

Физика волновых процессов и радиотехнические системы

УДК 621.372.831
DOI 10.18469/1810-3189.2019.22.3.5-9

Дата поступления: 25.09.2019
Дата принятия: 27.09.2019

Определение спектров решений краевых задач для направляющих структур с использованием перехода к интегральным уравнениям

С.А. Капустин, Н.А. Новоселова, А.С. Раевский, С.Б. Раевский

Нижегородский государственный технический университет имени Р.Е. Алексеева
603950, Российская Федерация, г. Нижний Новгород
ул. Минина, 24

Абсолютное большинство направляющих структур описывается [1–3] несамосопряженными электродинамическими операторами, под которыми понимается совокупность дифференциального уравнения и системы граничных условий. В [1–5] сформулированы условия несамосопряженности электродинамических операторов в приложении к методу разделения переменных. Указанным операторам можно поставить в соответствии с [5–6] интегральные уравнения. Краевым задачам для цилиндрических направляющих структур ставятся в соответствии интегральные уравнения Вольтерра, с использованием асимптотических решений которых проводится априорное определение спектров решений краевых задач для двухслойных открытых и экранированных волноводов.

Ключевые слова: электродинамический оператор, спектр волн, краевая задача, уравнение Вольтерра, собственные и несобственные волны, двухслойные направляющие структуры.

Введение

Наиболее общими собственными значениями несамосопряженных краевых задач являются комплексные значения, соответствующие комплексным волнам (КВ). В открытых направляющих структурах КВ подразделяются на собственные и несобственные [7]. Последние не удовлетворяют условию излучения и описываются фактически решениями неоднородных краевых задач, которые можно классифицировать как полуоднородные, поскольку им соответствуют однородные дифференциальные уравнения и неоднородные на бесконечности граничные условия. Понятие «несобственные волны», по-видимому, введено в [7]. Собственные КВ удовлетворяют условию излучения и, соответственно, описываются решениями однородных краевых задач. Другой разновидностью несобственных КВ являются так называемые волны, присоединенные к источнику [8]. Они являются несобственными в силу того, что не могут существовать без источника. Парное возбуждение таких волн приводит к образованию явления комплексного резонанса (КР) [1; 3].

1. Краевые задачи в интегральном представлении

Радиальная зависимость поля в цилиндрических направляющих структурах описывается

функциями, удовлетворяющими уравнению Бесселя вида:

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} + \left(\alpha^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \psi = 0, \quad (1)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$; α – поперечное волновое число по радиальной координате.

Сделав замену $\psi(r) = u(r)/\sqrt{r}$, от (1) переходим к уравнению

$$L(u) = \frac{d^2u}{dr^2} + \left(\alpha^2 + \frac{(1/4 - n^2)}{r^2} \right) u = 0. \quad (2)$$

В результате краевые задачи по радиальной координате для цилиндрических направляющих структур ставятся на уравнении (2) при граничном условии

$$u_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (3)$$

включающих в себя условие ограниченности поля на оси направляющей структуры, условие непрерывности тангенциальных компонент поля на границах между слоями цилиндрической структуры, граничные условия при $r \rightarrow \infty$ для открытых направляющих структур и условия Дирихле и Неймана на идеально проводящих поверхностях.

Оператор L в (2) в общем случае действует [5] в гильбертовом пространстве $L^2(0, \infty)$. Функция $p(r) = (n^2 - 1/4)/r^2$ является суммируемой на всей полуоси $[0, \infty)$.

Поскольку поперечное сечение слоистой направляющей цилиндрической структуры разбивается по радиальной координате на q подобластей, краевая задача на уравнении (2) решается при однородных граничных условиях

$$U_k = 0; \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (4)$$

число которых определяется [1; 3] как $N = 2\bar{n}q$, где \bar{n} – порядок дифференциального уравнения (в нашем случае $\bar{n} = 2$).

