

## Влияние нелинейных элементов с гистерезисом на устойчивость замкнутых систем

А.И. Тяжев

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики  
443010, Российская Федерация, г. Самара  
ул. Л. Толстого, 23

В работе анализируется влияние нелинейных элементов, обладающих характеристиками с гистерезисом, на устойчивость замкнутых систем, дается объяснение причин возникновения автоколебаний в замкнутых системах, в которых без нелинейных элементов с гистерезисом автоколебаний не возникает.

*Ключевые слова:* нелинейные элементы, гистерезис, устойчивость, замкнутые системы, автоколебания.

### Введение

Среди методов анализа устойчивости замкнутых нелинейных систем (ЗНС) особое место занимает метод гармонической линеаризации (МГЛ). Этот метод в сочетании с критерием устойчивости Найквиста позволяет проанализировать устойчивость ЗНС и даже определить амплитуду и частоту автоколебаний [1; 2]. На рис. 1 приведена структурная схема ЗНС, для анализа устойчивости которой можно применить МГЛ в сочетании с критерием устойчивости Найквиста.

Условием применения МГЛ для анализа ЗНС является наличие в схеме фильтра нижних частот (ФНЧ), который включен после нелинейного элемента (НЭ). Заштрихованный сектор в сумматоре на рис. 1 соответствует умножению сигнала обратной связи на  $-1$ . Наличие в схеме ЗНС фильтра нижних частот предполагает, что он без ослабления пропускает первую гармонику и не пропускает на выход высшие гармоники сигнала с выхода НЭ. В этом случае на выходе ФНЧ будут присутствовать только первые гармоники синуса и косинуса сигнала с выхода НЭ [1; 2]:

$$y_{\text{вых}} = q(A)A \sin \varphi + q_1(A)A \cos \varphi, \quad (1)$$

где  $A$ ,  $\varphi = \omega t$  – амплитуда и текущая фаза гармонического сигнала на входе НЭ;  $q(A)$ ,  $q_1(A)$  –

коэффициенты ряда Фурье для первой гармоники синуса и косинуса соответственно, которые определяются по формулам [1; 2]:

$$q(A) = \frac{1}{\pi A} \int_{-\pi}^{\pi} y \sin \varphi d\varphi, \quad (2)$$

$$q_1(A) = \frac{1}{\pi A} \int_{-\pi}^{\pi} y \cos \varphi d\varphi, \quad (3)$$

где  $y$  – сигнал на выходе НЭ при входном воздействии  $x = A \sin \varphi$  при изменении фазы  $\varphi$  от  $-\pi$  до  $\pi$ .

Перейдем от гармонического сигнала на выходе ФНЧ к комплексному сигналу с учетом указанных выше свойств ФНЧ:

$$Y_{\text{вых}}(j\omega) = X(j\omega)W_H(j\omega), \quad (4)$$

где  $W_H(j\omega)$  – комплексный коэффициент передачи НЭ, определяемый по формуле

$$W_H(j\omega) = q(A) + jq_1(A). \quad (5)$$

Множитель на мнимую единицу  $j$  в формуле (5) отражает сдвиг фазы косинуса относительно синуса. Использование в формулах (1)–(4) текущей фазы  $\varphi = \omega t$  означает, что НЭ не обладает инерционностью. Если это условие не выполняется, то инерционные характеристики НЭ переносят в ФНЧ.

### 1. Разновидности характеристик нелинейных элементов с гистерезисом

На рис. 2 приведены характеристики НЭ с гистерезисом трех видов: релейного (а), гладкого (б) и кусочно-линейного (в). Характеристика

