

## Плазмон-поляритонные волны в цилиндрических направляющих структурах

В.А. Малахов, К.В. Попков, А.С. Раевский

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева  
603950, Российская Федерация, г. Нижний Новгород  
ул. Минина, 24

В статье представлены результаты решений дисперсионных уравнений плазмон-поляритонных волн, распространяющихся в круглом металлическом наностержне и круглом диэлектрическом волноводе с металлической пленкой. Приведены распределения зависимостей у указанных волн компоненты электрического поля  $E_z$  от радиальной координаты. Представлен сравнительный анализ характеристик существующих в рассмотренных электродинамических структурах плазмон-поляритонных волн. Результаты получены с учетом реальных свойств металлов в оптическом диапазоне.

*Ключевые слова:* плазмон-поляритонные волны, цилиндрические направляющие структуры, круглый металлический наностержень.

Известно [1], что поверхностные плазмон-поляритонные волны (ПППВ) могут возникать на границе сред, имеющих противоположные по знаку значения диэлектрических проницаемостей. Важным признаком этих волн является то, что они должны обязательно обладать продольной составляющей вектора напряженности электрического поля, максимум которой находится на границе раздела сред. Их также отличает отсутствие продольной составляющей напряженности магнитного поля, то есть это волны Е-типа (или ТМ-волны). Известно также [1], что благородные металлы обладают отрицательной действительной частью диэлектрической проницаемости на частотах ниже частоты плазмонного резонанса. Достаточно много работ посвящено исследованию характеристик ПППВ, возникающих в направляющих наноструктурах, и использованию их свойств в различных функциональных устройствах, таких как сенсоры [2], элементы интегральных схем [3], оптические модуляторы и переключатели [4; 5], элементы интерферометров [6].

Хорошо изучены свойства ПППВ в планарных многослойных структурах с металлическими нанопленками [7; 8]. В настоящей работе приведены результаты исследований свойств волн, по видимому, имеющих сходное происхождение, в цилиндрических направляющих структурах: круглый металлический наностержень (рис. 1, а) и круглый диэлектрический волновод с металли-

ческой нанопленкой (рис. 1, б). Такие структуры могут быть использованы, например, в качестве элементов наносенсоров и наноантенн [9; 10]. Однако, как будет показано в статье, исследование полей указанных волн приводит к выводу, что их следует называть просто плазмон-поляритонными волнами (ППВ), не употребляя к ним термин «поверхностные».

Спецификой данной работы, как и некоторых прежних работ авторов статьи по данной тематике [11; 12], является то, что исследование ПППВ производится с учетом реальных свойств металлов в оптическом диапазоне, что является строгим подходом к решению задачи и вскрывает многие принципиальные физические результаты.

Известно [1; 13], что диэлектрическая проницаемость благородных металлов в оптическом диапазоне является комплексной величиной:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_r(\omega) + i\varepsilon_i(\omega) \quad (1)$$

Частотные зависимости действительной и мнимой частей диэлектрической проницаемости благородных металлов в оптическом диапазоне в соответствии с теорией Друде – Зоммерфельда записываются следующим образом [1; 13]:

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_{r0} - \omega_p^2 / \omega^2; \quad (2)$$

$$\varepsilon_i(\omega) = \varepsilon_{i0} + \Gamma \omega_p^2 / \omega^3, \quad (3)$$

где  $\omega_p = \sqrt{4\pi n_e e^2 / m_e} \approx 1.43 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$  – плазменная частота электронного газа;  $\varepsilon_{r0}$  – константа,

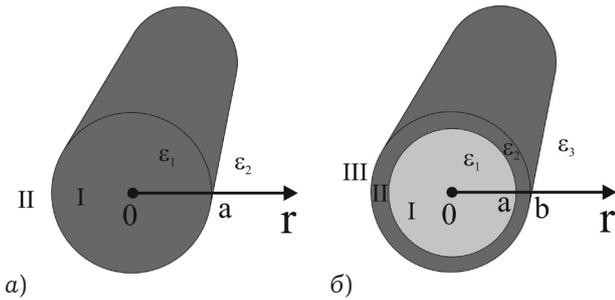


Рис. 1

учитывающая межзонные переходы в металле, обычно варьируется от 1 до 10;  $\Gamma$  – коэффициент затухания, учитывающий радиационные потери ( $\Gamma \approx 10^{14} \text{ с}^{-1}$ ),  $\varepsilon_{i0} = 0$ .

