

# Физика волновых процессов и радиотехнические системы

УДК 537.86:536.33  
DOI 10.18469/1810-3189.2019.22.3.27-35

Дата поступления: 29.05.2019  
Дата принятия: 05.06.2019

## Применение метода Фурье для решения задач теории сушки электромагнитным излучением

А.М. Афанасьев, Ю.С. Бахрачева, Б.Н. Сипливый

Волгоградский государственный университет  
400062, Российская Федерация, г. Волгоград  
Университетский пр., 100

На основе идеи расщепления процесса по физическим факторам с использованием метода Фурье и аппарата функций Грина разработан алгоритм построения нового класса решений начально-краевых задач теории сушки электромагнитным излучением. Выделен подкласс асимптотических решений, которые получаются предельным переходом и дают описание установившихся процессов сушки. Зависимости полей температуры и влагосодержания от времени в таких решениях определяются первыми собственными числами задачи Штурма – Лиувилля, а распределения этих полей в пространстве – первыми собственными функциями этой задачи. Анализ асимптотических решений позволяет установить и представить в наглядном виде основные закономерности электромагнитной сушки, что может быть использовано для инженерных оценок параметров процесса и расчета полей температуры и влагосодержания в первом приближении.

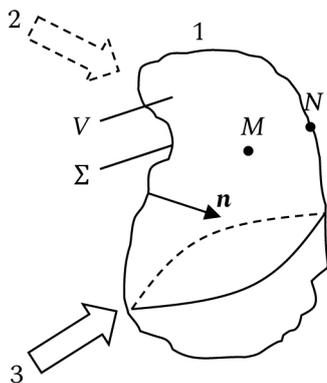
**Ключевые слова:** уравнения Лыкова, электромагнитная сушка, начально-краевая задача, метод Фурье, задача Штурма – Лиувилля, функция Грина, аналитические и численные методы.

### Введение

В литературе по математической физике разработано большое количество аналитических и численных алгоритмов решения начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического и параболического типов и краевых задач для уравнений эллиптического типа. Основная часть этих процедур, например различные варианты метода сеток, без труда переносится и на случай, когда задачи формулируются не для одного уравнения, а для систем связанных дифференциальных уравнений в частных производных для нескольких искомым функций. Однако в случае такого важного для практики метода, как *метод разделения пере-*

*менных (метод Фурье)*, этот перенос, за редкими исключениями, осуществлен быть не может. Причина в том, что из системы дифференциальных уравнений в частных производных, в отличие от системы *обыкновенных* дифференциальных уравнений, с помощью операций дифференцирования и исключения неизвестных в общем случае нельзя получить отдельные уравнения для каждой из искомым функций, к которым и мог бы быть применен хорошо разработанный в математической физике аппарат решения задач методом Фурье. Эта проблема обсуждается в [1]. Именно с такой проблемой мы и встречаемся при решении начально-краевых задач теории сушки электромагнитным излучением, которые и являются предметом рассмотрения в настоящей работе.

Для решения указанной проблемы ниже будет впервые сформулирован и применен для решения задач теории сушки вычислительный алгоритм, который может быть назван «расщеплением процесса по физическим факторам». Идея расщепления, но в применении к задаче для одного дифференциального уравнения в частных производных (задача о распространении загрязняющей субстанции в окружающей среде) обсуждалась также в работе [2]. Отправляясь от этой идеи, здесь мы построим алгоритм, в рамках которого на следующих друг за другом и разделенных небольшими промежутками времени слоях разностной сетки



**Рис.** Схема электромагнитной сушки: 1 – влажный образец; 2 – воздушный поток; 3 – электромагнитная волна

будут последовательно решаться методом Фурье начально-краевые задачи для уравнения распространения тепла и уравнения распространения влаги. Мы обсудим преимущества нового расчетного метода, сравним его с методами непосредственного численного решения исходной начально-краевой задачи, и рассмотрим применение построенного алгоритма для исследования асимптотических режимов электромагнитной сушки.

## 1. Математическая модель электромагнитной сушки

Принципиальная схема сушки показана на рисунке. Влажный образец обдувается воздушным потоком и подвергается воздействию электромагнитных волн. Образец состоит из двух компонентов: твердой основы (капиллярно-пористое тело) и воды. В качестве математической модели распространения тепла и влаги сквозь пористую среду будем использовать подход, принятый в теории тепломассопереноса А.В. Лыкова. Начально-краевая задача для расчета функций  $T = T(M, t)$  и  $U = U(M, t)$  – распределений температуры и влагосодержания в области  $V$  с границей  $\Sigma$  как функций переменной точки  $M$  и времени  $t$  – ставится следующим образом [3–5]:

$$c\rho \partial T / \partial t = \operatorname{div} (k \operatorname{grad} T) + r\gamma\rho \partial U / \partial t + W; \quad M \in V; \quad (1)$$

$$\partial U / \partial t = \operatorname{div} (a_m \operatorname{grad} U) + \operatorname{div} (a_m \delta \operatorname{grad} T); \quad M \in V; \quad (2)$$

$$Q(N, t) + r(1 - \gamma)J(N, t) = k \partial T / \partial n(N, t) + S(N, t); \quad N \in \Sigma; \quad (3)$$

$$J(N, t) = a_m \rho \partial U / \partial n(N, t) + a_m \rho \delta \partial T / \partial n(N, t); \quad N \in \Sigma; \quad (4)$$

$$\begin{aligned} T(M, 0) &= T^0(M); \\ U(M, 0) &= U^0(M); \\ M \in V + \Sigma; \quad t &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $c$ ,  $\rho$ ,  $k$ ,  $\gamma$ ,  $a_m$ ,  $\delta$  – теплофизические характеристики материала, а именно: удельная теплоемкость, плотность в сухом состоянии, коэффициент теплопроводности, критерий испарения, коэффициент диффузии влаги, относительный коэффициент термодиффузии влаги, которые считаются известными функциями переменной точки, а также температуры и влагосодержания в этой точке;  $r$  – удельная теплота парообразования воды;  $W = W(M, t)$  – плотность внутренних источников тепла, вызванных поглощением проникающего электромагнитного излучения;  $S = S(N, t)$  – плот-

