2013 г. Том 16, № 2
Физика волновых процессов и радиотехнические системы

УДК 621.396.677.45

Математические модели цилиндрической спиральной антенны

В.А. Неганов, Д.П. Табаков

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики
443010, Российская Федерация, г. Самара
ул. Л. Толстого, 23

В статье рассмотрена цилиндрическая спиральная антенна с линейным шагом намотки, расположенная над идеально проводящей плоскостью. Построена корректная физическая модель структуры. Показано, что в данной постановке решение задачи о распределении тока в спирали сводится к решению сингулярного интегрального уравнения. Для сравнения приведена математическая модель спиральной антенны в тонкопроволочном приближении, а также алгоритм решения интегральных уравнений. Проведен сравнительный анализ распределений тока в спирали.

Ключевые слова: спиральная антенна, сингулярное интегральное уравнение, тонкопроволочное приближение, корректная физическая модель.

Введение

Интенсивное развитие различных отраслей радиоэлектроники, начавшееся во второй половине XX века, вызвало практическую потребность в антеннах, обеспечивающих излучение и прием эллиптически поляризованного электромагнитного поля (ЭМП) в широком диапазоне частот. Важное место среди различных типов широкополосных антенн занимают спиральные антенны.

Исследование антенн подобного типа велось на протяжении длительного времени как у нас [1; 2], так и за рубежом [3; 4]. В подавляющем большинстве отечественных источников подход к анализу спиральных антенн построен на приближениях [2], суть которых заключается в замене реальной антенны сильно упрощенным физическим эквивалентом – решеткой или анизотропно-проводящей моделью. Данный подход не обладает высокой точностью, но достаточно просто описывает физику происходящих процессов и служит ориентиром при проектировании излучающих структур на основе спиральных излучателей.

Следует отметить, что при рассмотрении вопросов электромагнитной совместимости и безопасности на первый план выходит ближняя зона излучающих структур, распределение электромагнитного поля в которой сильно зависит от распределения поверхностных токов, в то время как приближенные методы ориентированы на анализ дальней зоны излучения.

Сегодня в зарубежной литературе спиральным антеннам уделяется значительное внимание [5], причем их анализ основан на интегральных уравнениях (ИУ), и подобный подход прослеживается с самых ранних этапов внедрения и развития антенн данного типа [6]. Но практически все физические модели антенн строятся в тонкопроволочном приближении [7]. Это упрощает математическую модель, но при этом она становится некорректной [8]. Тем не менее зачастую этого вполне достаточно для практических нужд.

С другой стороны, сейчас для решения задачи анализа и синтеза активно применяются различные системы автоматизированного проектирования (САПР), такие как Microvawe Studio, FEKO и т. д. Эти САПР универсальны и обладают поистине огромными возможностями, но при анализе используют далеко не все свойства рассчитываемых структур, а результат представляется только в численном виде, поэтому проектирование носит в большей степени опытный характер. При наличии же интегрального уравнения или системы ИУ, описывающих излучающую структуру, появляются возможности для ее дальнейшего аналитического исследования, выявления новых закономерностей и построения оптимизированных алгоритмов ее расчета.

Основой данной статьи служит работа [9], где рассмотрена цилиндрическая винтовая спираль с линейным шагом намотки, а вывод ИУ осуществлен в цилиндрической системе координат. В настоящей статье предложен другой вариант физической модели антенны, расположенной над бесконечно протяженной идеально проводящей плоскостью. Так же как и в [9], основным ее достоинством является корректность, т. е. ей соответствует математическая модель в виде ИУ Фредгольма второго рода, решение которого является корректной задачей [10]. Также в статье представлена тонкопроволочная модель антенны; приведен алгоритм решения ИУ и численные результаты.

1. Постановка задачи

Построение геометрии проволочной либо полосковой цилиндрической спирали удобнее всего начинать с описания ее образующей. В естественном параметре [11] уравнение радиус-вектора, конец которого проходит по образующей L цилиндрической спирали радиуса a, имеет вид

$$\mathbf{R}_L(l) = a\cos(\xi l)\cdot\mathbf{x}_0 + a\sin(\xi l)\cdot\mathbf{y}_0 + \xi hl\cdot\mathbf{z}_0,\quad l\in[0;l_e], \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{y}_0$, $\mathbf{z}_0$ – орты декартовой системы координат; h – коэффициент подъема; $\xi = 1/\sqrt{a^2+h^2}$; l_e – значение естественного параметра, соответствующее конечной точке образующей. Идеально проводящий экран является плоскостью симметрии, расчет поля в верхнем полупространстве производится с учетом в интегральном уравнении поля, создаваемого зеркальным отражением спирали.