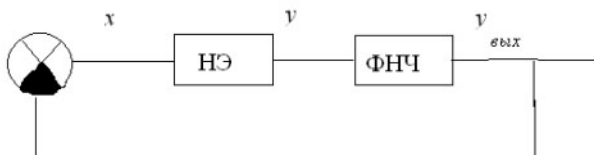


Рис. 1. Структурная схема замкнутой нелинейной системы

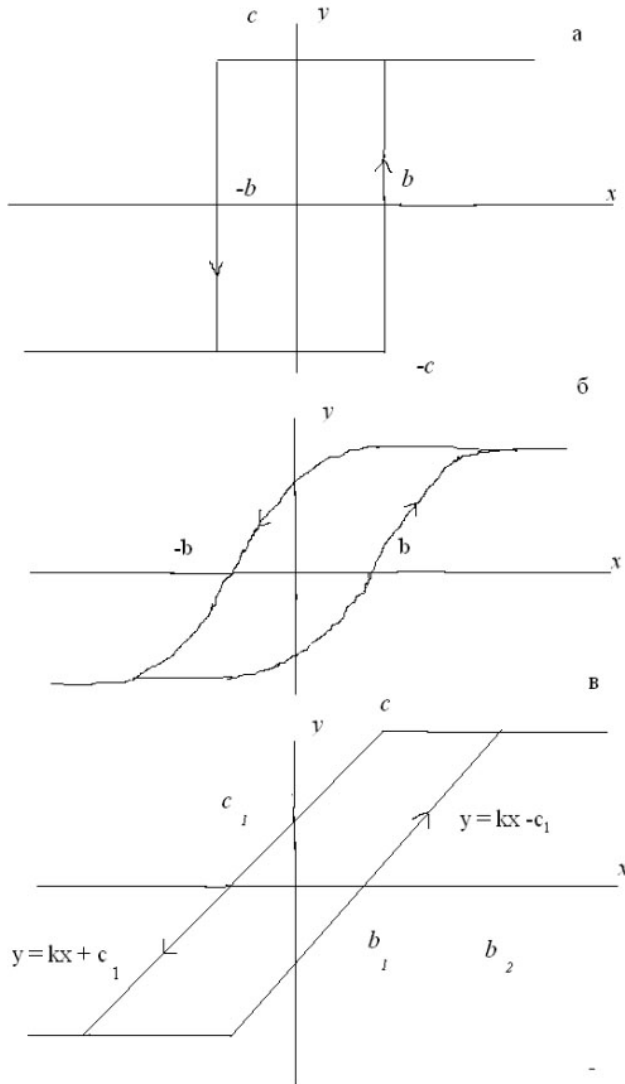


Рис. 2. Характеристики нелинейных элементов с гистерезисом релейного (а), гладкого (б) и кусочно-линейного вида (в)

на рис. 2, в является кусочно-линейной аппроксимацией характеристики на рис. 2, б.

Особенностью характеристик НЭ с гистерезисом является то, что выходной сигнал в них изменяется в зависимости от того, в какую сторону изменяется сигнал на входе НЭ.

### 2. Определение коэффициентов ряда Фурье для НЭ с гистерезисом

В соответствии с формулами (2) и (3) вначале получим выражения для коэффициентов  $q(A)$ ,  $q_1(A)$  для НЭ с гистерезисом релейного вида рис. 2, а. На рис. 3 приведены характеристика НЭ релейного вида (а), сигналы на входе НЭ (б) и на выходе НЭ (в).

Из сопоставления рис. 3, б и в видно, что сигнал на выходе НЭ искажается по форме и запаздывает по фазе относительно входного сигнала