В случае полуоднородной краевой задачи [1–3], когда при $r \rightarrow \infty$ не ставится нулевое граничное условие, некоторые условия (4) могут быть неоднородными [3]. Решения краевой задачи (2), (3) и (4) совпадают [6; 9] с решениями интегрального уравнения Вольтерра:

$$u(r) = \sum_{i=1}^2 C_i \varphi_i(r) - \int_a^r K(r, r') u(r') dr', \quad (5)$$

где $K(r, r') = \frac{p(r')}{W(r')} D(r, r')$; $W(r')$ – вронскиан на фундаментальных решениях уравнения

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \alpha^2 u = 0; \quad (6)$$

функция $D(r, r')$ определяется в данном случае как $D(r, r') = |\varphi_1(r')\varphi_2(r) - \varphi_1(r)\varphi_2(r')|$.

Записывая фундаментальные решения уравнения (6) в виде

$$\varphi_1(r) = e^{i\alpha r}; \quad \varphi_2(r) = e^{-i\alpha r}, \quad (7)$$

получим: $W(r') = -2i\alpha$; $D(r, r') = 2i \sin \alpha(r' - r)$.

Для выполнения граничного условия (3) коэффициенты C_i в (5) представим как:

$$C_1 = \frac{C}{2i}; \quad C_2 = -\frac{C}{2i}.$$

Тогда уравнение (5) будет иметь вид

$$u(r) = C \sin \alpha r - \int_a^r \frac{\sin \alpha(r - r')}{\alpha} \frac{n^2 - 1/4}{(r')^2} u(r') dr'. \quad (8)$$

Рассмотрим связь интегральных уравнений вида (8) с краевыми задачами для двухслойных цилиндрических направляющих структур.

2. Открытый цилиндрический диэлектрический волновод (ОЦДВ)

Радиальная зависимость полей волн ОЦДВ описывается уравнениями (1), (2). В [1–3] показано, что краевая задача (2), (3) в общем случае в области $r > a_\delta$ имеет решение $u(\alpha, r)$, удовлетворяющее уравнению

$$u(\alpha, r) = e^{-i\alpha r} - \int_r^\infty \frac{\sin \alpha(r - r')}{\alpha} p(r') u(\alpha, r') dr', \quad (9)$$

где a_δ – значение r , соответствующее наперед заданному $\delta \geq 0$, для которого решения уравнения (7) при $r \rightarrow \infty$ имеют асимптотическую запись

$$u(\alpha, r) = e^{-i\alpha r} \quad (10)$$

в областях поперечного волнового числа α :

- первая область – $\text{Im} \alpha \geq 0$; $|\alpha| \geq \delta$;
- вторая область – $\text{Im} \alpha \leq 0$; $\alpha \neq 0$; $\sigma(r)/|\alpha| < 1$, (11)

откуда следует, что на критических частотах поверхностные волны могут переходить только в несобственные комплексные волны, а собственные комплексные волны могут существовать в областях частот, удаленных от критических частот поверхностных волн. Решения, имеющие асимптотический вид (8), непрерывно продолжаются при $r \in [0 \div \infty]$.

Расположение корней дисперсионного уравнения в плоскости поперечного волнового числа α_2 внешней области (вне ДВ), соответствующее приведенному выше рассмотрению на основе интегрального уравнения (9), показано на рис. 1.