Также запишем параметрические уравнения образующей L:

$$L:\begin{cases} x(l) = a\cos(\xi l);\\ y(l) = a\sin(\xi l);\\ z(l) = \xi hl; \end{cases}\quad l\in[0;l_e]. \tag{2}$$

Определим единичные векторы касательной $\mathbf{l}_0$, первой и второй нормали $\mathbf{n}_0$ и $\mathbf{b}_0$ для каждого значения $l\in[0;l_e]$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &\mathbf{l}_0(l) = d\mathbf{R}_L(l)/dl = -\xi a\sin(\xi l)\cdot\mathbf{x}_0 + \\ &+\xi a\cos(\xi l)\cdot\mathbf{y}_0 + \xi h\cdot\mathbf{z}_0,\\ &\mathbf{n}_0(l) = \left|\mathbf{l}_0'(l)\right|^{-1}\mathbf{l}_0'(l) = -\cos(\xi l)\cdot\mathbf{x}_0 - \\ &-\sin(\xi l)\cdot\mathbf{y}_0 + 0\cdot\mathbf{z}_0,\\ &\mathbf{b}_0(l) = \mathbf{l}_0(l)\times\mathbf{n}_0(l) = \xi h\sin(\xi l)\cdot\mathbf{x}_0 - \\ &-\xi h\cos(\xi l)\cdot\mathbf{y}_0 + \xi a\cdot\mathbf{z}_0. \end{aligned} \tag{3}$$

Во втором выражении (3) $\mathbf{l}_0'(l) = d\mathbf{l}_0(l)/dl$. Поверхность S полосковой цилиндрической спирали с учетом (3) и (1) будем описывать радиус-вектором:

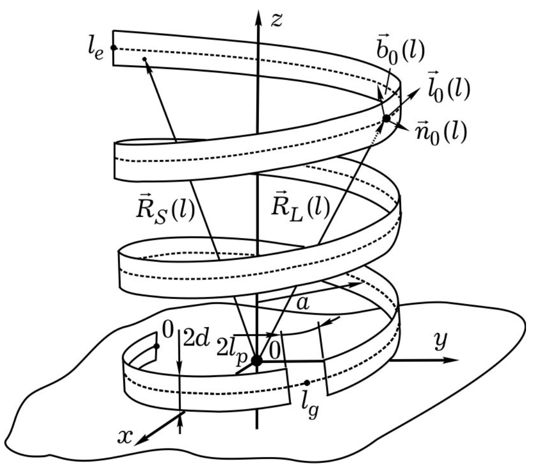

Рис. 1. Геометрия спиральной антенны

$$\mathbf{R}_S(b,l) = \mathbf{R}_L(l) + b\cdot\mathbf{b}_0(l),\quad l\in[0,l_e], b\in[-d,d], \tag{4}$$

которому соответствует параметрическое уравнение:

$$S:\begin{cases} x(b,l) = a\cos(\xi l) - \xi hb\sin(\xi l);\\ y(b,l) = a\sin(\xi l) + \xi hb\cos(\xi l);\\ z(b,l) = \xi ab + \xi hl; \end{cases}\quad l\in[0,l_e],\quad b\in[-d,d]. \tag{5}$$

Переменную l в дальнейшем будем также называть продольной координатой, а b – поперечной. Таким образом, цилиндрическая спиральная антенна представляет собой идеально проводящую бесконечно тонкую металлическую полоску шириной $2d$ и длиной l_e, навитую на воображаемый цилиндр радиуса a, расположенный над бесконечно протяженной идеально проводящей плоскостью $z = 0$ (рис. 1).

Ширина полоски $2d$ много меньше длины волны λ, поэтому поперечными компонентами векторов напряженности электрического поля $E_b\cdot\mathbf{b}_0$ и поверхностной плотности тока $\eta_b\cdot\mathbf{b}_0$ можно пренебречь.

Так как $2d \ll \lambda$, то распределение поверхностной плотности тока по ширине полоски в первом приближении можно считать квазистатическим:

$$\eta_l(b,l) = \frac{I(l)}{\pi\sqrt{d^2-b^2}}, \tag{6}$$

здесь

$$I(l) = \int_{-d}^{d}\eta_l(b,l)db$$

– распределение тока по длине полоски.

Граничное условие для вектора $\mathbf{E}$ на поверхности антенны с учетом бесконечно большой проводимости металла и сделанных ранее допущений приобретает следующий вид:

$$(E_l^{in}(b,l)+E_l\,(b,l))\cdot\mathbf{l}_0\;=0.\qquad l\in[0,l_e],\quad b\in[-d,d], \tag{7}$$

где E_l^{in} – продольная компонента поля, создаваемая внешним источником. При рассмотрении спиральной структуры в качестве антенны область поверхности S, которой соответствуют значения переменных ($l\in[l_g-l_p;l_g+l_p]$, $b\in[-d;d]$), замещается зазором с расположенным в нем источником электродвижущей силы (рис. 1), порождающим продольную составляющую вектора напряженности стороннего электрического поля $\mathbf{E}_l^{in}=E_l^{in}\cdot\mathbf{l}_0$. Аналогичное замещение проводится в области значений переменных ($l\in[l_g-l_p;l_g+l_p]$, $\psi\in[-\pi;\pi]$) на S_ς для тонкопроволочной модели, речь о которой пойдет далее. Ширина зазора $2l_p$ много меньше длины волны λ, и поверхностная плотность тока η непрерывна в области зазора. Точку на образующей, которой соответствует значение $l=l_g$, будем называть точкой питания.