ность поверхностных источников тепла, вызванных поглощением излучения с малой глубиной проникновения;  $\partial / \partial n$  – символ производной по направлению внутренней нормали к границе  $\Sigma$ ;  $T^0(M)$  и  $U^0(M)$  – заданные функции, определяющие распределения температуры и влагосодержания в начальный момент времени  $t = 0$ ;  $Q$  и  $J$  – интенсивности тепло- и массообмена поверхности образца с воздушной средой, которые в каждой точке поверхности  $N$  однозначно определяются температурой в этой точке  $T$  и рассчитываются по формулам

$$Q(N, t) = \sigma \tilde{A} \left[ (T(N, t) + T_1)^4 - (T_b + T_1)^4 \right] + \alpha_w [T(N, t) - T_b]; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} J(N, t) &= \alpha_m [P(T(N, t)) - \phi \cdot P(T_b)]; \\ P(T) &= 6,03 \cdot 10^{-3} \exp \frac{17,3 \cdot T}{T + T_2}. \end{aligned} \quad (7)$$

В этих формулах:  $\sigma$  – постоянная Стефана-Больцмана;  $\tilde{A}$  – коэффициент теплового излучения;  $T_b$  и  $\phi$  – температура и влажность воздуха за пределами пограничного слоя вблизи точки  $N$ ;  $\alpha_w$  и  $\alpha_m$  – коэффициенты тепло- и массообмена поверхности образца с воздушной средой;  $P(T)$  – функция, моделирующая зависимость относительного парциального давления насыщенного водяного пара от его температуры  $T$  при общем нормальном давлении;  $T_1 = 273$  °С и  $T_2 = 238$  °С – постоянные.

Система двух связанных уравнений параболического типа (1) и (2) моделирует процессы распространения тепла и влаги сквозь пористую среду в области  $V$ . Слагаемое с множителем  $\partial U / \partial t$  в правой части (1) есть плотность внутренних источников тепла, вызванных процессами испарения жидкости или конденсации пара. Краевые условия (3) и (4) имеют смысл баланса потоков тепла и влаги на поверхности  $\Sigma$ . Они не могут быть отнесены ни к одному из стандартных краевых условий математической физики (Дирихле, Неймана или третьего рода). Входящая в эти формулы интенсивность теплообмена  $Q$ , согласно (6), включает теплообмен конвекцией и теплообмен излучением; интенсивность массообмена  $J$ , согласно (7), принимается в виде закона испарения Дальтона.

Ниже мы будем считать, что на каждом шаге вычислений плотность внутренних источников тепла  $W$  и плотность поверхностных источников тепла  $S$  однозначно определяются текущими распределениями температуры  $T$  и влагосодержания  $U$ . Алгоритм расчета функций  $W(T, U)$  и  $S(T, U)$  изложен в работах авторов [6; 7].

## 2. Алгоритм метода расщепления

Исследование сформулированной начально-краевой задачи (1)–(7) будем вести следующим образом. Начиная с момента  $t=0$  и пользуясь заданным начальным распределением  $T^0(M)$ , мы сможем вычислить во всех точках области  $V$  второе слагаемое в правой части уравнения (2). Вводя для него обозначение

$$\operatorname{div} \left( a_m \delta \operatorname{grad} T^0(M) \right) \equiv H^0(M), \quad (8)$$

получим для поля влагосодержания  $U$  следующее уравнение параболического типа:

$$\begin{aligned} \partial U / \partial t(M, t) = \\ = \operatorname{div} \left( a_m \operatorname{grad} U(M, t) \right) + H^0(M). \end{aligned} \quad (9)$$

Исходя из того же начального распределения температуры  $T^0(M)$  и рассматривая его в точках границы  $\Sigma$ , т. е. оперируя функцией  $T^0(N)$ , мы сможем найти с помощью (6) и (7) интенсивности тепло- и массообмена на поверхности образца в рассматриваемый начальный момент  $t=0$ :

$$\begin{aligned} Q(N, 0) = \sigma \tilde{A} \left[ \left( T^0(N) + T_1 \right)^4 - \left( T_B + T_1 \right)^4 \right] + \\ + \alpha_w \left[ T^0(N) - T_B \right] \equiv Q^0(N); \end{aligned} \quad (10)$$

$$J(N, 0) = \alpha_m \left[ P \left( T^0(N) \right) - \Phi P \left( T_B \right) \right] \equiv J^0(N). \quad (11)$$

После этого из краевых условий (3) и (4) могут быть определены нормальные производные полей  $T$  и  $U$  на границе  $\Sigma$  в тот же самый момент  $t=0$ :

$$\begin{aligned} \partial T / \partial n(N, 0) = \left[ Q^0(N) + \right. \\ \left. + r(1-\gamma)J^0(N) - S(N, 0) \right] / k \equiv \xi^0(N); \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \partial U / \partial n(N, 0) = J^0(N) / (a_m \rho) - \\ - \delta \xi^0(N) \equiv \mu^0(N). \end{aligned} \quad (13)$$