Разрез на комплексной плоскости $\alpha_2 = \gamma_2 + i\delta_2$, которому соответствует $\beta_2 = 0$ ($\beta = \beta_1 + i\beta_2$ – продольное волновое число), проходит по отрицательной мнимой полуоси ($\delta_2 < 0$) и частично по действительной полуоси $\gamma_2 > 0$. Он разделяет два листа римановой поверхности комплексной функции β [7–10]. Решения дисперсионного уравнения, изображенные на рис. 1, находятся на верхнем листе римановой поверхности, которому условно соответствует $\beta_2 < 0$. Стрелки на рисунке указывают движение корней при уменьшении частоты. В точке O , в соответствии с (9), поверхностные волны EH [1–3] переходят в быстрые несобственные волны (вытекающие) [7–10; 11]. Их поля, в соответствии с (8), нарастают по радиальной координате. В точке A вытекающие волны переходят в собственные комплексные волны, поля которых удовлетворяют условию излучения Зоммерфельда. В точке B собственные комплексные волны вновь переходят в вытекающие, которые затем (при уменьшении частоты) переходят в медленные несобственные волны. Как показывают численные расчеты, интервал AB , предсказанный на основе рассмотрения асимптотического решения (8) интегрального уравнения в указанной области его существования, полностью соответствует получаемому из дисперсионного уравнения краевой задачи. Таким образом, предлагаемое асимптоти-

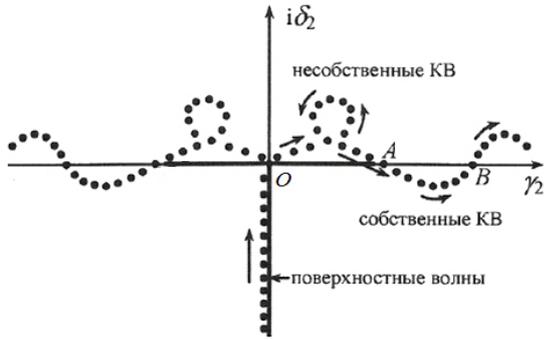


Рис. 1. Корни дисперсионного уравнения волн круглого открытого ДВ в плоскости волнового числа α_2

ческое рассмотрение позволяет априорно определить спектр волн исследуемой направляющей структуры.

Во втором и третьем квадрантах комплексной плоскости α_2 решения дисперсионного уравнения располагаются симметрично с вышеуказанными, рис. 1, и соответствуют КВ противоположного направления. Они находятся на нижнем месте римановой поверхности комплексной функции β , которому условно соответствует $\beta_2 > 0$. Стрелки на рисунке указывают движение корней дисперсионного уравнения при уменьшении частоты. Совместное возбуждение пар КВ с противоположно направленными фазовыми скоростями приводит к образованию явления комплексного резонанса, соответствующего колебанию, присоединенному к источнику [8].

Отмечено, что в т. О только поверхностные волны EH переходят в вытекающие как решения дисперсионного уравнения (аналитически). Для волн HE в этой точке дисперсионные характеристики поверхностных волн HE при стремлении к критической частоте приближаются к т. О, но не достигая ее в пределе. В [12] показано, что только при введении потерь указанная особенность исчезает: дисперсионные характеристики поверхностных волн HE на критических частотах также переходят в характеристику вытекающих волн, то есть в реальных ДВ свойства HE- и EH-волн качественно совпадают за исключением того, что спектр HE-волн включает в себя волну HE₁₁, не имеющую критической частоты. Таким образом, утверждение о том, что критические частоты поверхностных волн HE_{1,m+1} и EH_{1m} совпадают, является справедливым лишь при учете потерь.

Проведенное рассмотрение интерпретирует возможность априорного исследования спектров волн направляющих структур на основе сопостав-

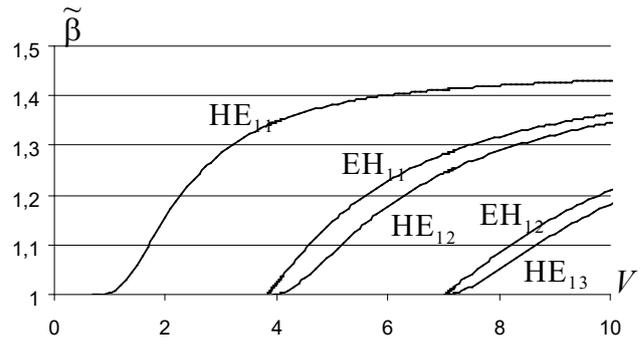


Рис. 2. Дисперсионные характеристики волн ДВ с параметрами: $\tilde{\epsilon}_1 = 2.1025$, $\tilde{\epsilon}_2 = 1$

ления решения краевых задач и интегральных уравнений Вольтерра с использованием асимптотических решений последних.