Функция E_l^{in} равна нулю всюду, за исключением области зазора:

$$E_l^{in}(l)=\frac{1}{2l_p}\begin{cases}U_p, l\in[l_g-l_p;l_g+l_p];\\ 0,\quad l\notin[l_g-l_p;l_g+l_p];\end{cases}$$
$$l\in[0;l_e].$$

Здесь

$$U_p=\int_0^{l_e}E_l^{in}(l)dl$$

– напряжение в точке питания.

Рассмотрим также тонкопроволочную модель спиральной структуры. Определим цилиндрическую поверхность S_ς радиуса ς, окружающую образующую L спирали. Для этого введем локальные цилиндрические координаты $\{\rho,\psi,l\}$ с ортами:

$$\mathbf{r}_0(l,\psi)=\;\mathbf{n}_0(l)\cos\psi+\mathbf{b}_0(l)\sin\psi,$$
$$щ_0(l,\psi)=-\mathbf{n}_0(l)\sin\psi+\mathbf{b}_0(l)\cos\psi,$$
$$\mathbf{l}_0(l)=\mathbf{l}_0(l).$$

Тогда радиус-вектор, проходящий по поверхности S_ς, будет записан в виде

$$\mathbf{R}_\varsigma(l,\psi)=\mathbf{R}_L(l)+\varsigma\,\mathbf{r}_0(l,\psi);\qquad l\in[0,l_e],\quad \psi\in[-\pi,\pi]. \tag{8}$$

Параметрические уравнения поверхности S_ς записываются с учетом (8) через соответствующие проекции $\mathbf{R}_\varsigma$:

$$S_\varsigma:\begin{cases}x(l,\psi)=(\mathbf{R}_\varsigma(l,\psi))_x;\\ y(l,\psi)=(\mathbf{R}_\varsigma(l,\psi))_y;\\ z(l,\psi)=(\mathbf{R}_\varsigma(l,\psi))_z;\end{cases}\qquad l\in[0,l_e],\quad \psi\in[-\pi,\pi]. \tag{9}$$

Радиус ς является достаточно малым, поэтому можно считать, что вектор поверхностной плотности тока $\vec{\eta}$ не содержит азимутальной составляющей и при этом его распределение не зависит от азимута:

$$з(l,\psi)=\frac{\hat{I}(l)}{2\pi\varsigma}\mathbf{l}_0(l)=\eta_l(l)\mathbf{l}_0(l), \tag{10}$$

здесь

$$\hat{I}(l)=\int_{-\pi}^{\pi}\eta_l(l)\varsigma d\psi$$

– распределение тока по длине структуры. В тонкопроволочном приближении считается, что ток $\hat{I}(l)$ протекает по образующей спирали, а граничное условие

$$(E_l^{in}(l)+E_l\,(l))\cdot\mathbf{l}_0\;=0,\qquad l\in[0,l_e] \tag{11}$$

ставится на окружающей ее воображаемой цилиндрической поверхности S_ς. Тогда, пренебрегая азимутальной зависимостью, расстояние между точкой на образующей и точкой на поверхности S_ς можно записать в приближенном виде, используя (2):

$$\widehat{R}(\tau)=\sqrt{\sum_{u\equiv x,y,z}(u(l)-u(l'))^2+\varsigma^2}=$$
$$=\sqrt{4a^2\sin(\xi\tau/2)^2+\xi^2h^2\tau^2+\varsigma^2},\qquad \tau=l-l'. \tag{12}$$

Значение радиуса $\varsigma=t/2$ эквивалентно значению ширины полоски $2t$.

2. Интегральное уравнение в тонкопроволочном приближении

Ссылаясь на интегральное уравнение для произвольной проволочной антенны [6] с учетом ГУ (11), запишем:

$$E_l^{in}(l)=-\frac{W_c}{4\pi ik}\int_0^{l_e}\hat{I}(l')\left(k^2f(l,l')-\frac{\partial^2}{\partial l\partial l'}\right)\times$$
$$\times\widehat{G}(l,l')dl'+E_l^{(m)}(l). \tag{13}$$

Здесь:

$$f(l,l')=(\mathbf{l}_0(l)\cdot\mathbf{l}_0(l'))=\xi^2a^2\cos(\xi(l-l'))+\xi^2\;h^2$$

– скалярное произведение единичных касательных векторов,

$$\widehat{G}(l,l')=\mathrm{e}^{-ik\widehat{R}(l,l')}/\widehat{R}(l,l')$$

– функция Грина, связывающая точку излучения на образующей с точкой на воображаемой цилиндрической поверхности S_ς.