Возвращаясь к полю влагосодержания  $U(M, t)$  и рассматривая его вблизи момента  $t=0$ , пренебрежем изменением во времени нормальных производных  $\partial T / \partial n$  и  $\partial U / \partial n$ . Тогда с учетом (5), (9) и (13) для нахождения этого поля получим следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{cases} \partial U / \partial t(M, t) = \operatorname{div} \left( a_m \operatorname{grad} U(M, t) \right) + \\ + H^0(M); \quad M \in V; \\ \partial U / \partial n(N) = \mu^0(N); \quad N \in \Sigma; \\ U(M, 0) = U^0(M); \quad t = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Это задача Неймана для неоднородного уравнения параболического типа с неоднородными краевыми и начальными условиями. Подчеркнем, что по построению решение этой задачи будет приближен-

но описывать поведение поля  $U(M, t)$  лишь вблизи начального момента  $t=0$ . Получить из исходной системы (1)–(7) отдельную начально-краевую задачу для поля  $U(M, t)$ , решение которой давало бы описание этого поля в любой момент времени, оказывается невозможным.

Процедура решения задачи (14) методом Фурье будет рассмотрена ниже. Используя найденную в результате этой процедуры функцию  $U(M, t)$ , вычислим во всех точках  $M$  производную  $\partial U / \partial t(M, 0)$  (как будет ясно из дальнейшего, эта операция может быть выполнена *аналитически*). После этого, обозначив

$$r\gamma\rho\partial U/\partial t(M, 0) + W(M, 0) \equiv F^0(M) \quad (15)$$

(эта функция имеет смысл плотности внутренних источников тепла), получим с учетом (1), (5) и (12) для нахождения поля температуры  $T(M, t)$  задачу Неймана, аналогичную той, которая приведена была выше для поля влагосодержания:

$$\begin{cases} \operatorname{cp} \partial T / \partial t(M, t) = \operatorname{div} \left( k \operatorname{grad} T(M, t) \right) + \\ + F^0(M); \quad M \in V; \\ \partial T / \partial n(N) = \xi^0(N); \quad N \in \Sigma; \\ T(M, 0) = T^0(M); \quad t = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Как и в случае с задачей (14), решение задачи (16) будет давать приближенное описание поля  $T(M, t)$  лишь вблизи момента  $t=0$ . Решив эту задачу методом Фурье, найдем температуру как функцию координат и времени.

Таким образом, нами построены распределения  $U(M, t)$  и  $T(M, t)$ . Ограничив их справедливость малым интервалом времени  $0 < t < \Delta t$ , вычислим функции координат  $U(M, \Delta t)$  и  $T(M, \Delta t)$ . Объяснив их начальными распределениями и повторив изложенный выше алгоритм расчетов, мы найдем новые функции координат  $U(M, 2\Delta t)$  и  $T(M, 2\Delta t)$  в момент  $t=2\Delta t$  и т. д., вплоть до некоторого заданного момента окончания расчетов, чем и будет завершена процедура построения решения сформулированной задачи.

Важно отметить, что здесь мы построили процедуру «развязывания» общей начально-краевой задачи (1)–(7) для двух функций  $T$  и  $U$ , непосредственное исследование которой методом Фурье произведено быть не может, на две отдельные задачи для этих функций, задачи (14) и (16), к которым метод Фурье уже вполне может быть применен.

## 3. Решение задачи Неймана (16)

Остановимся теперь на способе решения задач Неймана (14) и (16). Для определенности далее

будем говорить о задаче (16) для поля температуры  $T(M, t)$ . Задача (14) для поля влагосодержания  $U(M, t)$  может быть исследована аналогичным образом.

Как известно [8–10], в рамках метода Фурье решение начально-краевой задачи (16) может быть найдено в замкнутом виде (в квадратурах), т. е. записано в виде интегралов от некоторых известных функций, если предварительно построена функция Грина  $G(M, t, M')$  этой задачи:

$$G(M, t, M') = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\lambda_n t) \frac{v_n(M)v_n(M')}{\|v_n\|^2}. \quad (17)$$

Здесь  $\lambda_n$  и  $v_n(M)$  – собственные числа и собственные функции задачи Штурма – Лиувилля:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} v) + \lambda p v = 0, & M \in V, \\ \partial v / \partial n(N) = 0, & N \in \Sigma, \end{cases} \quad (18)$$

отвечающей решаемой задаче (16). В первом уравнении использовано обозначение  $p(M) = c(M)\rho(M)$ , а символом  $\|v_n\|^2$  в формуле (17) обозначен квадрат нормы собственной функции:

$$\|v_n\|^2 = \iiint_V v_n^2(M) p(M) dV. \quad (19)$$

Заметим, что для областей произвольного вида нахождение собственных функций в явной аналитической форме сопряжено с большими трудностями и чаще всего может быть выполнено только приближенно: сеточными методами, сведением задачи к интегральному уравнению или с использованием пакетов прикладных программ. Для ряда областей с простой геометрией собственные функции могут быть выписаны явно, хотя это и требует введения специальных функций [8–10].