Одним из авторов данной статьи был разработан метод нахождения комплексных решений трансцендентных уравнений [14], основанный на известном из теории функции комплексного переменного методе вариации фазы [15]. Позднее авторами статьи был разработан комбинированный метод поиска комплексных корней трансцендентных уравнений [16], сочетающий в себе положительные качества метода вариации фазы и метода Мюллера [17]. Комбинированный метод позволяет использовать быстроту нахождения комплексных корней методом Мюллера и однозначность идентификации комплексного корня методом вариации фазы. Суть комбинированного метода состоит в том, что комплексная плоскость поиска решения разбивается на небольшие подобласти, в которых методом вариации фазы определяется наличие корня, а потом методом Мюллера этот корень уточняется. Либо сначала методом Мюллера находится решение, а потом методом вариации фазы подтверждается истинность найденного решения.

Рассмотрим круглый металлический наностержень (рис. 1, а). Дисперсионное уравнение для такой структуры выглядит следующим образом:

$$\frac{\varepsilon_1 J_0'(\alpha_1 a)}{\alpha_1 J_0(\alpha_1 a)} - \frac{\varepsilon_2 H_0^{(2)}(\alpha_2 a)}{\alpha_2 H_0^{(2)}(\alpha_2 a)} = 0, \quad (4)$$

где  $J_0$  – функция Бесселя;  $H_0^{(2)}$  – функция Ханкеля 2-го рода;  $\alpha_{1,2}$  – поперечные волновые числа первой и второй, которые связаны с продольным волновым числом  $\beta = \beta_1 + i\beta_2$  соотношением

$$\varepsilon_{1,2} \mu_{1,2} \omega^2 = \alpha_{1,2}^2 + \beta^2. \quad (5)$$

Как известно [1], в металлической нанопроволоке ППВ существуют на частотах ниже частоты плазмонного резонанса. Выше этой частоты