Определив по предлагаемой методике номенклатуру решений краевой задачи и области их поиска, число решений и их точные значения находим методом вариации фазы [2].

На рис. 2 приведены дисперсионные характеристики гибридных волн ДВ при $n = 1$, $\tilde{\epsilon}_1 = 2.1025$, $\tilde{\epsilon}_2 = 1$. Видно, что критические частоты волн HE_{1,m+1}, на которых $\tilde{\beta} \rightarrow \sqrt{\tilde{\epsilon}_2}$, находятся несколько выше критических частот волн EH_{1m}.

Собственные КВ (интервал АВ, рис. 1) существуют лишь при достаточно большой относительной диэлектрической проницаемости $\tilde{\epsilon} = \epsilon_1/\epsilon_2$. С увеличением индекса волны n величина $\tilde{\epsilon}$, при которой могут существовать собственные КВ, понижается.

3. Цилиндрический двухслойный экранированный волновод

Интегральное уравнение (5), соответствующее радиальной краевой задаче, в этом случае записывается как

$$u(r) = \sum_{i=1}^2 C_i \varphi_i + \int_r^b \frac{\sin \alpha(r-r')}{\alpha} p(r') u(r') dr'. \quad (12)$$

Фундаментальные решения уравнения (6), удовлетворяющие граничным условиям

$$u_1(r=b) = 0; \quad u_2'(r=b) = 0, \quad (13)$$

в соответствии с (7) имеют вид:

$$\varphi_1 = \cos \alpha r; \quad \varphi_2 = \cos \alpha r. \quad (14)$$

Значения a и b – радиусы внутреннего слоя и экрана. Граничные условия (13) соответствуют крайевым задачам относительно продольных компонент электрического и магнитного векторов Герца: u_1 и u_2 соответственно.

Постоянные коэффициенты C_i в уравнении (12) выбираем таким образом, чтобы обеспечивалось

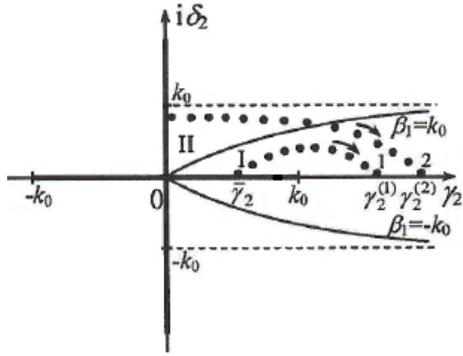


Рис. 3. Корни дисперсионного уравнения волн круглого двухслойного экранированного волновода в плоскости волнового числа α_2

выполнение граничных условий (13). С учетом этого уравнение (12) приобретает вид:

$$u_1 = \sin \alpha(b-r) + \int_r^b \frac{\sin \alpha(r-r')}{\alpha} p(r') u_1(r') dr'; \quad (15)$$

$$u_2 = \cos \alpha(b-r) + \int_r^b \frac{\sin \alpha(r-r')}{\alpha} p(r') u_2(r') dr'. \quad (16)$$

Поскольку решения (14) образуются функциями вида: $e^{\pm i\alpha r}$, поперечное волновое число, согласно (10), (11), должно быть комплексным и удовлетворять условиям:

$$|\alpha| \geq \delta; \quad \sigma(r)/|\alpha| \leq 1. \quad (17)$$

Для волны с продольной зависимостью поля $e^{-i(\beta_1 + i\beta_2)z}$, убывающего при удалении от источника, расположенного в сечении $z=0$, должно быть $\beta_2 < 0$. Тогда решения дисперсионного уравнения, удовлетворяющие условиям (17), должны находиться в первом квадранте комплексной плоскости α_2 ($\alpha_2 = \gamma_2 + i\delta_2$). В этом случае значения: $\gamma_2 > 0$; $\delta_2 > 0$; $\beta_1 > 0$; $\beta_2 < 0$ обеспечивают выполнение равенства $\gamma_2 \gamma_2 = -\beta_1 \beta_2$, получающегося из соотношений, связывающих волновые числа: $\varepsilon_{1,2} \mu_{1,2} \omega^2 = \alpha_{1,2}^2 + \beta^2$, где $\alpha_{1,2} = \gamma_{1,2} + i\delta_{1,2}$ – попе-

речные волновые числа во внутреннем и внешнем слоях волновода.

