*2013 г.* *Том 16, № 1*

Физика волновых процессов и радиотехнические системы

УДК 621.373.12

# Синхронизация автогенератора с дробной обратной связью

*В.В. Зайцев, Ар.В. Карлов, Г.П. Яровой*

Самарский государственный университет
443011, Российская Федерация, г. Самара
ул. Ак. Павлова, 1

Предложена модель автоколебательной системы с дифференциальным уравнением движения дробного порядка, находящейся под действием внешнего гармонического сигнала. Решения уравнения движения, соответствующие режиму установившихся синхронизированных колебаний и режиму биений вблизи полосы синхронизации, получены в квазигармоническом приближении. Проанализированы амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики синхронизации дробного осциллятора Ван дер Поля. Установлена аналогия между генератором с дробной цепью обратной связи и генератором с запаздывающей обратной связью.

*Ключевые слова*: дробная динамика, автоколебательные системы, гармоническая линеаризация, фазовая синхронизация.

**1**. В настоящее время формируется новый раздел теории динамических систем − дробная динамика [1] (в англоязычной литературе − фрактальная динамика [2]). Он охватывает исследования систем с интегро-дифференциальными уравнениями движения дробного порядка.

Учитывая роль осцилляторов в классической динамике, есть все основания рассматривать фрактальный осциллятор как базовую модель дробной динамики. В научной периодике можно найти ряд публикаций, посвященных различным вопросам динамики фрактальных осцилляторов. В частности, в монографии [3] приведены аналитические решения задачи Коши для линейных консервативных осцилляторов. Импульсная характеристика осциллятора с дробным затуханием получена в статье [4]. В работе [5] описан алгоритм численного анализа механического осциллятора с демпфирующей силой, пропорциональной дробной производной от смещения. Ряд ссылок на оригинальные работы по динамике линейных фрактальных осцилляторов содержится также в библиографическом списке монографии [1]. Вместе с тем нелинейные колебательные системы с дифференциальными уравнениями дробного порядка пока исследованы в значительно меньшей степени.

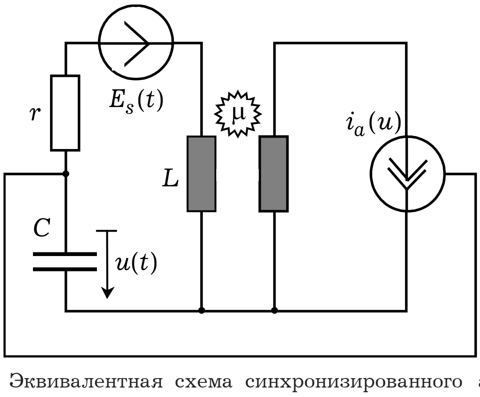


**Рис. 1.** Эквивалентная схема синхронизированного автогенератора

В статье [6] предложена модель автогенератора томсоновского типа с дробной цепью обратной связи (цепью ОС) и проанализированы его колебания в автономном режиме. Настоящая статья посвящена исследованию режима синхронизации дробного автогенератора на основном тоне внешнего гармонического сигнала. В качестве базовой модели автогенератора с нормальными (недробными) связями использован осциллятор Ван дер Поля.

**2**. Модель дробного автогенератора в [6] основана на предположении о том, что ток активного трехполюсника $J_a(t)$, протекающий по первичной обмотке трансформатора ОС (см. рис. 1), возбуждает в его контурной обмотке эдс

$$E_c(t) = \mu \frac{d}{dt}\, {}_L I^{1-\alpha}\left[J_a(t)\right], \qquad (1)$$

где левосторонний интеграл Лиувилля порядка $1-\alpha$ при $0<\alpha<1$ определяется как

$${}_L I^{1-\alpha}\left[J_a(t)\right] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^{t} \frac{J_a(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau;$$

$\Gamma(x)$ − гамма-функция аргумента $x$. Размерный коэффициент μ в дробном дифференциальном преобразовании (1) замещает коэффициент взаимоиндукции $M$ в стандартной модели трансформатора.