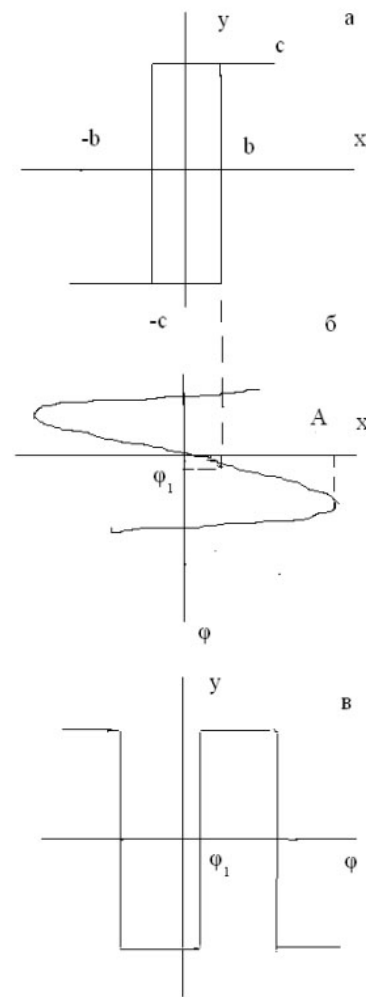


Рис. 3. Характеристика НЭ релейного вида (а), сигналы на входе НЭ (б) и на выходе НЭ (в)

на величину  $\phi_1$ . Величина  $\phi_1$  определяется из равенства, следующего из рис. 3, б):

$$A \sin \phi_1 = b,$$

откуда

$$\phi_1 = \arcsin \frac{b}{A}. \tag{6}$$

В интервале изменения фазы  $\phi$  от  $-\pi$  до  $\pi$  сигнал на выходе НЭ изменяется от  $-C$  до  $C$  трижды:

- на участке от  $-\pi$  до  $-\pi + \phi_1$  сигнал  $y = C$ ;
- на участке от  $-\pi + \phi_1$  до  $\phi_1$  сигнал  $y = -C$ ;
- на участке от  $\phi_1$  до  $\pi$  сигнал  $y = C$ .

Используя формулу (2) и значения сигнала  $y$  на трех участках изменения текущей фазы  $\phi$  от  $-\pi$  до  $\pi$ , получим:

$$q(A) = \frac{1}{\pi A} \left( \int_{-\pi}^{-\pi+\phi_1} C \sin \phi d\phi - \int_{-\pi+\phi_1}^{\phi_1} C \sin \phi d\phi + \int_{\phi_1}^{\pi} C \sin \phi d\phi \right) = \tag{7}$$

$$= \frac{4C}{\pi A} \cos \varphi_1 = \frac{4C}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}}.$$

Используя формулу (3) и значения сигнала  $y$  на трех участках изменения текущей фазы  $\varphi$  от  $-\pi$  до  $\pi$ , получим:

$$q_1(A) = \frac{1}{\pi A} \left( \int_{-\pi}^{-\pi+\varphi_1} C \cos \varphi d\varphi - \int_{-\pi+\varphi_1}^{\varphi_1} C \cos \varphi d\varphi + \int_{\varphi_1}^{\pi} C \cos \varphi d\varphi \right) = \frac{-4C}{\pi A} \sin \varphi_1 = \frac{-4bC}{\pi A^2}. \quad (8)$$

Отметим, что полученные для коэффициентов  $q(A), q_1(A)$  выражения (7) и (8) при  $b = 0$ , что означает отсутствие гистерезиса, превращаются в известные формулы для коэффициентов  $q(A), q_1(A)$ , полученные для идеального ограничителя [2]:

$$q(A) = \frac{4C}{\pi A}, \quad q_1(A) = 0.$$

Теперь получим выражения для коэффициентов  $q(A), q_1(A)$  для НЭ с гистерезисом кусочно-линейного вида рис. 2, в. На рис. 4 приведены характеристика НЭ кусочно-линейного вида (а), сигналы на входе НЭ (б) и на выходе НЭ (в).

Из рис. 4, а, б следуют соотношения:

$$A \sin \varphi_1 = b_1, \quad A \sin \varphi_2 = b_2,$$

$$k = C_1 / b_1, \quad C_1 = C / 2.$$

Из построений на рис. 4 видно, что сигнал на выходе НЭ запаздывает относительно входного гармонического сигнала на величину  $\varphi_1$ . В интервале изменения фазы  $\varphi$  от  $-\pi$  до  $\pi$  сигнал  $y$  изменяется таким образом:

на участке от  $-\pi$  до  $-\pi + \varphi_2$  сигнал  $y$  убывает от  $C_1$  до  $-C$ ;

на участке от  $-\pi + \varphi_2$  до  $-\varphi_1$  сигнал  $y = -C$ ;

на участке от  $-\varphi_1$  до  $\varphi_2$  сигнал  $y$  возрастает от  $-C$  до  $C$ ;

на участке от  $\varphi_2$  до  $\pi - \varphi_1$  сигнал  $y = C$ ;

на участке от  $\pi - \varphi_1$  до  $\pi$  сигнал  $y$  убывает от  $C$  до  $C_1$ .

