2013 г. *Том 16, № 2*

Физика волновых процессов и радиотехнические системы

УДК 534–16

Распространение упругих волн в периодически неоднородной среде

А.В. Данилов, А.А. Радионов

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева
603950, Российская Федерация, г. Нижний Новгород
ул. Минина, 24

Проведен расчет объемных волн в упругой среде с периодически изменяющимися параметрами.
Ключевые слова: физическая акустика, кристаллы.

Введение

В настоящее время при создании СВЧ-радиоаппаратуры широкое распространение получают функциональные узлы (резонаторы, фильтры, линии задержки и т. д. [1–3], выполняемые на основе объемных волн в монокристаллах ниобат лития ($L \cdot Nb \cdot O_3$). Такие узлы обладают малыми габаритами, высокими техническими характеристиками, хорошей сопрягаемостью с другими элементами аппаратуры. При этом структура кристалла обычно полагается идеальной. Однако проведенные исследования [4] показали, что в их спектрах кроме фундаментальных частотных линий всегда присутствуют низкочастотные линии, интенсивность которых в значительной степени зависит от добротности кристаллов. Возникновение этих линий можно объяснить только наличием в реальных кристаллах локальных дефектов, появление которых приводит к тому, что для упругих волн среда становится периодически неоднородной. Решение строгой задачи о распространении объемных акустических волн в пьезокристалле, периодически неоднородной по одной из координат, представляет значительные сложности. Хотя качественную оценку влияния собственных дефектов кристалла ниобат лития на свойства объемных акустических волн мы можем получить, решив задачу о распространении упругой волны в изотропной среде, параметр которой (например, плотность) периодически изменяется в направлении распространения.

1. Постановка задачи о распространении волн в упругой периодически неоднородной среде

Постановка задачи аналогична постановке задачи о распространении плоских электромагнитных волн [5] в периодически неоднородной диэлектрической среде $\varepsilon = \varepsilon(z)$.

Полагаем, что объемная плотность среды является периодической функцией продольной координаты z $\rho = \rho(z)$. При этом для плоских монохроматических упругих волн дифференциальное уравнение относительно амплитуды вектора смещения U_j [6] принимает вид

$$\frac{d^2U_j}{dz^2} + K_{z_j}^2(z)U_j = 0\,, \qquad (1)$$

где U_j – амплитуда вектора смещения; K_{z_j} – волновое число.

Для продольной волны имеем

$$U_j = U_z\,, \quad K_{z_j} = \sqrt{\frac{\rho(z)}{C_{33}}}\omega.$$

Для поперечной (сдвиговой) волны имеем

$$U_j = U_x\,, \quad K_{z_j} = \sqrt{\frac{\rho(z)}{C_{11}}}\omega.$$

где ω – частота волны; C_{11}, C_{44} – диагональные модули тензора упругости кристалла ниобат лития.

Решение уравнения (1) ищем аналогично [5] в виде

$$U_j = e^{\gamma_j z} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{i\frac{\pi m}{d}z}\,, \qquad (2)$$

где d – период функции $\rho(z)$.

Подставляя (2) в (1), получаем:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \left[\gamma_j^2 - \left(\frac{\pi m}{d} \right)^2 + \right.$$
$$\left. + k_j^2(z) + 2i\gamma_j \frac{\pi m}{d} \right] e^{i\frac{\pi m}{d}z} = 0. \qquad (3)$$

Домножаем уравнение (3) на $e^{-iz\pi k/d}$ и интегрируем в пределах $z \in [-d; d]$. В результате имеем систему уравнений:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m a_{mk} = 0, \qquad (4)$$

где

$$a_{mk} = \int_{-d}^{d} \left[\gamma_j^2 - \left(\frac{\pi m}{d} \right)^2 + k_j^2(z) + i\gamma_j \frac{\pi m}{d} \right] e^{i\frac{\pi m}{d}z} dz. \qquad (5)$$

Учитывая, что

$$\int_{-d}^{d} e^{i\frac{\pi(m-k)}{d}z} dz = \begin{cases} 0, \text{ если } m \neq k \\ 2d, \text{ если } m = k, \end{cases} \qquad (6)$$

можем представить систему уравнений (4) в виде

$$2d\alpha_k A_k + \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m a_{mk} = 0, \qquad (7)$$

где обозначено:

$$\alpha_k = \gamma_j^2 - \left(\frac{\pi m}{d} \right)^2 + i\gamma_j \frac{\pi m}{d},$$

$$a_{mk} = \int_{-d}^{d} k_j^2(z) e^{i\frac{\pi(m-k)}{d}z} dz.$$

Соотношение (7) представляет собой систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_m в общем случае бесконечно высокого порядка.

Поскольку краевая задача на уравнении (1) имеет лишь одно граничное условие (по координате z) − условие периодичности, второе условие самосопряженности [7−9] оператора, заключающееся в эквивалентности граничных условий прямой и сопряженной краевых задач, не выполняется. Поэтому, так же как для плоских электромагнитных волн в среде с периодически изменяющейся диэлектрической проницаемостью [1], решения дисперсионного уравнения $\beta_j = i\gamma_j$, получаемые из (7), должны быть в общем случае комплексными величинами.