Как было сказано при постановке задачи, теплофизические характеристики материала  $k, c, \rho, a_m, \delta, \gamma$  считаются заданными функциями переменной точки, а также температуры и влагосодержания в этой точке. Например, коэффициент теплопроводности является функцией вида

$$k = k[M, T(M, t), U(M, t)]$$

(явная зависимость от координат и неявная зависимость от координат и от времени). При таком подходе мы будем вынуждены на каждом слое по времени  $t = 0, \Delta t, 2\Delta t$  и т. д. заново решать задачу Штурма – Лиувилля (18), причем отдельно для полей  $T$  и  $U$ , что потребует больших вычислительных затрат. Если же при моделировании характеристик среды учитывать лишь явную зависимость от координат (стационарная неоднородная среда),

т. е., например, в случае с коэффициентом теплопроводности ограничиться зависимостью вида  $k = k(M)$ , то задачу Штурма – Лиувилля достаточно будет решить только один раз, но все-таки опять отдельно для поля температуры и поля влагосодержания. Если же среда *однородная*, то задача Штурма – Лиувилля решается один раз, и для обоих полей она оказывается одинаковой.

Допустим, что задача Штурма – Лиувилля (18) решена, т. е. множества  $\{\lambda_n\}$  и  $\{v_n(M)\}$  построены. Тогда построена и функция Грина (17), и значит, как говорилось выше, решение задачи Неймана (16) может быть записано в квадратурах. Это решение представляется в виде суммы

$$T(M, t) = T_1(M, t) + T_2(M, t) + T_3(M, t), \quad (20)$$

где функциями  $T_1(M, t)$ ,  $T_2(M, t)$  и  $T_3(M, t)$  учитываются вклады в общее решение соответственно начальным условиям  $T^0(M)$ , плотности внутренних источников тепла  $F^0(M)$  и краевых условий  $\xi^0(N)$ . Указанные слагаемые формулы (20) имеют следующий вид [9]:

$$T_1(M, t) = \iiint_V G(M, t, M') p(M') T^0(M') dV'; \quad (21)$$

$$T_2(M, t) = \int_0^t \iiint_V G(M, t - \tau, M') F^0(M') dV' d\tau; \quad (22)$$

$$\begin{aligned} T_3(M, t) &= \\ &= \tilde{T}(M) - \iiint_V G(M, t, M') p(M') \tilde{T}(M') dV' + \end{aligned} \quad (23)$$

$$+ f^0 \int_0^t \iiint_V G(M, t - \tau, M') dV' d\tau.$$

В последней формуле постоянная  $f^0$  дается выражением

$$f^0 = \frac{1}{V} \oint_{\Sigma} k \xi^0(N) d\Sigma, \quad (24)$$

где  $V$  – объем области  $V$ , а поле  $\tilde{T}(M)$  находится как решение задачи Неймана для уравнения Пуассона:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} \tilde{T}(M)) = f^0; & M \in V; \\ \partial \tilde{T} / \partial n(N) = \xi^0(N); & N \in \Sigma; \\ \tilde{T}(P) = 0. \end{cases} \quad (25)$$

Здесь  $P$  – произвольная фиксированная точка в области построения решения.

Мы рассмотрели решение задачи (16) для поля температуры  $T$ . Задача (14) для поля влагосодержания  $U$  решается аналогично.

#### 4. Сравнительная характеристика решения задач сушки сеточными методами и методом Фурье

При использовании сеточных методов аппроксимация исходных уравнений (1)–(7) конечными разностями производится на базе сетки с некоторыми шагами по координатам  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  и по времени  $\Delta t$ . Вводятся также сеточные функции  $T_{ijk}^n$ ,  $U_{ijk}^n$ ,  $S_{ijk}^n$ ,  $W_{ijk}^n$  (нижние индексы обозначают номера узлов сетки по координатам, а верхний индекс – номер слоя по времени), отвечающие искомым распределениям температуры, влагосодержания и плотности поверхностных и внутренних источников тепла. На каждом новом слое по времени каждая из четырех искомым сеточных функций находится как решение соответствующей ей одной из четырех систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). При этом, например, в СЛАУ для нахождения  $T_{ijk}^n$  будут входить значения этой функции на новом слое и на предыдущих слоях по времени, а функции  $U_{ijk}^n$ ,  $S_{ijk}^n$ ,  $W_{ijk}^n$  будут браться большей частью с предыдущих слоев, за исключением тех функций, значения которых на новом слое к этому моменту уже определены. Такая процедура требует больших вычислительных затрат. Реализация этого алгоритма для решения пространственно одномерных и пространственно двумерных задач электромагнитной сушки осуществлена авторами соответственно в [11; 12] и [13; 14]. Двумерные задачи рассматривались в рамках метода переменных направлений [15].

Проведем сравнение алгоритмов перехода между соседними слоями по времени в методе сеток и методе Фурье. В методе сеток для этого нужно несколько раз решить СЛАУ высокого порядка. В методе Фурье дело обстоит иначе. Благодаря процедуре расщепления исходной задачи (1)–(7) мы имеем отдельные задачи для поля влагосодержания и поля температуры, задачи (14) и (16) соответственно. Эти задачи решаются одинаково, поэтому достаточно будет проанализировать решение только одной из них, например задачи (16). Ее решение, согласно (20), получается наложением полей  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$ , которые, в свою очередь, находятся из (21)–(23) с помощью операций интегрирования. Но интегралы в (23) имеют такую же структуру, как и в предыдущих двух формулах, поэтому нам достаточно будет проанализировать лишь вычисления по формулам (21) и (22). В этих формулах  $T^0(M')$  и  $F^0(M')$  – распределения температуры и плотности внутренних источников тепла на пре-