С учетом уравнения ОС (1) нетрудно записать полное уравнение движения автогенератора при введении синхронизирующего сигнала $E_s(t)$ в колебательный контур так, как показано на рис. 1. Относительно переменного напряжения $u(t)$ на емкости контура оно имеет вид

$$\begin{aligned}&\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt}+\omega_0^2u=\\&=\omega_0^{2-\alpha}g\frac{d}{dt}\,{}_LI^{1-\alpha}\left[i_a(u)\right]+\omega_0^2E_s(t),\end{aligned}\tag{2}$$

где $\omega_0$ и $Q$ − собственная частота и добротность колебательного контура с характеристическим сопротивлением $Z_0$. Нелинейная вольт-амперная характеристика (ВАХ) активного элемента в (2) аппроксимируется кубическим полиномом с коэффициентами $S_0$ (малосигнальная крутизна ВАХ) и $\beta$ (коэффициент нелинейности):

$$J_a(u)=S_0i_a(u)=S_0\left(1-\beta u^2\right)u.\tag{3}$$

Кроме того, при записи уравнения (2) использован безразмерный параметр глубины положительной обратной связи

$$g=\frac{\mu S_0Z_0}{L\omega_0{}^{1-\alpha}}.$$

**3**. Анализ колебаний в осцилляторе (2) проведем в приближении метода эквивалентной (гармонической) линеаризации. Метод широко используется при решении прикладных задач теории нелинейных колебаний [7]. Условия его применимости − высокая добротность резонансной системы и слабая нелинейность активного элемента. Будем считать эти условия для исследуемого осциллятора выполненными.

В соответствии со стандартной процедурой эквивалентной линеаризации в токе (3) при гармоническом сигнале $u(t)=A\cos(\omega_0t)$ учитывается лишь первая гармоника колебаний тока $J_a\left(u(t)\right)$:

$$J_a(t)\approx S_0S_1(A)A\cos(\omega_0t)=S_0S_1(A)u(t),$$

где средняя крутизна ВАХ по первой гармонике дается выражением

$$S_1(A)=1-\frac{3}{4}\beta A^2.\tag{4}$$

Тогда с учетом того, что

$${}_LI^{1-\alpha}\left[\cos\left(\omega_0t\right)\right]=\frac{1}{\omega_0^{1-\alpha}}\sin\left(\omega_0t+\alpha\frac{\pi}{2}\right)$$

(см. таблицы интегралов Лиувилля в [8]), нелинейное слагаемое в правой части (2) принимает форму линейного отклика

$$\begin{aligned}&\omega_0^{2-\alpha}g\frac{d}{dt}\,{}_LI^{1-\alpha}\left[i_a(u)\right]=\\&=-2\omega_0\Delta\omega(A)u+\frac{\omega_0}{Q_{ex}(A)}\frac{du}{dt},\end{aligned}$$

с зависящими от амплитуды эквивалентными параметрами

$$\begin{aligned}&\frac{1}{Q_{ex}(A)}=gS_1(A)\sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right),\\&\Delta\omega=-\frac{\omega_0}{2}gS_1(A)\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}\tag{5}$$

Параметры имеют простую физическую интерпретацию: $Q_{ex}(A)$ − модуль внешней добротности контура, $\Delta\omega(A)$ − поправка на частоту свободных автоколебаний.

Таким образом, в приближении эквивалентной линеаризации уравнение (2) заменяется уравнением

$$\begin{aligned}&\frac{d^2u}{dt^2}+\omega_0\left(\frac{1}{Q}-\frac{1}{Q_{ex}(A)}\right)\frac{du}{dt}+\\&+\left(\omega_0^2+2\omega_0\Delta\omega(A)\right)u=\omega_0^2E_s(t).\end{aligned}\tag{6}$$

При внешнем гармоническом воздействии с амплитудой $E$ и частотой

$$E_s(t)=E\cos(\omega t),$$

решение уравнения (6) представим в виде

$$u(t)=A(t)\cos\left(\omega t+\varphi(t)\right).$$

Амплитуда $A$ и фаза $\varphi$ принимают постоянные значения для режима синхронизированных колебаний с частотой внешнего воздействия и являются медленными функциями времени для режима биений вблизи границ области синхронизации. Предполагается, что указанные режимы наблюдаются в осцилляторе с дробной ОС, подобно тому, как это имеет место в классическом осцилляторе Ван дер Поля.

**4.** В режиме синхронизированных колебаний дифференциальное уравнение движения (6) сводится к системе двух алгебраических уравнений для амплитуды и фазы колебаний:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{Q}-\frac{1}{Q_{ex}(A)}\right)A=-E\sin\varphi,\\&2\left(\delta\omega(A)-\xi\right)A=E\cos\varphi,\end{aligned}\tag{7}$$

в записи которых использованы относительные величины $\xi=(\omega-\omega_0)/\omega_0$ и