Рассмотрим конкретный вариант продольно периодической среды, считая, что $\rho(z)$ изменяется от z по косинусоидальному закону:

$$\rho(z) = \rho_0 - \rho_1 \cos\left(\frac{\pi}{d} z \right). \qquad (8)$$

В этом случае коэффициенты a_{mk} в системе уравнений (7) приобретают вид

$$a_{mk} = \{2d\omega^2 \sin(\pi k - \pi m)(m^2(\rho_0 + \rho_1) + k^2\rho_1 -$$
$$- 2k(m\rho_1 + m\rho_0 - \rho_0 \sinh(\ln(k)))\} /$$
$$/\{\pi b(k^2(3m - k) - m^2(3k - m) + k - m)\},$$

где

$$b = \begin{cases} C_{33} = 2.4 \cdot 10^{11} \dfrac{\text{н}}{\text{м}^2} - \text{для продольных волн.} \\ C_{11} = 0.557 \cdot 10^{11} \dfrac{\text{н}}{\text{м}^2} - \text{для поперечных волн.} \end{cases}$$

Система уравнений (7) в общем случае имеет бесконечный порядок, и решать ее нужно в каком-либо приближении. Задаваясь в (7) определенными значениями чисел $m = 0; \pm1; \pm2; ..., \pm m_i$ и $k = 0; \pm1; \pm2; ..., \pm k_i$, получаем в заданном приближении однородную систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно коэффициентов A_{mk}. Для получения нетривиального решения этой СЛАУ приравниваем к нулю ее главный определитель, в результате чего выводим дисперсионное уравнение акустических волн в периодически неоднородной среде.

Так, например, во втором приближении, когда полагаем $m = 0; \pm1; \pm2$ и $k = 0; \pm1; \pm2$, это дисперсионное уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} 2\left(\dfrac{\rho_0\omega^2}{b} + a_0\right) & -\dfrac{\rho_1\omega^2}{b} & -\dfrac{\rho_1\omega^2}{b} & 0 & 0 \\ -\dfrac{\rho_1\omega^2}{b} & 2\left(\dfrac{\rho_0\omega^2}{b} + a_1\right) & 0 & -\dfrac{\rho_1\omega^2}{b} & 0 \\ -\dfrac{\rho_1\omega^2}{b} & 0 & 2\left(\dfrac{\rho_0\omega^2}{b} + a_{-1}\right) & 0 & -\dfrac{\rho_1\omega^2}{b} \\ 0 & -\dfrac{\rho_1\omega^2}{b} & 0 & 2\left(\dfrac{\rho_0\omega^2}{b} + a_2\right) & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{\rho_1\omega^2}{b} & 0 & 2\left(\dfrac{\rho_0\omega^2}{b} + a_{-2}\right) \end{vmatrix} = 0, \qquad (9)$$