Функция $E_l^{(m)}(l)$ – это поле, наводимое на реальную спираль током $\hat{I}(l')$ ее зеркального отображения, создаваемого идеально проводящей плоскостью:

$$E_l^{(m)}(l) = -\frac{W_c}{4\pi ik}\int_0^{l_e}\hat{I}(l')\left(k^2 f^{(m)}(l,l') - \frac{\partial^2}{\partial l \partial l'}\right)\times \tag{14}$$
$$\times\,\widehat{G}^{(m)}(l,l')dl',$$

здесь:

$$f^{(m)} = -\xi^2 a^2 \cos(\xi(l-l')) + \xi^2 h^2,$$
$$\widehat{G}^{(m)}(l,l') = \mathrm{e}^{-ik\widehat{R}^{(m)}(l,l')} / \widehat{R}^{(m)}(l,l'),$$
$$\widehat{R}^{(m)}(l,l') = \tag{15}$$
$$= \sqrt{4a^2 \sin(\xi(l-l')/2)^2 + \xi^2 h^2 (l+l')^2 + \varsigma^2}.$$

Теперь определим производные. Для $\widehat{G}'(l,l')$ и $\widehat{G}'^{(m)}(l,l')$ справедливы формулы:

$$\widehat{G}'(l,l') = \frac{\partial \widehat{G}(l,l')}{\partial l} = -\frac{Ur(l,l')}{2}\frac{ik\widehat{R}+1}{\widehat{R}^2}\widehat{G}(l,l'), \tag{16}$$

$$Ur(l,l') = 2(a^2\xi\sin(\xi\tau) + \xi^2 h^2 \tau),$$

$$\widehat{G}'^{(m)}(l,l') = \frac{\partial \widehat{G}^{(m)}(l,l')}{\partial l} = \tag{17}$$
$$= -\frac{Ur^{(m)}(l,l')}{2}\frac{ik\widehat{R}^{(m)}+1}{(\widehat{R}^{(m)})^2}\widehat{G}^{(m)}(l,l'),$$

$$Ur^{(m)}(l,l') = 2(a^2\xi\sin(\xi(l-l')) + \xi^2 h^2(l+l')).$$

Перепишем (13) с учетом (16) и (17) в форме интегрального уравнения:

$$E_l^{in}(l) = \int_0^{l_e}\hat{I}(l')\widehat{K}^{(1)}(l-l')dl' +$$
$$+\int_0^{l_e}\hat{I}(l')\frac{\partial}{\partial l'}\widehat{K}^{(2)}(l-l')dl' + E_l^{(m)}(l),$$
$$E_l^{(m)}(l) = \int_0^{l_e}\hat{I}(l')\widehat{K}^{(m,1)}(l,l')dl' + \tag{18}$$
$$+\int_0^{l_e}\hat{I}(l')\frac{\partial}{\partial l'}\widehat{K}^{(m,2)}(l,l')dl';$$
$$l \in [0, l_e].$$

Здесь

$$\widehat{K}^{(1)}(\tau) = \frac{ikW_c}{4\pi}f(\tau)\widehat{G}(\tau), \quad \widehat{K}^{(2)}(\tau) = \frac{W_c}{4\pi ik}\widehat{G}'(\tau);$$
$$\widehat{K}^{(m,1)}(l,l') = \frac{ikW_c}{4\pi}f^{(m)}(l,l')\widehat{G}^{(m)}(l,l'),$$
$$\widehat{K}^{(m,2)}(l,l') = \frac{W_c}{4\pi ik}\widehat{G}'^{(m)}(l,l')$$

– слагаемые общего ядра интегрального уравнения (18). При всех фиксированных $\varsigma > 0$ (18) классифицируется как интегральное уравнение (ИУ) Фредгольма первого рода. Решение подобных уравнений считается математически некорректной задачей. При $\varsigma = 0$ функции $\widehat{K}^{(1)}$ и $\widehat{K}^{(2)}$ имеют неинтегрируемые особенности, поэтому при малых ς уравнение (18) можно рассматривать как сингулярно возмущенную задачу [7].