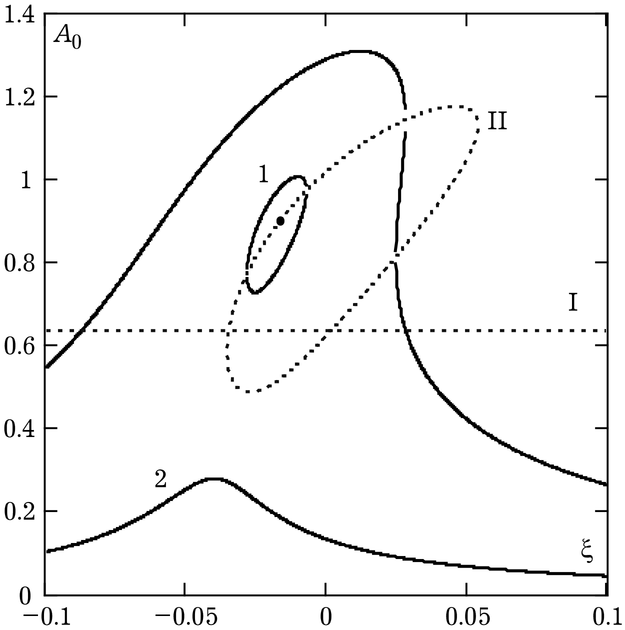


**Рис. 2.** АЧХ синхронизированного генератора

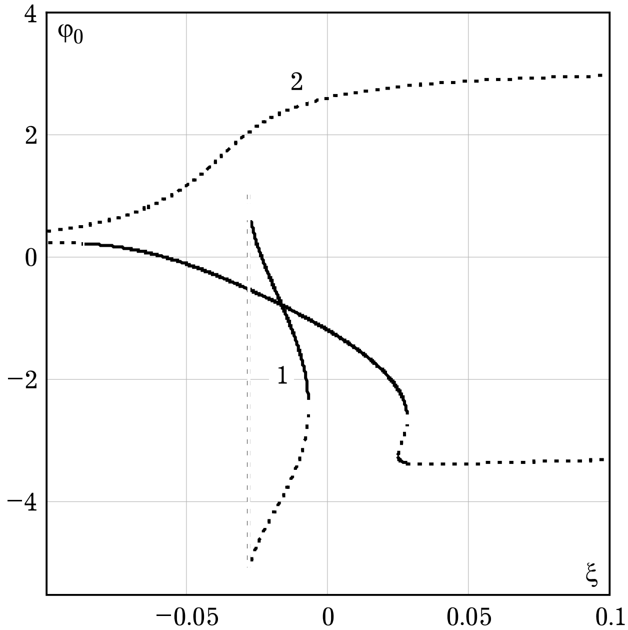


**Рис. 3.** ФЧХ синхронизированного генератора

$$\delta\omega(A) = \frac{\Delta\omega(A)}{\omega_0} = -\frac{1}{2} g S_1(A) \cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right).$$

После исключения фазы $\varphi$ система уравнений (7) дает амплитудное уравнение вида

$$\left(\frac{1}{Q} - \frac{1}{Q_{ex}(A)}\right)^2 A^2 + 4\left(\delta\omega(A) - \xi\right)^2 A^2 = E^2$$

или, с учетом (5), вида

$$\begin{gathered}\left(\frac{1}{Q} - g S_1(A) \sin\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right)\right)^2 A^2 + \\ + \left(g S_1(A) \cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) + 2\xi\right)^2 A^2 = E^2.\end{gathered} \tag{8}$$

Для средней крутизны (4) это уравнение является кубическим относительно квадрата амплитуды, поэтому в зависимости от расстройки $\xi$ оно имеет либо один, либо три вещественных корня.

На рис. 2 приведены графики амплитудно-частотных характеристик синхронизированных колебаний, построенные по результатам решения уравнения (8) для системы с параметрами $\alpha = 0{,}5$, $Q = 30$ и $g = 0{,}12$. Амплитуды сигналов нормированы на величину $A_* = 1/\sqrt{\beta}$. При амплитуде внешнего сигнала $E = 0{,}013$ график АЧХ распадается на две ветви: ветвь 1 в форме замкнутой кривой и ветвь 2 резонансной формы. При увеличении амплитуды синхронизации две ветви сливаются в одну − резонансную. На рис. 2 характеристика такого вида построена для $E = 0{,}075$. Результаты исследований (см. ниже) показывают, что устойчивыми являются части АЧХ, расположенные вне области, ограниченной замкнутой кривой II, и выше прямой линии I. Фазочастотные характеристики, соответствующие АЧХ рис. 2, приведены на рис. 3. Неустойчивые части ФЧХ показаны пунктирными линиями.