дыдущем слое по времени  $t = 0$ . Значит, чтобы найти  $T_1$  и  $T_2$  в следующий за моментом  $t = 0$  момент  $t = \Delta t$ , мы должны проделать следующие вычисления:

$$T_1(M, \Delta t) = \iiint_V G(M, \Delta t, M') p(M') T^0(M') dV'; \quad (26)$$

$$T_2(M, \Delta t) = \iiint_V \left( \int_0^{\Delta t} G(M, \Delta t - \tau, M') d\tau \right) F^0(M') dV'. \quad (27)$$

Если в достаточно общем случае среда стационарная неоднородная, то, как уже говорилось, задача Штурма – Лиувилля решается не на каждом слое по времени, а только один раз, но отдельно для полей  $T$  и  $U$ . Таким образом, функция  $G(M, \Delta t, M')$  в первом интеграле и интеграл по времени во втором интеграле могут быть вычислены раз и навсегда, и переход между слоями по времени будет сводиться просто к вычислениям объемных интегралов. Благодаря этому обстоятельству сокращается объем расчетов, а сама процедура становится удобной для отладки, коррекции и перехода к другим исходным данным.

В действительности при переходе между соседними слоями по времени, кроме вычисления объемных интегралов, нужно будет еще каждый раз решать численными методами задачу (25) для вспомогательной функции  $\tilde{T}(M)$ , входящей в решение (23) для  $T_3(M, t)$ . Как и в случае с задачей Штурма – Лиувилля (18), она может быть решена сеточными методами, методом интегральных уравнений или с помощью пакетов прикладных программ. Принципиальное значение имеет тот факт, что эта частная краевая задача является существенно более простой по сравнению с исходной начально-краевой задачей (1)–(7).

#### 5. Переход к асимптотике по времени

При исследовании процесса сушки сеточными методами на идущих друг за другом слоях разностной сетки по времени последовательно вводятся распределения температуры, влагосодержания и другие данные, что позволяет детально проследить за развитием процесса в различных ситуациях. Однако по совокупности численных экспериментов, выполненных при различных входных данных, часто оказывается невозможным выявить общие закономерности сушки, что затрудняет и общий ее анализ, и производство инженерных оценок для организации режимов с

наперед заданными свойствами. В связи с этим важное значение приобретает следующее обстоятельство. Как известно, сушка влажных материалов большей частью происходит так, что после непродолжительного *начального периода*, когда наблюдаются *переходные процессы*, а влагосодержание материала почти не изменяется, наступает протяженный во времени и имеющий основное значение для практики *установившийся период* (*период постоянной скорости сушки*), когда и происходит удаление основной части влаги. Математическое описание этого периода является намного более простым, чем исходное описание. Поле температуры оказывается близким к стационарному однородному (слабо изменяется и во времени, и в пространстве), такие же свойства приобретает и поле скорости сушки (поле производной от влагосодержания по времени). Формально эти решения получаются из построенного выше решения Фурье как асимптотические (для больших моментов времени), что позволяет ограничиться несколькими первыми членами разложения в рядах, которыми такие решения представляются. Поведение полей температуры и влагосодержания во времени в таких решениях будут определяться первыми собственными числами задачи Штурма – Лиувилля, распределения этих полей в пространстве – первыми собственными функциями этой задачи, а переходные процессы будут полностью исключены. Такие решения позволят в наглядном виде представить общие закономерности сушки. Они могут быть использованы на практике для инженерных оценок и давать характеристики сушки в первом приближении.

Рассмотрим пример. Обратимся к решению (22) для поля температуры  $T_2(M, t)$ . Подставим на место функции Грина  $G$  выражение (17) и ограничимся первым членом ряда для этой функции (это можно будет сделать для больших моментов времени: как известно, собственные числа  $\lambda_n$  задачи Штурма – Лиувилля (18) являются положительными и быстро возрастают с ростом номера  $n$  [8]). Тогда температурное поле примет следующий вид:

$$\begin{aligned} T_2(M, t) &\approx \int_0^t \iiint_V \exp[-\lambda_1(t-\tau)] \times \\ &\times \frac{v_1(M)v_1(M')}{\|v_1\|^2} F^0(M') dV' d\tau = \\ &= \frac{v_1(M)}{\|v_1\|^2} \left[ \iiint_V v_1(M') F^0(M') dV' \right] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times \int_0^t \exp[-\lambda_1(t-\tau)] d\tau = \\ &= \frac{v_1(M)}{\|v_1\|^2} \left[ \iiint_V v_1(M') F^0(M') dV' \right] \frac{1 - \exp(-\lambda_1 t)}{\lambda_1}. \end{aligned}$$

Назовем величину

$$F = \iiint_V v_1(M') F^0(M') dV' \quad (28)$$

обобщающим воздействием на образец, порожденным внутренними источниками с распределением  $F^0(M)$  и отвечающим собственной функции  $v_1(M)$ . Тогда полученную выше формулу можно будет переписать так:

$$T_2(M, t) \approx \frac{v_1(M)}{\|v_1\|^2} F \frac{1 - \exp(-\lambda_1 t)}{\lambda_1}. \quad (29)$$

Если мы сможем на основании тех или иных разумных предположений указать распределение источников  $F^0(M)$  по объему образца, то постоянная  $F$  может быть вычислена, а значит, будет вычислена и реакция (отклик) температурного поля  $T$  в каждой точке образца  $M$  на это воздействие при больших моментах времени. В частности, мы видим, что при  $t \rightarrow \infty$  этим откликом будет *стационарное поле*.