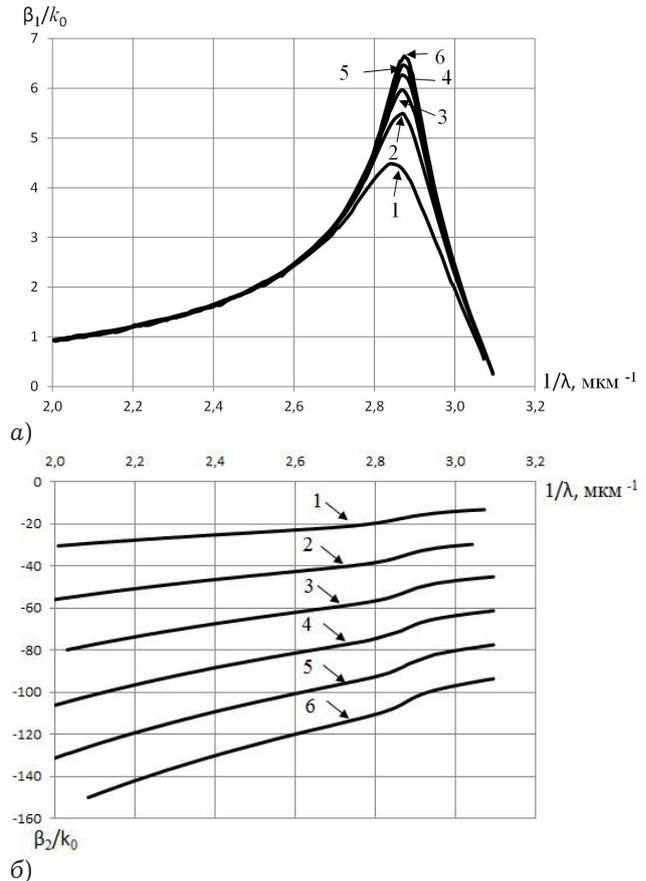


Рис. 2

металл по своим свойствам близок к обычному диэлектрику. При этом в рассматриваемой структуре существуют обычные поверхностные волны. Из дисперсионного уравнения (4) могут быть найдены волновые числа волн электрического типа  $E_{0m}$ . Особенностью решения уравнения (4) для ППВ является то, что в результате расчета обнаруживается бесконечное множество волн, отличающихся друг от друга степенью замедления и затуханием. На рис. 2, а приведены дисперсионные характеристики первых шести ППВ, а на рис. 2, б – характеристики затухания. Индексы для характеристик ППВ проставлены по порядку увеличения затухания, что также соответствует и порядку увеличения замедления. Чем больше порядковый номер волны, тем больше ее затухание и коэффициент замедления. Важной особенностью дисперсионных характеристик ППВ, рассчитанных при учете потерь в металле, является то, что коэффициент замедления имеет характерный максимум, а не стремится к бесконечности, как при неучете потерь [1]. Характеристики приведены для следующих параметров круглого металлического наностержня:  $a = 10 \text{ нм}$ , константа для комплексной диэлектрической проницаемости