Общий вывод о форме частотных характеристик синхронизированного осциллятора Ван дер Поля с дробной ОС − наличие асимметрии относительно частоты свободных автоколебаний. Степень асимметрии увеличивается с уменьшением дробного показателя $\alpha$. В этом осциллятор с дробной ОС аналогичен генератору с запаздыванием $\tau$ в цепи обратной связи [9], удовлетворяющим соотношению $(1-\alpha)\pi/2 = \omega_0\tau$.

**5.** В процессе установления синхронных колебаний и режиме биений амплитуда $A$ и фаза $\varphi$ полагаются медленными функциями времени, и для них записывается система укороченных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega_0}\frac{dA}{dt} &= -\frac{A}{2}\left(\frac{1}{Q} - g S_1(A) \sin\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right)\right) - \frac{E}{2}\sin\varphi, \\ \frac{1}{\omega_0}\frac{d\varphi}{dt} &= -\xi - \frac{1}{2} g S_1(A) \cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) - \frac{E}{2A}\cos\varphi.\end{aligned} \tag{9}$$

Уравнения (9) позволяют также исследовать устойчивость стационарных режимов синхронизированных колебаний с амплитудами и фазами, определяемыми решениями уравнений (7). Для этого следует положить

$$A(t) = A_0 + a(t), \quad \varphi(t) = \varphi_0 + \phi(t),$$

где нулевыми индексами обозначены стационарные величины, и линеаризовать уравнения (9) относительно малых вариаций $a(t)$ и $\phi(t)$. Результатом линеаризации является система

$$\frac{1}{\omega_0}\frac{da}{dt} = p_{11}a + p_{12}\phi, \quad \frac{1}{\omega_0}\frac{d\phi}{dt} = p_{21}a + p_{22}\phi \qquad (10)$$

с зависящими от амплитуды $A_0$ коэффициентами

$$p_{11}(A_0) = -\frac{1}{2Q} + \frac{g}{2}\frac{d}{dA_0}\big(S_1(A_0)A_0\big)\sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right),$$

$$p_{12}(\xi, A_0) = \xi A_0 + \frac{g}{2}S_1(A_0)A_0\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right),$$

$$p_{21}(\xi, A_0) = -\frac{\xi}{A_0} + \frac{g}{2}\frac{d}{dA_0}\big(S_1(A_0)\big) - \qquad (11)$$

$$-\frac{g}{2A_0}S_1(A_0)\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right),$$

$$p_{22}(A_0) = -\frac{1}{2Q} + \frac{g}{2}S_1(A_0)\sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right).$$

Необходимым и достаточным условием релаксации вариаций $a(t)$ и $\phi(t)$ к нулевым значениям (условием устойчивости $A_0$ и $\varphi_0$) является выполнение неравенств

$$D_I(A_0) = p_{11}(A_0) + p_{22}(A_0) \le 0,$$

$$D_{II}(\xi, A_0) = p_{12}(\xi, A_0)p_{21}(\xi, A_0) - \qquad (12)$$

$$- p_{11}(A_0)p_{22}(A_0) \le 0.$$

Равенства в (12) соответствуют границам области устойчивости. Они показаны на рис. 2 пунктирными линиями I и II. Граница $D_{\mathrm{I}}(A_0) = 0$ представляет собой прямую линию, параллельную оси частот, а граница $D_{\mathrm{II}}(\xi, A_0) = 0$ – замкнутую кривую второго порядка. При уменьшении дробного показателя $\alpha$ кривая размыкается и граница принимает вид наклоненной вправо линии параболического типа.

**6.** Помимо автогенератора с дробной цепью обратной связи, представляет интерес рассмотрение генератора с дробной линейной диссипативной цепью и уравнением движения вида

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0^{1-\alpha}}{Q}\frac{d}{dt}\Big({}_L I^{1-\alpha}[u]\Big) + \omega_0^2 u = \qquad (13)$$

$$= \omega_0 g\frac{di_a(u)}{dt} + \omega_0^2 E_s(t).$$

Здесь $Q$ – добротность колебательного контура с нормальной диссипацией, а все остальные переменные и параметры имеют тот же физический смысл, что и в уравнении (2). Описанная выше методика эквивалентной линеаризации уравнения (13) приводит к системе укороченных уравнений