Используя формулу (2) и значения сигнала  $y$  на пяти участках изменения текущей фазы  $\varphi$  от  $-\pi$  до  $\pi$ , запишем:

$$q(A) = \frac{1}{\pi A} \left( \int_{-\pi}^{-\pi+\varphi_2} (kA \sin \varphi + C_1) \sin \varphi d\varphi - \int_{-\pi+\varphi_2}^{-\varphi_1} C \sin \varphi d\varphi + \int_{-\varphi_1}^{\varphi_2} (kA \sin \varphi - C_1) \sin \varphi d\varphi + \int_{\varphi_2}^{\pi-\varphi_1} C \sin \varphi d\varphi + \int_{\pi-\varphi_1}^{\pi} (kA \sin \varphi + C_1) \sin \varphi d\varphi \right).$$

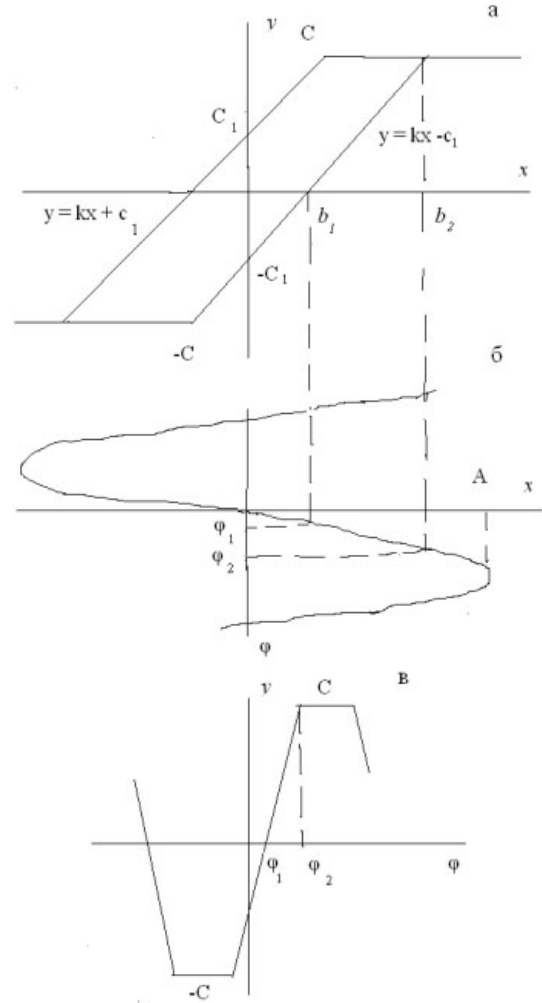


Рис. 4. Характеристика НЭ кусочно-линейного вида (а), сигналы на входе НЭ (б) и на выходе НЭ (в)

$$+ \int_{\varphi_2}^{\pi-\varphi_1} C \sin \varphi d\varphi + \int_{\pi-\varphi_1}^{\pi} (kA \sin \varphi + C_1) \sin \varphi d\varphi \Bigg).$$

После вычисления интегралов получим:

$$q(A) = \frac{k}{\pi} \left( \varphi_1 + \varphi_2 - \frac{1}{2} \sin 2\varphi_1 - \frac{1}{2} \sin 2\varphi_2 \right) + \frac{2C}{\pi A} (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) + \frac{C_1}{\pi A} (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1). \quad (9)$$