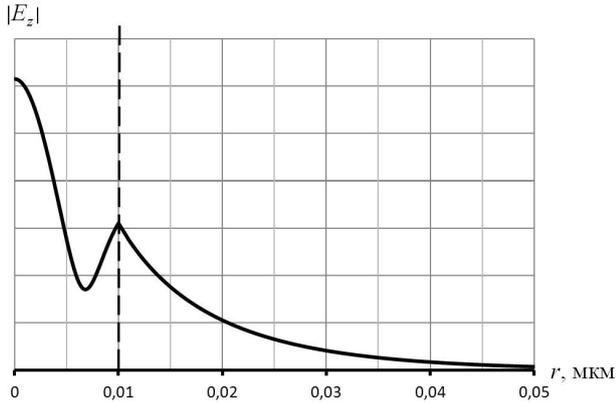


Рис. 3

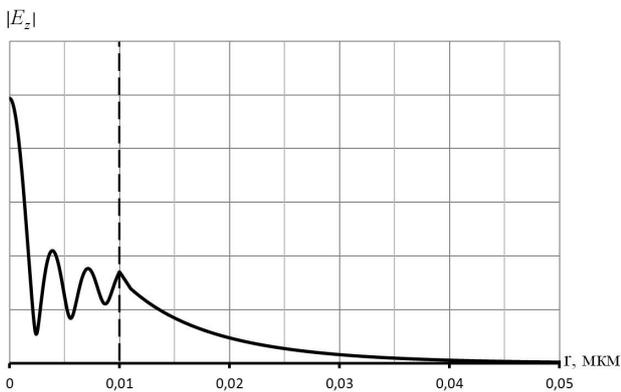


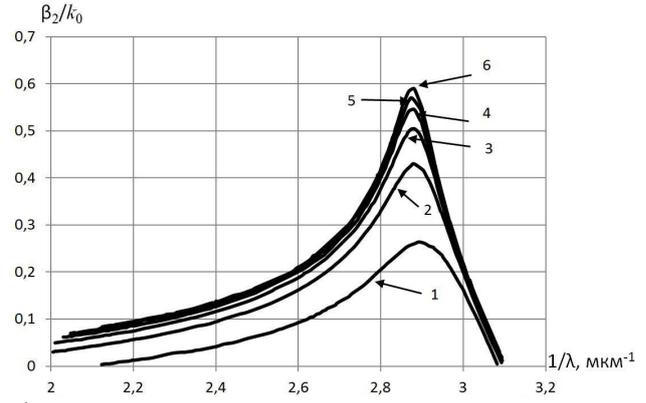
Рис. 4

металла –  $\epsilon_{r0} = 6$  (материал серебро) [1],  $\epsilon_2 = 1$ ,  $k_0$  – волновое число электромагнитной волны в свободном пространстве. Максимумы дисперсионных характеристик находятся на частоте, для которой выполняется равенство  $|e_1| = |e_2| = 1$ .

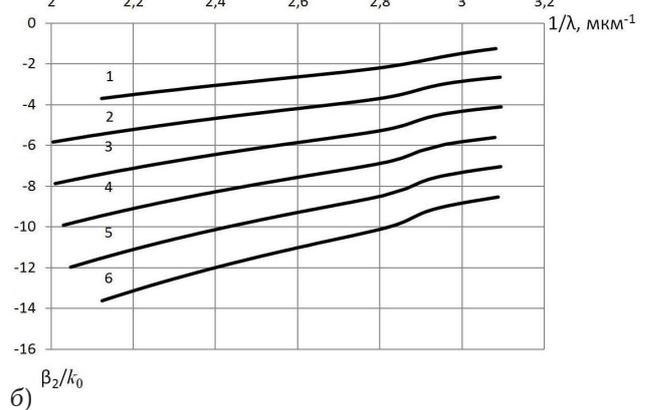
Порядковый номер волны, рис. 2, определяет число вариаций поля в стержне вдоль радиальной координаты: так, для волны с порядковым номером 1 существует один максимум модуля компоненты поля  $|E_z|$  внутри металлического стержня, для волны с номером 2 – два максимума, для волны 3 – три максимума и так далее. Максимум на границе металл-диэлектрик существует для всех волн, что является необходимым признаком ППВ [1].

На рис. 3 изображено распределение модуля компоненты поля  $|E_z|$  от координаты  $r$  для волны с индексом 1 в точке  $1/\lambda \approx 2,9 \text{ мкм}^{-1}$ ,  $\beta_1/k_0 \approx 4,19$ ,  $\beta_2/k_0 \approx -19,5$ , а на рис. 4 – для волны с индексом 3 в точке  $1/\lambda \approx 2,9 \text{ мкм}^{-1}$ ,  $\beta_1/k_0 \approx 5,51$ ,  $\beta_2/k_0 \approx -56,1$ . Общим для ППВ с любым индексом является то, что максимальное значение  $|E_z|$  находится в центре металлического стержня при  $r = 0$ .

С увеличением радиуса металлического стержня замедление уменьшается и ППВ становятся быстрыми. На рис. 5, а приведены дисперсионные характеристики, а на рис. 5, б –



а)



б)

Рис. 5

характеристики затухания шести первых ППВ для металлического стержня, радиус которого  $a = 110 \text{ нм}$ . Видно, что затухание волн в стержне такого радиуса значительно (почти на порядок) меньше, чем для стержня радиуса  $a = 10 \text{ нм}$ . Отмеченное уменьшение затухания связано, видимо, с тем, что при большем радиусе стержня поле более медленно убывает во внешней среде, то есть в меньшей степени сконцентрировано в металле, материал которого обладает потерями.

На рис. 6 для примера приведено распределение модуля компоненты поля  $|E_z|$  от координаты  $r$  для волны с индексом 1 в точке  $1/\lambda \approx 2,9 \text{ мкм}^{-1}$ ;  $\beta_1/k_0 \approx 0,26$ ;  $\beta_2/k_0 \approx -1,83$ .

Рассмотрим спектр ППВ в диэлектрическом волноводе с металлической нанопленкой, рис. 1, б.