На рис. 3 изображены решения дисперсионного уравнения, которые располагаются в области, определенной на основе интегральных уравнений (15), (16), соответствующих краевой задаче. На рис. 3 кривые $\beta_1 = \pm k_0$ разделяют области быстрых (I) и медленных (II) волн. Разрезы комплексных плоскостей $\alpha_{1,2}$ соответствуют значениям $\beta_2 = 0$; $k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}$.

Из (8), (9) следует, что решения дисперсионного уравнения краевой задачи существуют комплексно-сопряженными парами: $\alpha_{1,2}$ и $\alpha_{1,2}^*$, что приводит [1] к существованию в двухслойном круглом экранированном волноводе двух пар комплексных волн.

Заключение

Из сопоставления краевых задач интегральным уравнениям Вольтерра получили априорную информацию о спектрах волн двухслойных направляющих структур.

Краевые задачи для двухслойных цилиндрических направляющих структур приведены в соответствии интегральным уравнениям Вольтерра. В целом для данного класса направляющих структур эти уравнения оказываются однотипными, поскольку строятся на основе фундаментальных решений одного и того же уравнения (6). С использованием асимптотических решений интегральных уравнений удается проводить априорное рассмотрение спектров волн направляющих структур, т. е. без решения дисперсионных уравнений краевых задач высказывать предположения о спектре их собственных значений, что позволяет проводить целенаправленные численные исследования.

Список литературы

1. Веселов Г.И., Раевский С.Б. Слоистые металло-диэлектрические волноводы. М.: Радио и связь, 1988. 248 с.
2. Раевский А.С. Электродинамика направляющих и резонансных структур, описываемых несамосопряженными краевыми задачами: дис. ... д-ра физ.-мат. наук, 2004. 450 с.
3. Раевский А.С., Раевский С.Б. Комплексные волны. М.: Радиотехника, 2010. 223 с.
4. Раевский А.С., Раевский С.Б. Неоднородные направляющие структуры, описываемые несамосопряженными операторами. М.: Радиотехника, 2004. 110 с.
5. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965. 703 с.
7. Шевченко В.В. Наглядная классификация волн, направляемых регулярными открытыми волноводами // Радиотехника и электроника. 1969. Т. 12. № 12. С. 1768–1773.
8. Раевский А.С., Раевский С.Б. Краевая задача на присоединенном уравнении Гельмгольца // Радиотехника и электроника. 2016. Т. 61. № 3. С. 233–244.
9. Интегральные уравнения / П.П. Забрейко [и др.]. М.: Наука, 1968. 448 с.

10. Шевченко В.В. О разложении полей открытых волноводов по собственным и несобственным волнам // Радиотехника и электроника. 1971. Т. 14. № 8. С. 1242–1249.
11. Шевченко В.В. Поверхностные и вытекающие волны плоского диэлектрического волновода с потерями // Радиотехника и электроника. 1988. Т. 31. № 3. С. 456–465.
12. Раевский А.С. Исследование спектров волн неоднородных открытых направляющих структур // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2006. Т. 9. № 3. С. 66–70.