Используя формулу (3) и значения сигнала  $y$  на пяти участках изменения текущей фазы  $\varphi$  от  $-\pi$  до  $\pi$ , запишем:

$$q_1(A) = \frac{1}{\pi A} \left( \int_{-\pi}^{-\pi+\varphi_2} (kA \sin \varphi + C_1) \cos \varphi d\varphi - \int_{-\pi+\varphi_2}^{-\varphi_1} C \cos \varphi d\varphi + \int_{-\varphi_1}^{\varphi_2} (kA \sin \varphi - C_1) \cos \varphi d\varphi + \int_{\varphi_2}^{\pi-\varphi_1} C \cos \varphi d\varphi + \int_{\pi-\varphi_1}^{\pi} (kA \sin \varphi + C_1) \cos \varphi d\varphi \right).$$

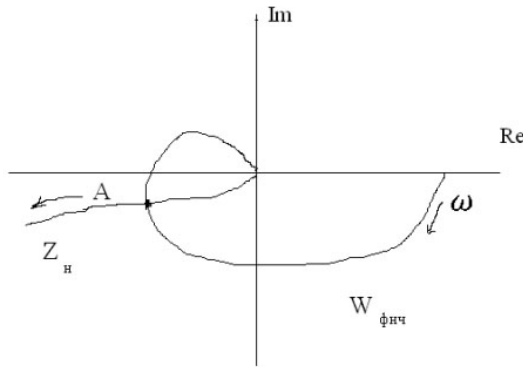


Рис. 5. Годограф ФНЧ  $W_{\text{ФНЧ}}(j\omega)$  и годограф  $Z_{\text{н}}(jA) = -1 / (W_{\text{н}}(jA))$

После вычисления интегралов получим:

$$q_1(A) = \frac{k}{2\pi} (\cos 2\varphi_1 - \cos 2\varphi_2) + \frac{2C}{\pi A} (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2) + \frac{2C_1}{\pi A} (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2). \quad (10)$$

Если в НЭ на рис. 2, в наклонные прямые сливаются в одну прямую, т. е. гистерезис исчезает, тогда получим формулы для расчета коэффициентов  $q(A)$ ,  $q_1(A)$  для усилителя-ограничителя:

$$q(A) = \frac{C}{\pi b} (2\varphi_1 - \sin 2\varphi_1) + \frac{4C}{\pi A} \cos \varphi_1,$$

$$q_1(A) = 0,$$

где  $\varphi_1$  определяется по (6).

### 3. Определение амплитуды и частоты автоколебаний в замкнутых нелинейных системах с гистерезисом

В соответствии с МГЛ и критерием устойчивости Найквиста автоколебания в ЗНС возникают при выполнении условия:

$$W_{\text{ФНЧ}}(j\omega)W_{\text{н}}(jA) = -1.$$

Это условие можно переписать в виде

$$W_{\text{ФНЧ}}(j\omega) = \frac{-1}{W_{\text{н}}(jA)}.$$

Используя полученные в статье выражения для коэффициентов  $q(A)$ ,  $q_1(A)$ , можно определить амплитуду и частоту автоколебаний в ЗНС с характеристиками НЭ вида рис. 2, а, в. Для этого на комплексной плоскости надо построить два годографа (рис. 5): **годограф комплексного коэффициента передачи ФНЧ  $W_{\text{ФНЧ}}(j\omega)$**  в зависимости от частоты  $\omega$  и **годограф звена, комплексный коэффициент передачи которого в зависимости от амплитуды  $A$  определяется по формуле [1; 2]**

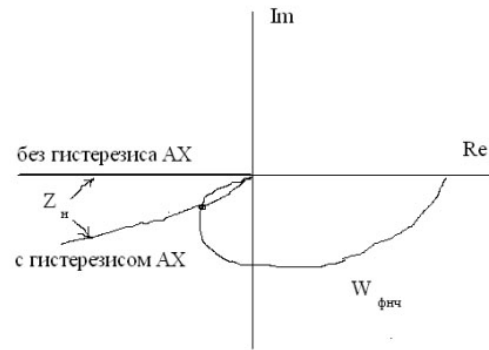


Рис. 6. Годограф ФНЧ из двух RC-цепочек  $W_{\text{ФНЧ}}(j\omega)$  и годографы  $Z_{\text{н}}(jA) = -1 / (W_{\text{н}}(jA))$  для компаратора без гистерезиса и с гистерезисом амплитудной характеристики