3. Интегральное уравнение полосковой модели

Для полосковой модели можно получить интегральное уравнение, записанное относительно продольной компоненты поверхностной плотности тока на полоске η_l шириной $2d$: ($l \in [0, l_e]$, $b \in [-d, d]$):

$$E_l^{in}(b,l) = \frac{iW_c}{4\pi k}\int_0^{l_e}\int_{-d}^{d}\eta_l(b',l')\left(k^2 f(l-l') - \frac{\partial^2}{\partial l \partial l'}\right)\times \tag{19}$$
$$\times\, G(b,b',l-l')db'dl'.$$

Здесь:

$$G(b,b',l-l') = \frac{\mathrm{e}^{-ikR(b,b',l-l')}}{R(b,b',l-l')}$$

– соответствующая функция Грина,

$$R(b,b',l-l') = \sqrt{\sum_{u\equiv x,y,z}(u(b,l) - u(b,l'))^2}$$

– расстояние между точкой источника $q(b',l')$ и точкой наблюдения $p(b,l)$, записываемое на основе (5). Применяя квазистатическое приближение (6) и устанавливая граничное условие (7) только на образующей спирали (т. е. полагая $b = 0$), получаем интегральное уравнение следующего вида:

$$E_l^{in}(l) = \int_0^{l_e} I(l')K^{(1)}(l-l')dl' + \tag{20}$$
$$+\int_0^{l_e} I(l')\frac{\partial}{\partial l'}K^{(2)}(l-l')dl';$$

$$K^{(1)}(\tau) = \frac{ikW_c}{4\pi}f(\tau)\int_{-t}^{t}\frac{G_0(b',\tau)}{\pi\sqrt{t^2 - b'^2}}db';$$

$$K^{(2)}(\tau) = \frac{W_c}{4\pi ik}\int_{-t}^{t}\frac{G_0'(b',\tau)}{\pi\sqrt{t^2 - b'^2}}db',$$

$$G_0(b',\tau) = G(0,b',\tau).$$

$G_0'(b',\tau)$ находится по формуле:

$$G_0'(b',l-l') = \frac{\partial G_0(b',l-l')}{\partial l} =$$

$$= -\frac{Ub(b', l-l')}{2}\frac{ikR_0+1}{R_0^2}G_0(b', l-l').$$

Здесь

$$R_0^2(b', l-l') = R^2(0, b', l-l') =$$
$$= b'^2 + 2ah\xi\left(\sin(\xi\tau) - \xi\tau\right)b' + h^2\xi^2\tau^2 +$$
$$+ 4a^2\sin^2\left(\xi\tau/2\right),$$
$$Ub(b', \tau) =$$
$$= 2(h^2\xi^2\tau - 2ah\xi^2\sin^2\left(\xi\tau/2\right)b' + a^2\xi\sin(\xi\tau)).$$

В целях упрощения модели идеально проводящую плоскость учтем в тонкопроволочном приближении и, добавив $E_l^{(m)}(l)$ к правой части (20), получим интегральное уравнение вида

$$E_l^{in}(l) = \int_0^{l_e} I(l')K^{(1)}(l-l')dl' + \int_0^{l_e} I(l')\frac{\partial}{\partial l'}K^{(2)}(l-l')dl' + E_l^{(m)}(l);\ l \in [0, l_e]. \tag{21}$$

Интегральное уравнение (21) является сингулярным. Можно показать [9], что при $\tau \to 0$ в функциях $K^{(i)}(\tau)$ возникают особенности типа $\ln|\tau|$ и $1/\tau$. Решение сингулярных интегральных уравнений (СИУ) считается математически корректной задачей [10].

4. Метод решения интегральных уравнений

Рассмотрим общий подход к решению интегральных уравнений (18) и (21). В рамках метода согласования в точках [12] (в [13] применительно к сингулярным интегральным уравнениям он назван методом дискретных вихрей) отрезок интегрирования разбивается на N равных сегментов длиной $\Delta = l_e/N$, координаты концов которых определяются соседними значениями ряда:

$$l'_n = \Delta(n-1);\ m = \overline{1, N+1}. \tag{22}$$

Считается, что ток на каждом элементе не зависит от l': $I(l') = I_n$; $(l' \in [l'_n, l'_{n+1}])$, а граничное условие выполняется в точках:

$$l_m = \Delta(m-1) + \Delta/2;\ m = \overline{1, N}. \tag{23}$$

Определим разности:

$$\tau_{m,n} = l_m - l_n = \Delta(m-n);\ l_m - l'_n =$$
$$= \tau_{m,n} + \Delta/2;\ l_m - l'_{n+1} = \tau_{m,n} - \Delta/2.$$

