2013 г. Том 16, № 2
Физика волновых процессов и радиотехнические системы

УДК 621.373.12: 519.62

Численный анализ автоколебаний активного фрактального осциллятора

В.В. Зайцев, Ар.В. Карлов, Д.Б. Нураев

Самарский государственный университет
443011, Российская Федерация, г. Самара
ул. Ак. Павлова, 1

Разработана численная модель автоколебательной системы с дифференциальным уравнением движения дробного порядка. Приведены результаты моделирования процесса установления автоколебаний. Они сопоставлены с приближенными аналитическими результатами, полученными в квазигармоническом приближении.

Ключевые слова: дробная динамика, численные модели, автоколебательные системы, фрактальные осцилляторы, гармоническая линеаризация.

Введение

В последнее время под влиянием возросшего интереса к естественнонаучным приложениям [1; 2] теории дробного интегродифференцирования [3] формируется новый раздел динамики – дробная динамика, или в англоязычном варианте – фрактальная динамика (fractional dynamics) [4]. Он охватывает исследования систем с интегродифференциальными уравнениями движения дробного порядка. Среди них одно из центральных мест, несомненно, принадлежит автоколебательным системам с фрактальными связями – активным фрактальным осцилляторам.

В работе [5] на основе схемы радиоэлектронного автогенератора с дробной цепью обратной связи введена в рассмотрение модель активного фрактального осциллятора (АФО). Предложенная нелинейная динамическая система исследована методом эквивалентной (гармонической) линеаризации. В статье автоколебания фрактального осциллятора исследуются методом численного интегрирования его уравнений движения.

1. Дифференциальная модель осциллятора

Физический прототип АФО подробно описан в статье [5]. Показано, что математически он определяется дифференциальным уравнением движения относительно нормированной осциллирующей переменной $x(t)$, содержащим производную дробного порядка $0 < \alpha < 1$:

$$\mathbf{L}_t^2 x(t) = \gamma \omega_0^{2-\alpha} \mathbf{D}_t^\alpha g\left(x(t)\right). \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{L}_t^2$ – оператор квазигармонического осциллятора с собственной частотой ω_0 и добротностью Q:

$$\mathbf{L}_t^2 = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{d}{dt} + \omega_0^2;$$

$\mathbf{D}_t^\alpha$ – оператор дифференцирования Капуто порядка α:

$$\mathbf{D}_t^\alpha(.) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{(.)'_\tau}{(t-\tau)^\alpha} d\tau;$$

$g(x)$ – нормированная передаточная функция активной нелинейности в цепи обратной связи; $\Gamma(.)$ – гамма-функция; γ – параметр глубины обратной связи. Предполагается также, что АФО возбуждается из нулевого состояния через флуктуацию производной: $x(0) = 0$, $y(0) = x'(0) = y_0$.

Отметим, что система (1) с кубической нелинейностью, например,

$$g(x) = \left(1 - \frac{4}{3}x^2\right)x \tag{2}$$

в пределе $\alpha \to 1$ переходит в классический осциллятор Ван дер Поля.

Предполагая в дальнейшем численное интегрирование уравнений движения, проведем в (1) нормировку времени путем перехода $t \to \omega_0 t$. Сохранив для временного аргумента прежнее обозначение, получим

$$\mathbf{L}_t^2 x(t) = \gamma \mathbf{D}_t^\alpha g\left(x(t)\right). \tag{3}$$

Уравнение (3) примем за основу разностной модели АФО.

2. Разностная модель осциллятора

Определив сетку дискретного времени $t_n = n\Delta$, аппроксимируем дробную производную Капуто конечными разностями:

$$\mathbf{D}_t^{\alpha} f(t)\Big|_{n\Delta} =$$
$$= \frac{1}{\Delta^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=1}^{n} \big(f(k\Delta) - f((k-1)\Delta)\big) \times \tag{4}$$
$$\times \left((n-k+1)^{1-\alpha} - (n-k)^{1-\alpha}\right) + O(\Delta^2).$$

Второму порядку погрешности в (3) соответствует аппроксимация дифференциального оператора $\mathbf{L}_t^2$ по методу Хойна (двухэтапному методу Рунге – Кутта; см., например, [6]). Введем обозначения $x_n = x(n\Delta)$, $y_n = x'(n\Delta)$ для приближенных решений в момент времени $t_n = n\Delta$ и

$$D_n^{\alpha}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Delta^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=1}^{n} \big(g(x[k]) - g(x[k-1])\big) \times \tag{5}$$
$$\times \left((n-k+1)^{1-\alpha} - (n-k)^{1-\alpha}\right)$$