$$Z_{\text{н}}(jA) = \frac{-1}{W_{\text{н}}(jA)} = \frac{-1}{q(A) + jq_1(A)}.$$

Точка пересечения этих двух годографов определяет амплитуду  $A_{\text{к}}$  и частоту автоколебаний  $\omega_{\text{к}}$ , которые можно рассчитать как аналитическими, так и численными методами. Если указанные годографы не пересекаются, то ЗНС будет устойчивой.

### Заключение

Нелинейные элементы с гистерезисом, кроме искажений формы сигнала, создают его запаздывание по фазе на величину  $\varphi_1$ . Это обстоятельство может привести к самовозбуждению в замкнутых системах, в которых с позиций линейной модели по критерию Найквиста самовозбуждения возникать не должно. Эксперимент подтверждает, что охваченный цепью обратной связи (ОС) компаратор, в цепи ОС которого включены две RC-цепочки (они выполняют роль ФНЧ), генерирует автоколебания из-за наличия в его амплитудной характеристике (АХ) гистерезиса (рис. 2, а). Компаратор без гистерезиса АХ с такой схемой ОС не будет генерировать автоколебания, так как годографы

$$W_{\text{ФНЧ}}(j\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega RC)^2} \text{ и } Z_{\text{н}}(jA) = \frac{-\pi A}{4C}$$

в этом случае не пересекаются (см. рис. 6).

### Список литературы

1. Коновалов Г.С. Радиоавтоматика: учебник для вузов. М.: Наука, 1990. 336 с.
2. Тяжев А.И. Основы теории управления и радиоавтоматика: учебное пособие. М.: Радио и связь, 1999. 188 с.

## Effect of non-linear elements with hysteresis on the stability of the closed systems

*A.I. Tyazhev*

This paper analyzes the impact of non-linear elements with characteristics with hysteresis on the stability of the closed systems, explains the causes of oscillations in a closed system in which no non-linear elements with hysteresis oscillation does not occur.

*Keywords:* nonlinear elements, hysteresis, stability, closed system, oscillations.

**Неганов, В.А.**

**Современная теория и практические применения антенн:** монография / В.А. Неганов, Д.П. Табаков, Г.П. Яровой; предисловие академика Ю.В. Гуляева; под ред. В.А. Неганова. – М.: Радиотехника, 2009. – 720 с.

**ISBN 978-5-88070-222-0**

Неганов В.А., Табаков Д.П., Яровой Г.П.

Современная теория  
и практические применения  
антенн

Издательство «Радиотехника»  
Москва, 2009

УДК 621.396.67  
ББК 32.845

Рассмотрены основные разделы теории и техники антенн. Освещены вопросы расчета и построения различных типов антенн (от вибраторных до рупорных и антенных решеток, включая фазированные). Основное внимание уделено антеннам СВЧ и расчетам их электромагнитных полей в ближней зоне, т. е. вопросам электромагнитной совместимости.

Принципиальное отличие книги от известных заключается в последовательном применении метода физической регуляризации (самосогласованного метода) к расчету электромагнитного поля антенн, позволяющего осуществлять непрерывный переход с излучающей поверхности антенны к пространству вне ее. С помощью самосогласованного метода получены новые результаты по теории антенн: установлены связь между поверхностной плотностью тока на вибраторной антенне и напряженностью электромагнитного поля, однонаправленный режим излучения для кольцевой (рамочной антенны), режимы стоячих и бегущих волн в цилиндрической спиральной антенне, входное сопротивление практически для всех типов антенн. Теоретический материал подкреплен примерами применения многолучевых антенн.

*Предназначено для разработчиков антенно-фидерных устройств, аспирантов и докторантов, занимающихся вопросами проектирования антенных систем различного назначения, студентов радиотехнических специальностей высших учебных заведений.*