Ясно, что получение таких аналитических решений, позволяющих приближенно рассчитывать параметры процесса и получать представление о его основных закономерностях в асимптотических режимах, имеет большое значение для практики. Разумеется, приведенный здесь анализ нельзя напрямую распространить на процессы, происходящие при сушке электромагнитным излучением. Ведь рассуждение велось всего лишь для одного из трех слагаемых поля температуры, которое, в добавление к этому, может считаться справедливым лишь вблизи выделенного слоя по времени. Исследовать возможность распространения сделанных выводов на всю сушку и определить границы их применимости – одна из задач дальнейших исследований в этом направлении.

Получение асимптотических решений задач электромагнитной сушки, которое возможно при использовании метода функций Грина и о котором говорилось выше, мы рассматриваем как развитие подходов, уже применявшихся авторами в рамках работ над региональными проектами РФФИ (2004–2018 гг.), в ходе которых были впервые получены предназначенные для инженерных оценок асимптотические распределения темпера-

туры и влагосодержания при электромагнитной сушке однородных тел простой формы. Именно в качестве областей построения были рассмотрены пластина [4; 16], цилиндр [17], шар [18], прямоугольник [19] и параллелепипед [20]. Все найденные решения в качестве характерных особенностей имеют стационарное температурное поле ( $\partial T/\partial t = 0$ ) и квазистационарное поле влагосодержания ( $\partial U/\partial t = \text{const}$ ). В рамках настоящего исследования мы намерены получить обобщение решений такого рода для тел с более сложной геометрией и для режимов из более широкого класса. Аналитические решения, о которых было сказано выше, могут быть использованы для тестирования новых вычислительных программ.

### Заключение

Сформулирована начально-краевая задача для расчета полей температуры и влагосодержания в неоднородном теле произвольной формы, обдуваемом воздушным потоком и находящемся под воздействием электромагнитного излучения с заданными характеристиками. Проведена процедура «расщепления процесса по физическим факторам», с помощью которой осуществлен переход от исходной начально-краевой задачи для двух искомых функций, температуры  $T$  и влагосодержания  $U$ , непосредственное исследование которой методом Фурье произведено быть не может, на последовательность отдельных задач для этих функций, имеющих вид задач Неймана для неоднородных уравнений параболического типа с неоднородными краевыми и начальными условиями, к которым классический метод Фурье уже вполне может быть применен. Эти отдельные задачи сопоставляются узлам сетки по времени, и их решения приближенно описывают поведение полей температуры и влагосодержания вблизи этих узлов. Сами решения записываются в общем виде, а затем они уточняются таким образом, чтобы при переходах между соседними слоями выполнялись условия сопряжения. Эти общие решения строятся методом Фурье, для чего предварительно для каждой задачи определяется ее функция Грина, которая формируется с помощью собственных чисел и собственных функций поставленной ей в соответствие краевой задачи Штурма – Лиувилля. В достаточно общем случае, когда среда является

стационарной неоднородной, функция Грина оказывается одной и той же для всех слоев по времени, но отдельной для поля температуры и поля влагосодержания. Время входит в функцию Грина в формульном виде, и это обстоятельство сокращает объем необходимых вычислений, делает алгоритм расчета прозрачным, удобным для коррекции и отладки. В этом новом алгоритме переход между соседними слоями по времени сводится к решению существенно более простой, по сравнению с исходной начально-краевой задачей, задачи Неймана для вспомогательной функции координат и к вычислению объемных интегралов от функций, рассчитанных на предыдущем слое, что выгодно отличает метод Фурье от сеточных методов, где для такого перехода требуется многократное решение систем линейных алгебраических уравнений высокого порядка.

Кроме того, в рамках нового расчетного алгоритма появляется возможность исследовать имеющие основное значение для целого ряда приложений установившиеся режимы сушки (режимы постоянной скорости), которые следуют за переходными режимами и математическое описание которых является существенно более простым, чем исходное описание. Формально эти решения получаются из решения Фурье как асимптотические (для больших моментов времени), что позволяет ограничиться несколькими первыми членами разложений, которыми такие решения представляются. Поведение полей температуры и влагосодержания во времени в таких решениях определяются первыми собственными числами задачи Штурма – Лиувилля, а распределения этих полей в пространстве – первыми собственными функциями этой задачи. Решения из этого нового класса (асимптотические решения) могут быть использованы на практике для инженерных оценок и давать характеристики процесса сушки в первом приближении.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Администрации Волгоградской области в рамках научного проекта № 19-48-340015 р\_а.*

### Расшифровка индексов

v – воздух;  
m (англ. moisture) – влага;  
w (англ. warmth) – тепло.