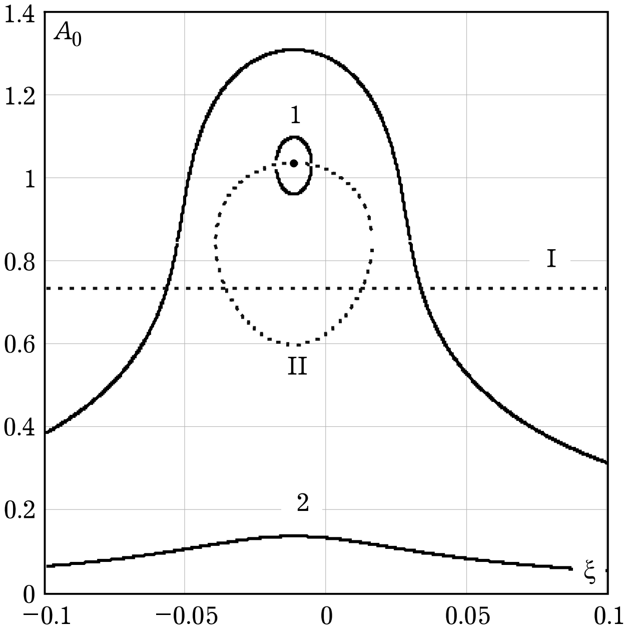


**Рис. 4.** АЧХ синхронизированного генератора с дробной диссипацией

$$\frac{1}{\omega_0}\frac{dA}{dt} = -\frac{A}{2}\left(\frac{1}{Q}\sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) - gS_1(A)\right) - \frac{E}{2}\sin\varphi,$$

$$\frac{1}{\omega_0}\frac{d\varphi}{dt} = -\xi - \frac{1}{2Q}\sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}gS_1(A) - \frac{E}{2A}\cos\varphi$$

и амплитудному уравнению вида

$$\left(\frac{1}{Q}\sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) - gS_1(A)\right)^2 A^2 + \qquad (14)$$

$$+\left(\frac{1}{Q}\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) + 2\xi\right)^2 A^2 = E^2.$$

Графики амплитудно-частотных характеристик синхронизации автоколебаний в системе (13), построенные по результатам решения уравнения (14), приведены на рис. 4. Пунктирными линиями показаны границы областей устойчивости стационарных режимов синхронизированных колебаний. Значения параметров АЧХ на рис. 2 и рис. 4 совпадают.

Как следует из рис. 4, частотные характеристики синхронизированных колебаний в генераторе с дробной линейной диссипацией симметричны относительно частоты свободных автоколебаний. Такая симметрия наблюдается и в осцилляторе Ван дер Поля с нормальной диссипацией. Следовательно, дробность линейной диссипации не вносит качественных изменений в характеристики автоколебательной системы.

**7.** Результаты проведенного анализа позволяют сделать вывод о том, что линейные дробные активно-диссипативные связи в автоколебательных системах качественно не меняют их динамических характеристик. За счет внесения в схему дополнительных реактивностей они лишь изменяют собственные частоты системы. Качественные изменения в динамике системы возникают тогда, когда дробные связи одновременно являются нелинейными.

## Список литературы


1. Тарасов В.Е. Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка. М.; Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2011. 568 с.
2. Zaslavsky G.M. Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics. Oxford: Oxford University Press, 2005 / Заславский Г.М. Гамильтонов хаос и фрактальная динамика. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2010. 472 с.
3. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
4. Schafer I., Kempfle S. Impulse responses of fractional damped systems // Nonlinear Dynamics. 2004. V. 38. P. 61–68. URL: http://www.springerlink.com/content/q180440301740421/fulltext.pdf.
5. Yuan L., Agrawal O.P. A numerical scheme for dynamic systems containing fractional derivatives // Proc. of ASME Design Engineering Technical Conferences. Atlanta, 1998. URL: http://me.engr.siu.edu/MEEP_old/faculty/agrawal/mech5857.pdf.
6. Зайцев В.В., Карлов Ар.В., Яровой Г.П. Динамика автоколебаний дробного томсоновского осциллятора // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2012. Т. 15. № 1. С. 64–68.
7. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. 4-е изд. М.: Наука, 1974. 504 с.
8. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
9. Рубаник В.П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М.: Наука, 1969. 288 с.


# Synchronization of self-oscillator wich fractional feedback

*V.V. Zaitsev, Ar.V. Karlov, G.P. Yarovoy*

A model of self-oscillating system with a differential equation of motion of fractional order under the action of an external harmonic signal is proposed. Solutions of the equation of motion which correspond to the regime of steady-state synchronized oscillations and the regime of beats near the synchronization band are obtained in the quasiharmonic approximation. The amplitude frequency and phase-frequency characteristics of synchronization of fractional Van der Pol oscillator are analyzed. An analogy between the generator with a fractional feedback circuit and the generator with delayed feedback is established.

*Keywords*: fractional dynamics, self-oscillations systems, harmonic linearization, phase synchronization.