Введем операторы:

$$\mathrm{L}_m^{(\tau)}(f(\tau)) = \int_{l_m - l'_n}^{l_m - l'_{n+1}} f(l-l')dl' = \int_{\Delta m - \Delta/2}^{\Delta m + \Delta/2} f(\tau)d\tau,$$

$$\mathrm{L}_{m,n}^{(\tau)}(f(l, l')) = \int_{l'_n}^{l'_{n+1}} f(l_m, l')dl'.$$

Подставляя (22) и (23) в (18) или (21) и умножая обе части выражения на Δ, получаем СЛАУ относительно неизвестных коэффициентов $I_n^{(N)}$:

$$\sum_{n=1}^{N} Z_{m,n}I_n^{(N)} = V_m;\ m = \overline{1, N}. \tag{24}$$

Здесь

$$V_m = \Delta E_l^{in}(l_m) \approx \int_{l'_m}^{l'_{m+1}} E_l^{in}(l)dl$$

– падение напряжения на m-м сегменте,

$$Z_{m,n} = \Delta\,\mathrm{L}_{m-n}^{(\tau)}(K^{(1)}(\tau)) -$$
$$- \Delta\,\mathrm{L}_{m-n}^{(\tau)}(\partial K^{(2)}(\tau)/\partial\tau) + Z_{m,n}^{(m)};$$
$$Z_{m,n}^{(m)} = \Delta\,\mathrm{L}_{m,n}^{(\tau)}(\widehat{K}^{(m,1)}(l, l')) -$$
$$- \Delta\,\mathrm{L}_{m,n}^{(\tau)}(\partial\widehat{K}^{(m,2)}(l, l')/\partial l').$$

– элементы матрицы импедансов $\mathbf{Z}$, $I_n^{(N)}$ – приближенное решение интегрального уравнения. Выражения для $\mathrm{L}_{m-n}^{(\tau)}(\partial K^{(2)}(\tau)/\partial\tau)$ и $\mathrm{L}_{m,n}^{(\tau)}(\partial\widehat{K}^{(m,2)}(l, l')/\partial l')$ определяются аналитически:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{L}_{m-n}^{(\tau)}(\partial K^{(1)}(\tau)/\partial\tau) = K^{(1)}(\Delta(m-n) + \Delta/2) -\\
&- K^{(1)}(\Delta(m-n) - \Delta/2),\\
&\mathrm{L}_{m,n}^{(\tau)}(\partial\widehat{K}^{(m,2)}(l, l')/\partial l') =\\
&= \widehat{K}^{(m,2)}(l, l'_{n+1}) - \widehat{K}^{(m,2)}(l, l'_n).
\end{aligned} \tag{25}$$

Как видно из (25), в случае численного решения ИУ (20) данный метод регуляризирует ядра $K^{(i)}(\tau)$ малым параметром $\Delta/2$. Для численного интегрирования в $Z_{m,n}$ можно использовать различные квадратурные формулы.

Обоснование сходимости метода решения для СИУ представлено в [13]. Следует отметить, что при численном решении (18) на минимальную длину сегмента Δ накладывается ограничение $\Delta > 4\varsigma$ [7]. В случае его невыполнения матрица импедансов $\mathbf{Z}$ становится плохо обусловленной, а в рассчитанных распределениях тока появляются «нефизичные» быстро осциллирующие компоненты. Для СИУ данное ограничение снимается.

Особого внимания заслуживает тот факт, что в ядрах интегральных уравнений спиральной структуры связь между переменными l и l' представлена в явном виде: $l - l'$, поэтому сложность построения матрицы импедансов $\mathbf{Z}$ пропорциональна числу сегментов N, а не N^2, как в случае неявной связи между l и l'. Это существенно сокращает затраты машинного времени.

Вместе с тем подобное свойство имеют ядра ИУ вибратора и круговой рамки, которые можно назвать ключевыми в антенной технике, а также разомкнутое кольцо – наряду со спиралью, которая образует элемент киральных структур [14], активно исследуемых в последнее время.

Если рассмотреть уравнения (18) и (21), не учитывая бесконечно протяженную идеально проводящую плоскость, то при $a = 0$, $h \to 0$ либо $h \to \infty$ (18) переходит соответственно в ИУ Поклингтона, а (20) в ИУ полоскового вибратора. При $h = 0$, $\xi l \in [0; 2\pi]$ уравнения (18) и (21) описывают кольцевые структуры, а при $0 < \xi l < 2\pi$ – разомкнутые кольца.

5. Результаты численного моделирования

В качестве объекта численного моделирования была выбрана спираль, представленная на рис. 2. Антенна разбивалась на 150 сегментов. Точка питания располагалась вблизи экрана.

На рис. 3, *а* показано распределение тока при $a = 0.1\lambda$, рассчитанное с помощью СИУ (21), на рис. 3, *б* – сравнение амплитуд $|I(t)|$ и $|\hat{I}(t)|$ при

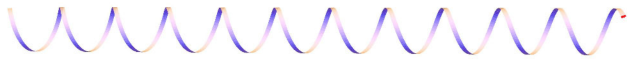

Рис. 2. Геометрия исследуемой спирали

расчетах с помощью ИУ (18) и СИУ (21) соответственно.

Как видно из рисунков, распределение тока носит характер бегущей волны, которая испытывает ослабление при распространении по спирали. Решения СИУ (18) и ИУ (21) практически не отличаются.