References

1. Veselov G.I., Raevskij S.B. Sloistye metallo-dielektricheskie volnovody [Layered metal-dielectric waveguides]. M.: Radio i svjaz', 1988, 248 p. [in Russian].
2. Raevskij A.S. Elektrodinamika napravljajuschih i rezonansnyh struktur, opisivaemyh nesamosoprjzhennymi kraevymi zadachami [Electrodynamics of the guiding and resonant structures described nonselfadjoint edge], 2004, 450 p. [in Russian].
3. Raevskij A.S., Raevskij S.B. Kompleksnye volny [Complex waves]. M.: Radiotekhnika, 2010, 223 p. [in Russian].
4. Raevskij A.S., Raevskij S.B. Neodnorodnye napravljajuschie struktury, opisivaemye nesamosoprjzhennymi operatorami [Heterogeneous guiding structures described nonselfadjoint operators]. M.: Radiotekhnika, 2004, 110 p. [in Russian].
5. Najmark M.A. Linejnye differentsial'nye operatory [Linear differential operators]. M.: Nauka, 1969, 528 p. [in Russian].
6. Kamke E. Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravnenijam [Handbook of ordinary differential equations]. M.: Nauka, 1965, 703 p. [in Russian].
7. Shevchenko V.V. Nagljadnaja klassifikatsija voln, napravljaemyh reguljarnymi otkrytymi volnovodami [Transparent classification of waves guided by regular open waveguides]. Radiotekhnika i elektronika [Technology and Electronics], 1969, vol. 12, no. 12, pp. 1768–1773 [in Russian].
8. Raevskij A.S., Raevskij S.B. Kraevaja zadacha na prisoedinenom uravnenii Gel'mgol'tsa [Boundary value problem on the attached Helmholtz equation]. Radiotekhnika i elektronika [Technology and Electronics], 2016, vol. 61, no. 3, pp. 233–244 [in Russian].
9. Zabrejko P.P. [et al.] Integral'nye uravnenija [Integral Equations]. M.: Nauka, 1968, 448 p. [in Russian].
10. Shevchenko V.V. O razlozhenii polej otkrytyh volnovodov po sobstvennym i nesobstvennym volnam [On the expansion of the fields of open waveguides of proper and improper waves]. Radiotekhnika i elektronika [Technology and Electronics], 1971, vol. 14, no. 8, pp. 1242–1249 [in Russian].
11. Shevchenko V.V. Poverhnostnye i vytekajuschie volny ploskogo dielektricheskogo volnovoda s poterjami [Surface and leaky waves planar dielectric waveguide losses]. Radiotekhnika i elektronika [Technology and Electronics], 1988, vol. 31, no. 3, pp. 456–465 [in Russian].
12. Raevskij A.S. Issledovanie spektrov voln neodnorodnyh otkrytyh napravljajuschih struktur [Spectra waves heterogeneous open guiding structures]. Fizika volnovykh protsessov i radiotekhnicheskie sistemy [Physics of wave processes and radio systems], 2006, vol. 9, no. 3, pp. 66–70 [in Russian].

UDC 621.372.831
DOI 10.18469/1810-3189.2019.22.3.5-9

Received: 25.09.2019
Accepted: 27.09.2019

Determination of the spectra of solutions of boundary value problems for guiding structures using the transition to integral equations

S.A. Kapustin, N.A. Novoselova, A.S. Raevskii, S.B. Raevskii

Nizhny Novgorod State Technical University named after R.E. Alekseev
24, Minin Street
Nizhny Novgorod, 603950, Russian Federation

The vast majority of guiding structures are described [1–3] by non-self-adjoint electrodynamic operators, which are understood as the totality of the differential equation and the system of boundary conditions. In [1–5], the conditions for the non-self-adjointness of electrodynamic operators are formulated as applied to the method of separation of variables. The indicated operators can be put in accordance with [5–6] integral equations. The boundary problems for cylindrical guiding structures are assigned the Volterra integral equations, using asymptotic solutions of which an a priori determination of the spectra of solutions of boundary-value problems for two-layer open and shielded waveguides is carried out.

Keywords: electrodynamic operator, wave spectrum, boundary value problem, Volterra equation, eigen and improper waves, two-layer guiding structures.