для приближения дробной производной (4). В этих обозначениях разностный алгоритм интегрирования задачи Коши для дифференциального уравнения (3) имеет вид

$$\begin{aligned}
&k_{1x} = y_n, \\
&k_{1y} = -x_n - \frac{1}{Q} y_n + \gamma D_n^{\alpha}(\mathbf{x}), \\
&k_{2x} = y_n + k_{1y}\Delta, \\
&x_{n+1} = x_n + \frac{\Delta}{2}(k_{1x} + k_{2x}), \\
&k_{2y} = -\left(x_n + k_{1x}\Delta\right) - \frac{1}{Q}\left(y_n + k_{1y}\Delta\right) + \gamma D_{n+1}^{\alpha}(\mathbf{x}), \\
&y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta}{2}\left(k_{1y} + k_{2y}\right), \\
&n = 0,1,2,...; \quad x_0 = 0, \quad y_0 = a, \quad D_0^{\alpha}(\mathbf{x}) = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Явный алгоритм второго порядка точности (6) определяет разностную модель АФО.

3. Результаты моделирования

Результаты моделирования процесса установления автоколебаний АФО по алгоритму (6) с шагом $\Delta = 0.15$ иллюстрируют приведенные ниже рисунки.

На рис. 1 сплошной линией представлен график изменения огибающей $A(n\Delta)$ автоколебаний $x(n\Delta)$ осциллятора с нелинейностью (2) и параметрами $\alpha = 0.5$, $Q = 10$, $\gamma = 0.25$. Временной аргумент нормирован на собственный период $T_0 = 2\pi$ контура в системе (3). Комплексная огибающая выделялась по методу аналитического сигнала с предварительной фильтрацией высших гармоник автоколебаний.

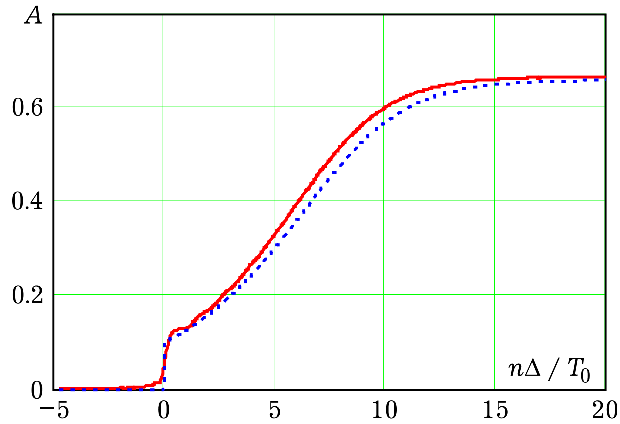

Рис. 1. Установление огибающей автоколебаний

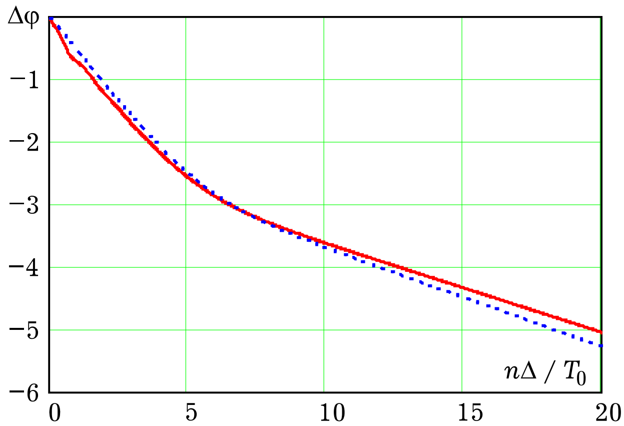

Рис. 2. Набег фазы автоколебаний

Пунктирной линией на рис. 1 показан график изменения огибающей, рассчитанный интегрированием первого из укороченных уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{dA}{dt} = -\frac{A}{2}\left(\frac{1}{Q} - \gamma\left(1 - A^2\right)\sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)\right), \\
&\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{2}\gamma\left(1 - A^2\right)\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right),
\end{aligned} \tag{7}$$

полученных в [5] методом эквивалентной линеаризации (МЭЛ).

На рис. 2 пунктирной линией показан график набега фазы $\Delta\varphi(t) = \varphi(t) - \varphi(0)$ автоколебаний АФО, построенный по решению второго укороченного уравнения (7). График набега фазы автоколебаний $x(n\Delta)$ в разностной модели АФО (6) изображен на рисунке непрерывной линией.