На рис. 4, *а* показано распределение тока при $a = 0.133\lambda$, рассчитанное с помощью СИУ (21), на рис. 4, *б* – сравнение амплитуд при расчетах с помощью ИУ (18) и СИУ (21). Бегущая волна тока затухает быстрее, чем в случае $a = 0.1\lambda$, и уже при $l = 4\lambda$ имеет незначительную интенсивность. Решения ИУ (18) и СИУ (21) совпадают еще сильнее. На свободном конце спирали образуется небольшая область с преобладанием стоячей волны.

И наконец, на рис. 5 показаны распределения тока при $a = 0.08\lambda$. Распределение тока имеет характер стоячей волны, причем пучности приобретают приблизительно одинаковую амплитуду. В решениях ИУ (18) и СИУ (21) появляется заметное отличие.

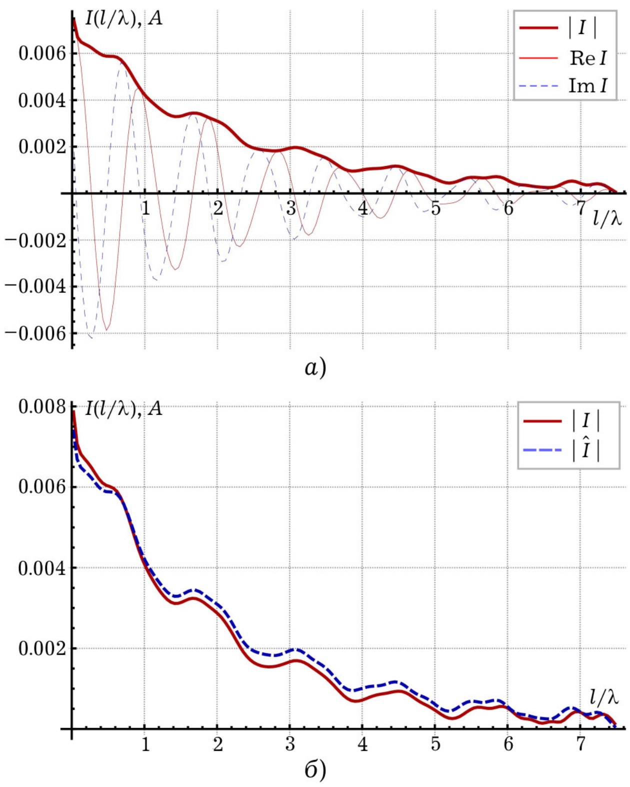

Рис. 3. Распределение тока по спирали при $a = 0.1\lambda$

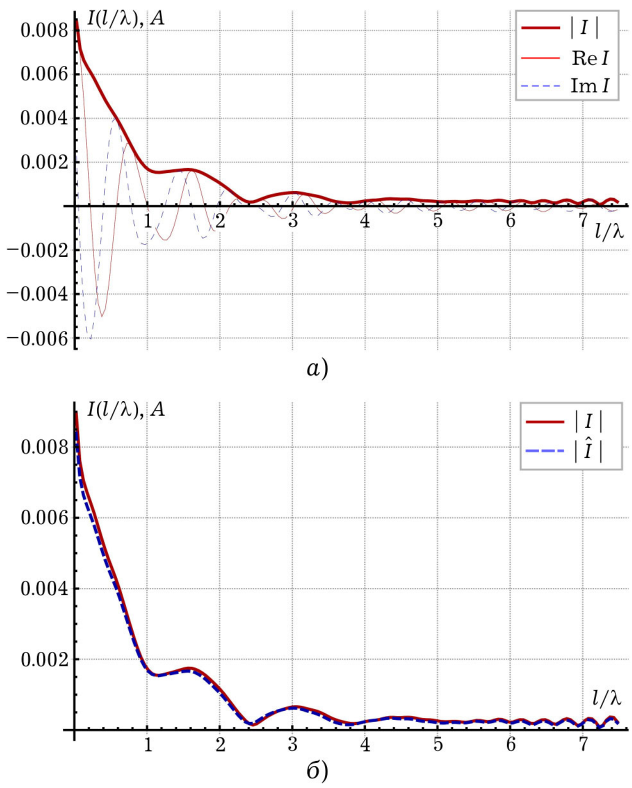

Рис. 4. Распределение тока по спирали при $a = 0.133\lambda$

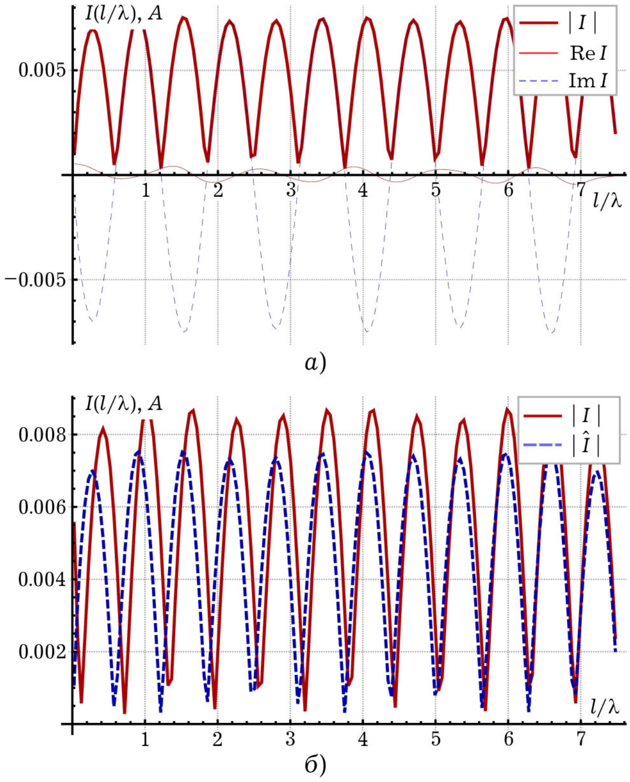

Рис. 5. Распределение тока по спирали при $a = 0.08\lambda$

Заключение

Таким образом, в статье представлены две физические модели спиральной антенны, расположенной над идеально проводящей плоскостью. Построены интегральные уравнения, соответствующие этим моделям. Приведен общий метод численного решения интегральных уравнений, обладающий регуляризирующим свойством в случае решения сингулярного интегрального уравнения. Выполнен сравнительный расчет распределений тока. Результаты расчетов совпадают с представлениями, данными в рамках приближенной теории.

Показано, что переменные l и l' в функциях $K^{(1,2)}(l,l')$ и $\widehat{K}^{(1,2)}(l,l')$ имеют простую связь, позволяющую использовать эффективные алгоритмы расчета матрицы импедансов, что может быть полезным при электродинамическом анализе более сложных структур, построенных на основе рассмотренных спиралей.

Вместе с тем приведенные интегральные уравнения можно считать своего рода обобщением: они позволяют анализировать не только спирали, но и другие излучатели – вибраторы, кольцевые рамки, являющиеся классическими объектами исследования теории антенн, а также разомкнутые кольца, рассматриваемые в качестве ключевого элемента некоторых метаструктур с киральными свойствами.

Список литературы

1. Драбкин А.Л., Зузенко В.Л., Кислов А.Г. Антенно-фидерные устройства. Изд. 2-ое, доп. и перераб. М.: Сов. радио, 1974. 536 с.