Для данной электродинамической структуры для случая Е-волн ставится краевая задача на уравнении Гельмгольца для продольной составляющей электрического вектора Герца:

$$\Delta \Pi_z^e + \epsilon \mu \omega^2 \Pi_z^e = 0. \tag{6}$$

Решения уравнения Гельмгольца для каждой из трех областей запишем в виде:

I область (диэлектрический стержень)

$$\Pi_{z1}^e = A_1 J_0(\alpha_1 r) e^{-i\beta z}; \tag{7}$$

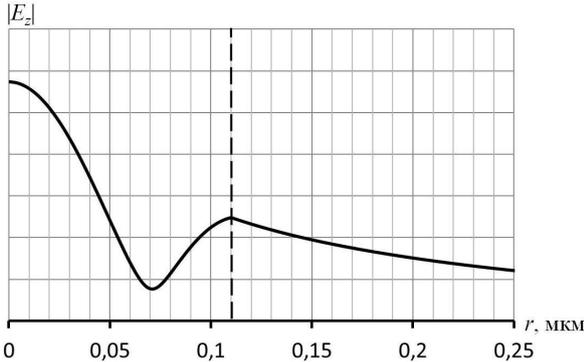


Рис. 6

II область (металлическая пленка)

$$P_{z2}^e = [A_2 J_0(\alpha_2 r) + B_2 Y_0(\alpha_2 r)] e^{-i\beta z}; \quad (8)$$

III область (внешняя бесконечная среда)

$$P_{z3}^e = A_3 H_0^{(2)}(\alpha_3 r) e^{-i\beta z}, \quad (9)$$

где  $\alpha_{1,2,3}$  – поперечные волновые числа первой, второй и третьей областей, которые связаны с продольным волновым числом  $\beta$  соотношением:

$$\varepsilon_{1,2,3} \mu_{1,2,3} \omega^2 = \alpha_{1,2,3}^2 + \beta^2; \quad (10)$$

$J_0, Y_0$  – функции Бесселя первого и второго рода;  $H_0^{(2)}$  – функции Ханкеля второго рода. Для второй области (нанопленка) диэлектрическая проницаемость металла на оптических частотах рассчитывается по формулам (1)–(3).

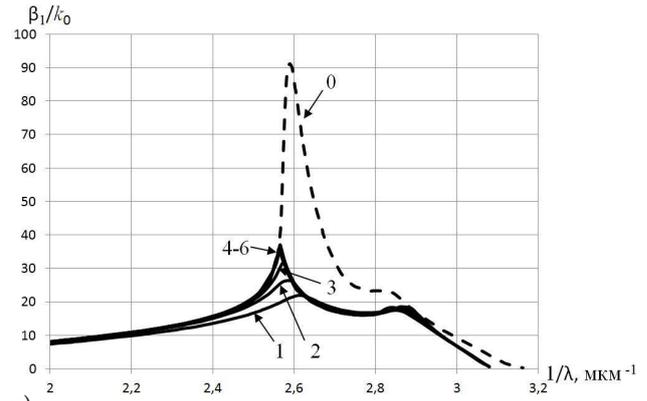
Выражаем тангенциальные компоненты электрического и магнитного полей через вектора Герца и подставляем их в граничные условия:

$$E_{z1}|_{r=a} = E_{z2}|_{r=a}; \quad H_{\phi 1}|_{r=a} = H_{\phi 2}|_{r=a};$$

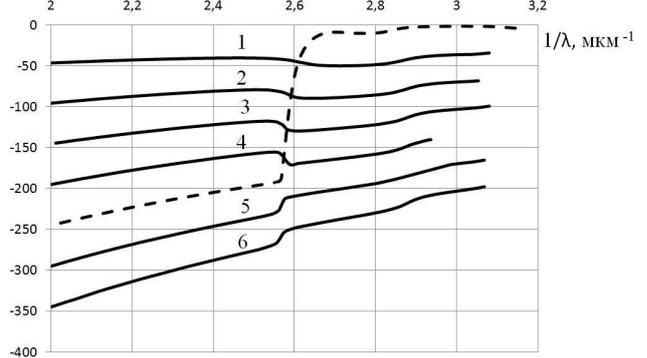
$$E_{z2}|_{r=b} = E_{z3}|_{r=b}; \quad H_{\phi 2}|_{r=b} = H_{\phi 3}|_{r=b}.$$