## Список литературы

1. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1933/1945. 620 с.
2. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 320 с.
3. Лыков А.В. Теория сушки. М.; Л.: Энергия, 1968. 471 с.
4. Афанасьев А.М., Сипливый Б.Н. О краевых условиях массообмена в виде законов Ньютона и Дальтона // Инженерно-физический журнал. 2007. Т. 80. № 1. С. 27–34.
5. Афанасьев А.М., Сипливый Б.Н. Концепция поверхностных источников тепла в теории сушки электромагнитным излучением // Известия вузов. Электромеханика. 2017. Т. 60. № 2. С. 13–20. DOI: <https://doi.org/10.17213/0136-3360-2017-2-13-20>.
6. Расчет теплового воздействия СВЧ-излучения на плоские водосодержащие объекты слоистой структуры / А.М. Афанасьев [и др.] // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 1998. Т. 1. № 2–3. С. 83–90.
7. Математическое моделирование теплового воздействия интенсивного СВЧ-излучения на цилиндрические водосодержащие объекты слоистой структуры / А.М. Афанасьев [и др.] // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2001. Т. 4. № 2. С. 15–21.
8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
9. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике. М.: Изд-во МГУ, 1993. 352 с.
10. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1984. 384 с.
11. Математическое моделирование взаимодействия СВЧ-излучения с влагосодержащими плоскими слоистыми средами. Часть 1 / А.М. Афанасьев [и др.] // Известия вузов. Электромеханика. 2001. № 2. С. 14–21.
12. Математическое моделирование взаимодействия СВЧ-излучения с влагосодержащими плоскими слоистыми средами. Часть 2. Численный расчет / А.М. Афанасьев [и др.] // Известия вузов. Электромеханика. 2001. № 4–5. С. 32–38.
13. Математическое моделирование двумерных задач теории сушки электромагнитным излучением / А.М. Афанасьев [и др.] // Биомедицинская радиоэлектроника. 2008. № 11. С. 29–34.
14. Сушка электромагнитным излучением: численное решение задачи для прямоугольной области / А.М. Афанасьев [и др.] // Известия вузов. Электромеханика. 2015. № 2. С. 5–11. DOI: <https://doi.org/10.17213/0136-3360-2015-2-5-11>.
15. Самарский А.А. Введение в численные методы. М.: Наука, 1987. 288 с.
16. Афанасьев А.М., Сипливый Б.Н. Исследование квазистационарных режимов при сушке СВЧ-излучением // Известия вузов. Электромеханика. 2008. № 3. С. 3–9.
17. Афанасьев А.М., Сипливый Б.Н. Теория электромагнитной сушки: асимптотическое решение начально-краевой задачи для цилиндра // Теоретические основы химической технологии. 2014. Т. 48. № 2. С. 222–227. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0040357114020018>.
18. Афанасьев А.М., Сипливый Б.Н. Задача о сушке шара электромагнитным излучением // Инженерно-физический журнал. 2013. Т. 86. № 2. С. 322–330.
19. Афанасьев А.М., Сипливый Б.Н. Теория электромагнитной сушки: асимптотическое решение начально-краевой задачи для прямоугольной области // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2012. Т. 15. № 1. С. 77–83.
20. Афанасьев А.М., Сипливый Б.Н. Асимптотические распределения температуры и влагосодержания при электромагнитной сушке образца, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда // Известия вузов. Электромеханика. 2012. № 3. С. 3–8.

## References

1. Kurant R., Gil'bert D. Metody matematicheskoy fiziki. T. 2 [Methods of mathematical physics. Vol. 2]. M.: Gostehizdat, 1933/1945, 620 p. [in Russian].
2. Marchuk G.I. Matematicheskoe modelirovanie v probleme okruzhajushej sredy [Mathematical modeling in the environmental problem]. M.: Nauka, 1982, 320 p. [in Russian].
3. Lykov A.V. Teoriya sushki [The theory of drying]. M.; L.: Energiya, 1968, 471 p. [in Russian].
4. Afanas'ev A.M., Sipliviy B.N. O kraevykh usloviyakh massoobmena v vide zakonov N'yutona i Dal'tona [On the boundary conditions of mass transfer in the form of the laws of Newton and Dalton]. *Inzhenerno-fizicheskij zhurnal* [Physics Engineering Journal], 2007, no. 1, pp. 27–34 [in Russian].
5. Afanas'ev A.M., Sipliviy B.N. Kontseptsija poverhnostnykh istochnikov tepla v teorii sushki elektromagnitnym izlucheniem [The concept of surface heat sources in the theory of drying by electromagnetic radiation]. *Izvestiya vuzov. Elektromekhanika* [University News. Electromechanics], 2017, no. 2, pp. 13–20. DOI: <https://doi.org/10.17213/0136-3360-2017-2-13-20> [in Russian].
6. Afanas'ev A.M. [et al.] Raschet teplovogo vozdejstviya SVCh-izlucheniya na ploskie vodosoderzhaschie ob'ekty sloistoj struktury [Calculation of the thermal effect of microwave radiation on flat water-containing objects of a layered structure]. *Fizika volnovykh protsessov i radiotekhnicheskie sistemy* [Physics of wave processes and radio engineering systems], 1998, no. 2, pp. 83–90 [in Russian].
7. Afanas'ev A.M. [et al.] Matematicheskoe modelirovanie teplovogo vozdejstviya intensivnogo SVCh-izlucheniya na tsilindricheskie vodosoderzhaschie ob'ekty sloistoj struktury [Mathematical modeling of the thermal effect of intense microwave radiation on cylindrical water-containing objects of a layered structure]. *Fizika volnovykh protsessov i radiotekhnicheskie sistemy* [Physics of wave processes and radio engineering systems], 2001, no. 2, pp. 15–21 [in Russian].
8. Tihonov A.N., Samarskij A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of mathematical physics]. M.: Nauka, 1966, 724 p. [in Russian].