2. Юрцев О.А., Рунов А.В., Казарин А.Н. Спиральные антенны. М.: Сов. радио, 1974. 223 с.
3. Сверхширокополосные антенны / пер. с англ. под ред. Л.С. Бененсона. М.: Мир, 1968. 416 с.
4. Рамсей В. Частотнонезависимые антенны. М.: Мир, 1968. 176 с.
5. Adekola S., Mowete A., Ayorinde A. Compact theory of the broadband elliptical helical antenna // European Journal of Scientific Researsh. 2009. Vol. 31. № 3. P. 446–490.
6. Mei K.K. On the integral equations of thin wire antennas // IEEE Trans. on Ant. and Prop. 1965. AP-13. P. 374–378.
7. Стрижков В.А. Математическое моделирование электродинамических процессов в проволочных антенных системах // Математическое моделирование. 1989. Т. 1. № 8. С. 127–138.
8. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
9. Неганов В.А., Табаков Д.П. Применение теории сингулярных интегральных уравнений к электродинамическому анализу цилиндрической спиральной антенны // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2009. Т. 12. № 2. С. 20–29.
10. Неганов В.А. Физическая регуляризация некорректных задач электродинамики. М.: Сайнс-Пресс, 2008. 450 с.
11. Шарипов Р.А. Курс дифференциальной геометрии: учебное пособие для вузов. Уфа: Башкирский университет, 1996. 211 с.
12. Вычислительные методы в электродинамике / под ред. Р. Митры; пер с англ. под ред. Э.Л. Бурштейна. М.: Мир, 1977. 487 с.
13. Лифанов И.К. Особые интегральные уравнения и методы их численного решения: учебное пособие по курсу лекций. М.: МАКС-Пресс, 2006. 68 с.
14. Неганов В.А., Осипов О.В. Отражающие, волноведущие и излучающие структуры с киральными элементами. М.: Радио и связь, 2006. 280 с.

Mathematical models of cylindrical spiral antenna

V.A. Neganov, D.P. Tabakov

In this article the cylindrical spiral antenna with a linear winding pitch that is placed over the perfectly conductive surface is considered. It was shown that with such statement this problem of current's distribution in a spiral is reduced to a solving of a singular integral equation. To compare a mathematical model of spiral antenna for the thin wire approach was represented. The algorithm of integral equations is considered. The comparative analysis of the current's distribution in a spiral is performed.

Keywords: spiral antenna, singular integral equation, thin wire approach, correct physical model.