В результате образуется система из четырех линейных уравнений относительно неизвестных амплитудных коэффициентов  $A_1, A_2, B_2, A_3$ . Дисперсионное уравнение получается из условия нетривиальности решения системы. Дисперсионное уравнение решаем совместно с соотношениями, связывающими волновые числа (10).

На рис. 7, а приведены дисперсионные характеристики, а на рис. 7, б – характеристики затухания ППВ в диэлектрическом стержне с металлической нанопленкой:  $a = 5$  нм,  $b = 10$  нм,  $\varepsilon_1 = 2.84$ ,  $\varepsilon_3 = 1$ , для нанопленки  $\varepsilon_{r0} = 6$  (материал серебро), соотношение размеров слоев составляет  $(b - a) / b = 0.5$ . Внешний радиус структуры выбран равным радиусу сплошного металлического стержня, характеристики ППВ которого приведены на рис. 2, а, б. Характеристики, обозначенные цифрами от 1 до 6, соответствуют



а)



б)

Рис. 7

характеристикам плазмон-поляритонных волн металлического стержня с номерами 1–6, рис. 2. Для этих волн, так же как и для аналогичных волн круглого металлического наностержня, существует связь между номером волны и количеством максимумов модуля компоненты поля  $|E_z|$  в металлическом слое. Для первой волны имеется один максимум в металлическом слое, для второй – два и так далее.

На рис. 8 приведено распределение модуля компоненты поля  $|E_z|$  для волны с индексом 3 для структуры с указанными выше параметрами. Видно, что в металлическом слое существуют три максимума  $|E_z|$  ППВ с номером –3, то есть связь между номером волны и количеством максимумов сохраняется.

Кроме рассмотренных волн, существующих в однородном металлическом наностержне, в структуре с диэлектрическим внутренним слоем существует волна, дисперсионная характеристика которой изображена пунктиром. Эта волна условно обозначена нулевым индексом. Максимальное замедление этой волны больше замедления волн с индексами 1, 2, 3... Большой максимум дисперсионной характеристики ППВ с нулевым порядком, рис. 7, а, расположен на частоте, на которой  $|\varepsilon_2| = |\varepsilon_1| = 2.84$ , а меньший максимум – на частоте, когда  $|\varepsilon_2| = |\varepsilon_3| = 1$ .