9. Sveshnikov A.G., Bogoljubov A.N., Kravtsov V.V. *Lektsii po matematicheskoj fizike* [Lectures in mathematical physics]. M.: Izd-vo MGU, 1993, 352 p. [in Russian].
10. Arsenin V.Ja. *Metody matematicheskoj fiziki i spetsial'nye funktsii* [Methods of mathematical physics and special functions]. M.: Nauka, 1984, 384 p. [in Russian].
11. Afanas'ev A.M. [et al.] *Matematicheskoe modelirovanie vzaimodejstvija SVCh-izlucheniya s vlagosoderzhaschimi ploskimi sloistymi sredami. Chast' 1* [Mathematical modeling of the interaction of microwave radiation with moisture-containing flat layered media. Part 1]. *Izvestija vuzov. Elektromehnika* [University News. Electromechanics], 2001, no. 2, pp. 14–21 [in Russian].
12. Afanas'ev A.M. [et al.] *Matematicheskoe modelirovanie vzaimodejstvija SVCh-izlucheniya s vlagosoderzhaschimi ploskimi sloistymi sredami. Chast' 2. Chislennyj raschet* [Mathematical modeling of the interaction of microwave radiation with moisture-containing flat layered media. Part 2. Numerical calculation]. *Izvestija vuzov. Elektromehnika* [University News. Electromechanics], 2001, no. 4, pp. 32–38 [in Russian].
13. Afanas'ev A.M. [et al.] *Matematicheskoe modelirovanie dvumernyh zadach teorii sushki elektromagnitnym izlucheniem* [Mathematical modeling of two-dimensional problems of the theory of drying by electromagnetic radiation]. *Biomeditsinskaja radioelektronika* [Biomedical Electronics], 2008, no. 11, pp. 29–34 [in Russian].
14. Afanas'ev A.M. [et al.] *Sushka elektromagnitnym izlucheniem: chislennoe reshenie zadachi dlja prjamougol'noj oblasti* [Electromagnetic Radiation Drying: Numerical Solution for a Rectangular Region]. *Izvestija vuzov. Elektromehnika* [University News. Electromechanics], 2015, no. 2, pp. 5–11. DOI: <https://doi.org/10.17213/0136-3360-2015-2-5-11> [in Russian].
15. Samarskij A.A. *Vvedenie v chislennye metody* [Introduction to numerical methods]. M.: Nauka, 1987, 288 p. [in Russian].
16. Afanas'ev A.M., Siplivij B.N. *Issledovanie kvazistatsionarnyh rezhimov pri sushke SVCh-izlucheniem* [Investigation of quasistationary regimes during microwave drying]. *Izvestija vuzov. Elektromehnika* [University News. Electromechanics], 2008, no. 3, pp. 3–9 [in Russian].
17. Afanas'ev A.M., Siplivij B.N. *Teorija elektromagnitnoj sushki: asimptoticheskoe reshenie nachal'no-kraevoj zadachi dlja tsilindra* [Theory of electromagnetic drying: an asymptotic solution to the initial-boundary value problem for a cylinder]. *Teoreticheskie osnovy himicheskoj tehnologii* [Theoretical Foundations of Chemical Technology], 2014, no. 2, pp. 222–227. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0040357114020018> [in Russian].
18. Afanas'ev A.M., Siplivij B.N. *Zadacha o sushke shara elektromagnitnym izlucheniem* [The problem of drying the ball with electromagnetic radiation]. *Inzhenerno-fizicheskij zhurnal* [Physics Engineering Journal], 2013, no. 2, pp. 322–330 [in Russian].
19. Afanas'ev A.M., Siplivij B.N. *Teorija elektromagnitnoj sushki: asimptoticheskoe reshenie nachal'no-kraevoj zadachi dlja prjamougol'noj oblasti* [Theory of electromagnetic drying: asymptotic solution of the initial-boundary value problem for a rectangular region]. *Fizika volnovyh protsessov i radiotekhnicheskie sistemy* [Physics of wave processes and radio engineering systems], 2012, no. 1, pp. 77–83 [in Russian].
20. Afanas'ev A.M., Siplivij B.N. *Asimptoticheskie raspredelenija temperatury i vlagosoderzhanija pri elektromagnitnoj sushke obraztsa, imejushego formu prjamougol'nogo paralelepipedu* [Asymptotic distribution of temperature and moisture content during electromagnetic drying of a rectangular parallelepiped sample]. *Izvestija vuzov. Elektromehnika* [University News. Electromechanics], 2012, no. 3, pp. 3–8 [in Russian].

UDC 537.86:536.33

DOI 10.18469/1810-3189.2019.22.3.27-35

Received: 29.05.2019

Accepted: 05.06.2019

## Application of the Fourier method to solve the problems of the theory of drying by electromagnetic radiation

A.M. Afanasiev, Yu.S. Bakhracheva, B.N. Siplivij

Volgograd State University  
100, Universitetskii Prospect  
Volgograd, 400062, Russian Federation

On the basis of the idea of splitting the process into physical factors, using the Fourier method and the green function apparatus, an algorithm for constructing a new class of solutions to the initial boundary value problems of the theory of drying by electromagnetic radiation is developed. A subclass of asymptotic solutions, which are obtained by the limiting transition and give a description of the established drying processes, is distinguished. The dependences of the temperature and moisture content fields on time in such solutions are determined by the first eigenvalues of the Sturm – Liouville problem, and the distributions of these fields in space are the first eigenfunctions of this problem. The analysis of asymptotic solutions allows us to establish and visualize the basic laws of electromagnetic drying, which can be used for engineering estimates of process parameters and the calculation of temperature and moisture content fields in the first approximation.

**Keywords:** Lykov equations, electromagnetic drying, initial-boundary value problem, Fourier method, Sturm – Liouville problem, Green function, analytical and numerical methods.