Из сопоставления представленных и аналогичных им численных и приближенных аналитических результатов следует, что МЭЛ при

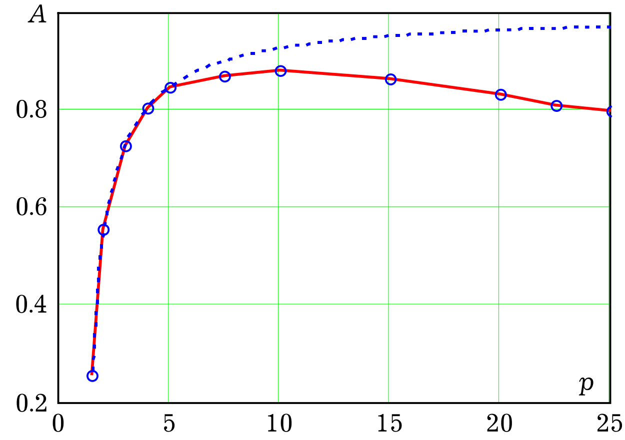

Рис. 3. Зависимость амплитуды автоколебаний от параметра возбуждения

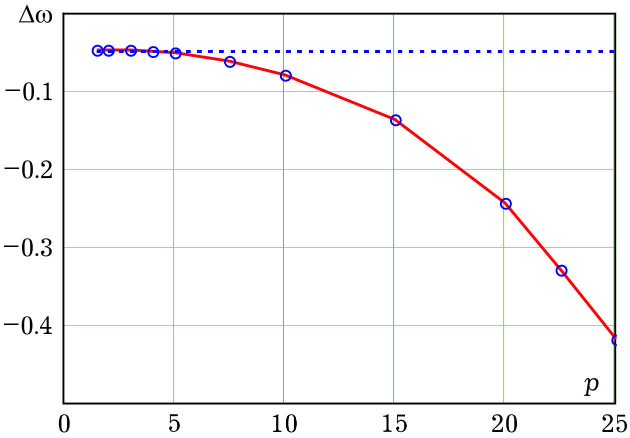

Рис. 4. Зависимость поправки на частоту автоколебаний от параметра возбуждения

умеренных уровнях возбуждения ($\gamma Q < 5$) вполне применим для анализа АФО в широком диапазоне их параметров: $\alpha > 0.25$ и $Q > 10$.

В существенно нелинейном режиме возбуждения ($\gamma Q > 10$) целесообразно использовать численную модель (6), т. к. МЭЛ в этом случае дает завышенные значения амплитуды. Этот факт отражает рис. 3, на котором приведены зависимости амплитуды установившихся автоколебаний от параметра возбуждения $p = \gamma Q$ для АФО с $\alpha = 0.5$ и $Q = 10$. Пунктирная линия соответствует результатам МЭЛ, а непрерывная – результатам численного моделирования. В то время как зависимость $A = A(p)$ в МЭЛ с ростом p выходит на насыщение, результаты численного моделирования демонстрируют некоторое уменьшение амплитуды первой гармоники, что объясняется перекачкой энергии в высшие гармоники автоколебаний – эффектом, учтенным в численной модели и не учтенным в МЭЛ. Известно [7], что обогащение спектра автоколебаний гармониками основной частоты приводит к понижению частоты генерации и возникновению у автоколебательной системы свойства неизохронности. Указанное явление иллюстрирует рис. 4 с приведенными на нем графиками зависимости поправки на частоту $\Delta\omega = \varphi'(t)$ установившихся автоколебаний, рассчитанными в приближении МЭЛ (пунктирная линия) и в рамках численной модели (6).

Заключение

Представленный здесь численный алгоритм расширяет возможности математического моделирования активных фрактальных осцилляторов и позволяет установить пределы применимости приближенных аналитических методов моделирования.

Список литературы

1. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
2. Тарасов В.Е. Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка. М.; Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2011. 568 с.
3. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
4. Zaslavsky G.M. Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics. Oxford: Oxford University Press, 2005 = Заславский Г.М. Гамильтонов хаос и фрактальная динамика. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2010. 472 с.
5. Зайцев В.В., Карлов Ар.В., Яровой Г.П. Динамика автоколебаний дробного томсоновского осциллятора // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2012. Т. 15. № 1. С. 64–68.
6. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986. 288 с.
7. Конторович М.И. Нелинейные колебания в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1973. 320 с.

Numerical analysis of self-oscillations fractional active oscillator

V.V. Zaitsev, Ar.V. Karlov, D.B. Nuraev

A numerical model of self-oscillating system with a differential equation of motion of fractional order is designed. The results of modeling transient process of self-oscillations are presented. There compare with the analytical results are obtained in the quasi-harmonic approximation.

Keywords: fractional dynamics, numerical models, self-oscillations systems, fractional oscillators, harmonic linearization.