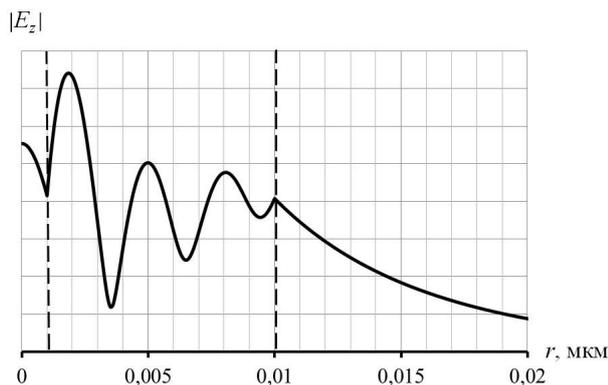


Рис. 8

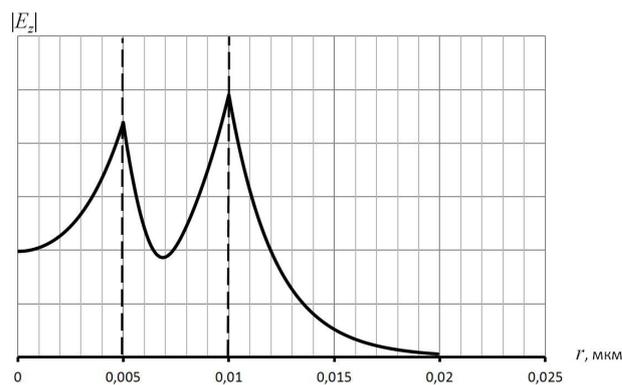


Рис. 9

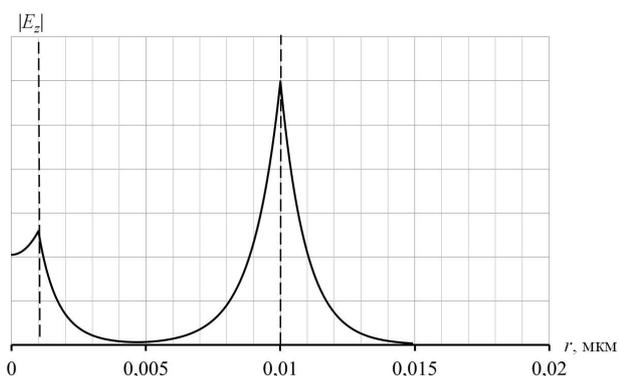


Рис. 10

На рис. 9 приведено распределение модуля компоненты электрического поля  $|E_z|$  вдоль координаты  $r$  волны с индексом  $-0$  для указанных параметров. Видно, что максимумы электрического поля этой волны привязаны к границам металлического слоя аналогично волнам в плоской металлической пленке [18]. Внутри металлического слоя максимумы поля отсутствуют.

При увеличении толщины металлического слоя при постоянном внешнем радиусе  $b$  затухание волны с индексом  $0$  увеличивается, а максимум дисперсионной характеристики растет, затухание ППВ с индексами  $1-6$  уменьшается, как и, соответственно, величина максимумов дисперсионных характеристик.

На рис. 10 приведено распределение модуля компоненты электрического поля  $|E_z|$  вдоль координаты,  $r$  волны с индексом  $-0$ , для структуры, имеющей следующие параметры:  $a = 1$  нм,  $b = 10$  нм,  $\epsilon_1 = 2.84$ ,  $\epsilon_3 = 1$ , для нанопленки  $\epsilon_{r0} = 6$ ,  $1/\lambda \approx 2,9$  мкм $^{-1}$ , соотношение размеров слоев составляет  $(b - a) / b = 0,9$ .

При уменьшении толщины пленки максимум дисперсионной характеристики волны с индексом  $0$  уменьшается, а максимумы дисперсионных характеристик ППВ с индексами  $1-6$  увеличиваются, дисперсионные характеристики всех ППВ начинают сближаться и при соотношении

размеров слоев  $(b - a) / b < 0,1$  практически сливаются. Затухание волны с индексом  $0$  уменьшается, а затухание ППВ с индексами  $1-6$  увеличивается. Характеристики затухания всех ППВ расходятся. Фактически можно говорить о том, что в диэлектрическом волноводе с металлической пленкой очень малой толщины преобладает одна ППВ, имеющая индекс  $0$ . Существованием других волн можно пренебречь в связи с их большим затуханием.

При сравнении характеристик дисперсии и затухания ППВ круглого металлического наностержня (рис. 2) и характеристики ППВ круглого диэлектрического волновода с металлической нанопленкой (рис. 7) можно утверждать, что в металлическом стержне в отличие от диэлектрического волновода с металлической пленкой отсутствует волна с номером  $-0$ , а существуют только волны с номерами  $1-6$  и выше. Плазмон-поляритонную волну с нулевым индексом можно идентифицировать как «пленочную» (максимумы поля привязаны к краям пленки), а волны с номерами  $1, 2, 3$  и т. д. как объемные, дополнительные (максимум поля расположены внутри объема электродинамических структур).