где

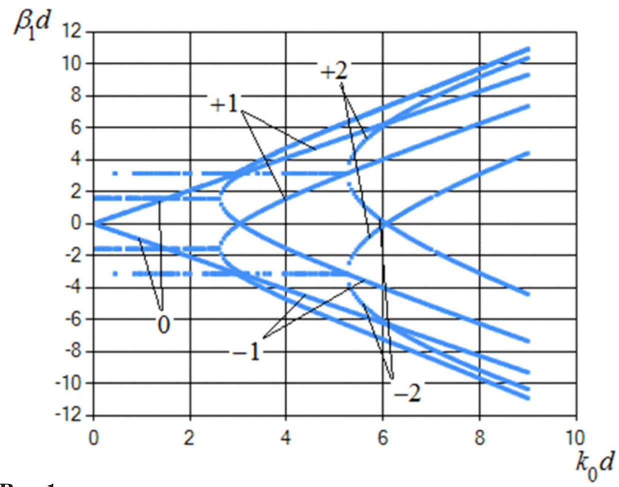

Рис. 1

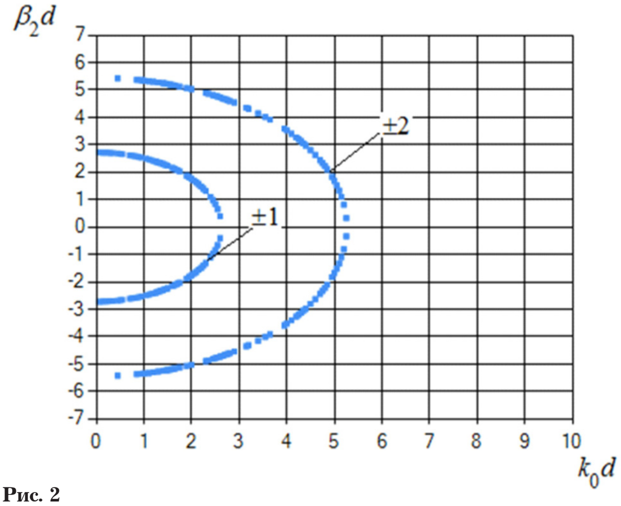

Рис. 2

$$\alpha_0 = \gamma_j^2;$$

$$\alpha_1 = \gamma_j^2 + i\gamma_j \frac{\pi}{d} - \frac{\pi^2}{d^2};$$

$$\alpha_{-1} = \gamma_j^2 - i\gamma_j \frac{\pi}{d} - \frac{\pi^2}{d^2};$$

$$\alpha_2 = \gamma_j^2 + 2i\gamma_j \frac{\pi}{d} - 4\frac{\pi^2}{d^2};$$

$$\alpha_{-2} = \gamma_j^2 - 2i\gamma_j \frac{\pi}{d} - 4\frac{\pi^2}{d^2}.$$

Аналогичным образом получаем дисперсионные уравнения относительно γ_j в более высоких приближениях.

2. Численные результаты решения дисперсионных уравнений

На основе представленного алгоритма были получены численные результаты в виде частотных зависимостей нормированной постоянной распространения $\beta_m d$.

Постоянные распространения β_m связаны с решением дисперсионного уравнения (7) γ соотношениями $\beta_{m1} = \mathrm{Re}(\gamma)$, $\beta_{m2} = \mathrm{Im}(\gamma)$.

На рис. 1 и 2 приведены частотные зависимости нормированных фазовых постоянных $\beta_1 d$ и нормированных коэффициентов затухания $\beta_2 d$ соответственно, для основной ($m = 0$) и высших гармоник ($m = \pm 1$; $\pm 2k = \pm 1$; ± 2) от нормированной постоянной распространения $k_0 d = 2\pi d / \lambda_0$. Представленные зависимости рассчитаны во втором приближении, когда ($m = 0, \pm 1; \pm 2k = 0 \pm 1;$ ± 2).

Зависимости определены для среды со следующими параметрами: $\rho_0 = 4.8 \cdot 10^3$ кг / м^3 – плотность кристалла; $\rho_1 = 0.5 \cdot 10^3$ кг / м^3 – амплитуда периодического изменения плотности кристалла. Период локальных дефектов кристалла ниобат лития определяем, исходя из значения низкочастотного колебания его спектра КРС $\Omega = 120$ см$^{-1}$ [6].

Для нормальных колебаний кристалла между спектральной частотой и периодом решетки имеется [9] следующая связь: $\Omega = 1/(2d)$, откуда имеем: $d = 1/240$ см $\approx 41.7 \cdot 10^{-6}$ м.

Нормированные фазовые постоянные $\beta_m d$ линейно зависят от частоты не во всем частотном диапазоне. На частотных характеристиках $\beta_1 d$ имеются горизонтальные участки, которым соответствует резкое (резонансное) возрастание нормированной постоянной затухания $\beta_2 d$ (рис. 1, 2).

Заключение

В результате решения задачи о распространении акустических волн в периодически неоднородной среде показано, что существуют частотные диапазоны, в которых эти волны обладают резонансными потерями. Следовательно, и устройства, выполненные на основе соответствующих акустических кристаллов, также будут на таких частотах обладать увеличенными потерями. Для повышения широкополосных свойств разрабатываемых функциональных узлов необходимо использовать кристаллы с повышенной акустической добротностью.

Список литературы

1. Гулеев Ю.В., Мансфельд Г.Д. Резонаторы и фильтры сверхвысоких частот на объемных акустических волнах: современное состояние и тенденции // Успехи современной радиоэлектроники. 2004. № 5–6. С. 13–28.

2. Hannon J., Lloyd P., Smith P. Lithium tantalate and lithium niobate piezoelectric resonators // JEEE Sonic and Ultrasonic. 1970. Vol. 17. № 4. P. 44–51.

3. Fabrication of submicron $LNbO_3$ transistors for microwave acoustic delay lines / H.C. Huang [et al.] // Applied Physics. 1974. Vol. 34. № 3. P. 109–111.

4. Исследование низкочастотной области спектров КРС кристаллов ниобат лития / М. Умаров [и др.] // Компоненты и технологии. 2010. № 6. С. 138–140.

5. Раевский С.Б., Смирнов А.А., Шишков Г.И. Распространение электромагнитных волн в периодически неоднородных средах // Антенны. 2005. Вып. 5 (39). С. 64–72.

6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. Теоретическая физика. Т. VII. М.: Наука, 1987. 246 с.

7. Веселов Г.И., Раевский С.Б. Слоистые металлодиэлектрические волноводы. М.: Радио и связь, 1988. 247 с.

8. Раевский С.Б., Раевский А.С. Неоднородные направляющие структуры, описываемые несамосопряженными операторами. М.: Радиотехника, 2004. 112 с.

9. Жданов Г.С. Физика твердого тела. М.: МГУ, 1961. 561 с.

Propagation of elastic waves in a periodically inhomogeneous medium

A.V. Danilov, A.A. Radionov

Body waves in an elastic medium with a periodically varying parameters are calculated.

Keywords: physical acoustics, crystals.