

Два подхода к решению краевых задач о резонансных и направляющих структурах с гиротропным заполнением

Е.А. Михалицын^{1,2}, А.С. Раевский², А.Ю. Седаков^{1,2}

¹ ФГУП «ФНПЦ НИИ измерительных систем им. Ю.Е. Седакова»
603137, Российская Федерация, г. Нижний Новгород
ул. Тропинина, 47

² Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева
603950, Российская Федерация, г. Нижний Новгород
ул. Минина, 24

Разработаны T - и L -методы решения краевых задач для электродинамических структур с гиротропным заполнением в цилиндрической системе координат. Методы основаны на двух линейно независимых решениях обобщенного уравнения Гельмгольца для гиротропной среды. Получен полный спектр резонансных частот собственных колебаний цилиндрического однородного гиротропного резонатора. Рассчитаны дисперсионные характеристики собственных волн однородного гиротропного радиального волновода. Иллюстрируется эффект преобразования структуры электромагнитного поля собственных колебаний однородного гиротропного резонатора при изменении параметра невязимности.

Ключевые слова: гиротропный резонатор, обобщенное уравнение Гельмгольца, бигиротропная среда, радиальный гиротропный волновод, эффект преобразования структуры полей собственных колебаний.

Введение

Одним из путей улучшения массогабаритных характеристик и электромагнитных параметров СВЧ- и КВЧ-устройств является использование достижений быстроразвивающейся микроэлектроники гиротропных сред, специфические электромагнитные свойства которых проявляются под влиянием приложенных внешних воздействий: управляющего электрического или магнитного поля, температуры, давления и т. д. Наибольший интерес на практике представляют гироэлектрические и гиромагнитные среды. К ним относятся широко применяемые в СВЧ- и КВЧ-технике ферритовые материалы [1], а также электро- и магнитогиротропные жидкие кристаллы [2]. Интерес к жидкокристаллическим материалам наметился недавно и обусловлен тем, что они являются перспективной средой для устройств миллиметрового диапазона длин волн благодаря сравнительно низким потерям, высокому значению анизотропии диэлектрической проницаемости в этом диапазоне и исключительным массогабаритным характеристикам.

Одной из основных проблем применения электро- и магнитоактивных материалов в технике СВЧ- и КВЧ-диапазонов является отсутствие априорной информации о макроскопических па-

раметрах гиротропии среды, их частотной зависимости и зависимости от параметров внешнего воздействия. Даже в отношении широко применяемых и хорошо изученных ферритовых сред и функциональных устройств на их основе актуальной остается проблема измерения параметров тензора магнитной проницаемости. Одним из путей решения проблемы служит резонаторный метод [3], основанный на анализе спектра собственных частот резонансных структур с ферритовым заполнением. Обобщение метода на случай бигиротропной среды позволит расширить его применение для анализа свойств жидкокристаллических материалов.

Другая актуальная научно-техническая задача применения гиротропных сред состоит в ограниченности существующих электродинамических методов расчета СВЧ- и КВЧ-устройств случаев ферритовых материалов [4]. При этом известные методики расчета волноводных развязывающих и переключающих ферритовых устройств основаны на приближенных моделях и не позволяют проводить оптимизацию рабочих характеристик [4; 5].

В связи с вышеизложенным актуальной представляется проблема разработки строгих электродинамических подходов к решению краевых

задач для структур с бигиротропным заполнением (феррит, гиромангнитные и гирозлектрические жидкие кристаллы). При этом значительный интерес применительно к анализу тензорных параметров среды представляет однородный цилиндрический резонатор, а с точки зрения разработки методов расчета конкретных устройств КВЧ-электроники – однородный радиальный гиротропный волновод (радиальный гироволновод), образованный двумя металлическими плоскостями с идеальной проводимостью и гиротропным заполнением пространства между ними.

В литературных источниках широкое распространение получил метод укорочения исходных дифференциальных уравнений [6], который позволяет проводить расчет дисперсии волн продольно-регулярных направляющих структур с гиротропным заполнением. Применение метода к анализу резонансных структур, как будет показано далее, ограничено.

В данной статье описаны два обобщающих подхода к решению краевых задач об электродинамических структурах с гиротропным заполнением. Каждый из методов применяется для своего класса структур.

1. Обобщенное уравнение Гельмгольца для бигиротропной среды

Рассмотрим безграничную бигиротропную среду с направлением внешнего воздействия, сонаправленным с осью Oz. Диэлектрическая и магнитная проницаемости среды представляются в виде тензора Эрмита [7]:

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon_0 \begin{vmatrix} \varepsilon & -j\eta & 0 \\ j\eta & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{vmatrix}; \quad (1)$$

$$\hat{\mu} = \mu_0 \begin{vmatrix} \mu & -jk & 0 \\ jk & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{vmatrix},$$

где μ , k , μ_z , ε , η , ε_z – элементы тензоров (в общем случае комплексные величины).