## Список литературы

1. Климов В.В. Наноплазмоника. М.: Физматлит, 2010. 480 с.
2. Sahin Kaya Cizdemir, Gцnyl Turhan-Sayan. Temperature effects on surface plasmon resonance: design considerations for an optical temperature sensor // Journal of Lightwave Technology. 2003. V. 21. № 3. P. 805-814.
3. Passive integrated optics elements based on long-range surface plasmon polaritons / R. Charbonneau [et al.] // Journal of Lightwave Technology. 2006. V. 24. № 1. P. 477-494.
4. Nikolajsen T., Leosson K., Bozhevolnyi S.I. Surface plasmon polariton based modulators and switches operating at telecom wavelengths // Applied Physics Letters. 2004. V. 85. P. 5833-5835.

5. Khatir M., Granpayeh N. An ultra compact and high speed magneto-optic surface plasmon switch // *Journal of Lightwave Technology*. V. 31. 2013. № 7. P. 1045–1054.
6. Channel plasmon subwavelength waveguide components including interferometers and ring resonators / S.I. Bozhevolnyi [et al.] // *Nature*. 2006. V. 440. P. 508–511.
7. Terahertz conductivity of thin gold films at the metal-insulator percolation transition / M. Walther [et al.] // *Physical Review B*. 2007. V. 76. № 12. P. 125408–125416.
8. Tamura M., Kagata H. Analysis of metal-insulator-metal structure and its application to sensor // *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 2010. V. 58. № 12. P. 3954–3960.
9. Lu Y.-C., Huang W.-P., Jian S.-S. Influence of mode loss on the feasibility of grating-assisted optical fiber surface plasmon resonance refractive index sensors // *Journal of Lightwave Technology*. 2009. V. 27. № 21. P. 4804–4808.
10. Лерер А.М., Снявский Г.П. Электродинамический анализ наноантенн миллиметрового и оптического диапазонов // *Антенны*. 2011. Вып. 7(170). С. 4–17.
11. Малахов В.А., Попков К.В., Раевский А.С. Комплексные волны в металлической нанопленке на оптических частотах // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*. 2011. Т. 14. № 3. С. 27–30.
12. Малахов В.А., Попков К.В., Раевский А.С. Комплексные волны и комплексный резонанс в структурах с металлическими нанопленками на оптических частотах // *Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева*. 2012. № 1. С. 120–127.
13. Maier S.A. *Plasmonics: Fundamentals and Application*. N.-Y.: Springer Science+Business Media LLC, 2007. 201 p.
14. Раевский А.С. Условия существования комплексных волн в направляющих электродинамических структурах // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*. 1999. Т. 2. № 1.
15. Привалов И.И. *Введение в теорию функции комплексного переменного*. М.: Наука, 1967. 444 с.
16. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2010615410 от 23.08.2010 г. Программа нахождения комплексных решений дисперсионных уравнений. Авторы: Малахов В.А., Раевский А.С.
17. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. *Вычислительные методы*. М.: Изд. дом МЭИ, 2008. 672 с.
18. Поверхностные плазмон-поляритоны с отрицательной и нулевой групповыми скоростями, распространяющиеся по тонким металлическим пленкам / Д.Ю. Федянин [и др.] // *Квантовая электроника*. 2009. Т. 39. № 8. С. 745–750.

---

## Plasmon-polariton waves in cylindrical guiding structures

*V.A. Malakhov, K.V. Popkov, A.S. Raevskii*

In the article dispersion characteristics and attenuation characteristics plasmon-polariton waves cylindrical metal guiding structures are discussed. Schedules of distribution of electric field on radial coordinate are provided. Difference of a range of waves of a cylindrical metal wire from a range of waves of an open round dielectric waveguide with a metal film is shown. Identification of plasmon-polariton waves by quantity of maxima of an electric field in a metal layer is offered.

*Keywords:* plasmon-polariton waves, cylindrical guiding structure, round metal nanorod.

---