., Panas A.I. Dinamicheskiy haos: novye nositeli informatsii dlya sistem svyazi [Dynamic chaos: new media for communication systems]. М.: Физматлит, 2002. 252 p. [in Russian].

UDC 621.373.1, 517.938
DOI 10.18469/1810-3189.2019.22.3.44-48

Received: 12.08.2019
Accepted: 04.09.2019

Physically reasonable time sampling in mathematical models of generators of regular and chaotic oscillations

V.V. Zaitsev

Samara National Research University
34, Moskovskoye Shosse
Samara, 443086, Russian Federation

The issue of transition to discrete time in mathematical models of nonlinear dynamic systems oscillating in continuous time is considered. On the basis of the examples of the Dmitriev – Kislov and van der Pol generators, the approach based on maintaining in the process of time sampling the impulse response of the linear oscillatory circuit included in the generator is described. This «physically reasonable» sampling allows models of non-linear dynamics to be formulated in discrete time, adequately reproducing the characteristics of analog prototypes, which is not always possible with a widely used combination of explicit and implicit Euler methods.

Keywords: oscillation generators, discrete time, impulse invariance, discrete self-oscillations, dynamic chaos.