Уравнения Максвелла для комплексных амплитуд компонент электромагнитного поля \vec{E} и \vec{H} в гиротропной среде с продольным внешним воздействием преобразуются к системе двух линейных дифференциальных уравнений второго порядка относительно продольных компонент поля:

$$\begin{cases} \nabla_t^2 H_z + \frac{\mu_z}{\mu} \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + \mu_z \varepsilon_{\perp} K_0^2 H_z + \\ + \varepsilon_z K_0 y_0 \left(\frac{k}{\mu} + \frac{\eta}{\varepsilon} \right) \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0; \\ \nabla_t^2 E_z + \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon} \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \varepsilon_z \mu_{\perp} K_0^2 E_z - \\ - \mu_z K_0 / y_0 \left(\frac{k}{\mu} + \frac{\eta}{\varepsilon} \right) \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где

$$\mu_{\perp} = \frac{\mu^2 - k^2}{\mu}$$

– эффективная магнитная проницаемость;

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{\varepsilon^2 - \eta^2}{\varepsilon}$$

– эффективная диэлектрическая проницаемость;

$$K_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$$

– постоянная распространения вакуума;

$$y_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$$

– характеристический адмитанс вакуума.

При этом поперечные компоненты поля \vec{E}_t и \vec{H}_t связаны с продольными E_z и H_z через следующие дифференциальные выражения:

$$\Lambda_1 \vec{H}_t = \Lambda_2 H_z - \Lambda_3 E_z; \quad (3)$$

$$\Lambda_1 \vec{E}_t = \Lambda_2 E_z + \Lambda_4 H_z,$$

где Λ_1 , Λ_2 , Λ_3 , Λ_4 – линейные дифференциальные операторы второго порядка:

$$\Lambda_1 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + K_0^2 (\mu\varepsilon + k\eta) + jK_0^2 (k\varepsilon + \mu\eta) [\vec{z}_0 \times \circ];$$

$$\Lambda_2 = \frac{\partial}{\partial z} \nabla_t;$$

$$\Lambda_3 = K_0 y_0 \nabla_t (\eta + j\varepsilon [\vec{z}_0 \times \circ]);$$

$$\Lambda_4 = K_0 / y_0 \nabla_t (k + j\mu [\vec{z}_0 \times \circ]).$$

Исключая из уравнений (2) одну из величин (H_z или E_z), нетрудно получить следующие дифференциальные уравнения четвертого порядка:

$$\Lambda(E_z) = 0, \quad \Lambda(H_z) = 0, \quad (4)$$

где

$$\Lambda = \nabla_t^4 + \frac{\mu_z}{\mu} \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon} \frac{\partial^4}{\partial z^4} + \left(\frac{\mu_z}{\mu} + \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon} \right) \nabla_t^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (\varepsilon_z \mu_{\perp} + \mu_z \varepsilon_{\perp}) K_0^2 \nabla_t^2 + \quad (5)$$

$$+ 2\mu_z \varepsilon_z K_0^2 \left(1 + \frac{k \eta}{\mu \varepsilon} \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \varepsilon_z \varepsilon_{\perp} \mu_z \mu_{\perp} K_0^4$$

– линейный дифференциальный оператор четвертого порядка.

Разрешая одно из уравнений (4) в рамках каждого из двух подходов относительно продольной компоненты электрического или магнитного полей, вторую компоненту поля находим через первую с использованием системы линейных дифференциальных уравнений (2). Далее поперечные компоненты поля определяем через продольные согласно (3).

Уравнения (4) называются обобщенными уравнениями Гельмгольца (ОУГ) для гиротропной среды [7]. В общем случае решение уравнений (4) представляет собой непростую задачу. Существенно упростить решение возможно, применив к системе дифференциальных уравнений (2) метод разделения переменных в одной из двух частных формулировок: T - или L -методы.

2. T -метод решения обобщенного уравнения Гельмгольца

Рассмотрим частный случай решения обобщенного уравнения Гельмгольца методом разделения переменных, при котором все составляющие электромагнитного поля имеют гармоническую зависимость по оси Oz , совпадающей с направлением внешнего постоянного электрического или магнитного полей:

$$E_z = T_E Z(z), \quad H_z = T_H Z(z) \quad (6)$$

где $Z(z)$ – гармонические функции ($e^{\pm j\beta z}$, $\cos(\beta_0 z)$, $\sin(\beta_0 z)$ или их линейные комбинации), удовлетворяющие дифференциальному уравнению $\left[\partial^2 / \partial z^2 + \beta_0^2 \right] Z(z) = 0$.

При этом дифференциальный оператор (5) преобразуется к виду

$$\Lambda = \nabla_t^4 + \lambda_{11} \nabla_t^2 + \lambda_{12}, \quad (7)$$

где λ_{11} , λ_{12} – некоторые функции компонент тензоров.

Оператор (7), в отличие от общего случая (5), может быть представлен в виде произведения двух операторов второго порядка, и, следовательно, каждое из уравнений (4) может быть преобразовано к двум однородным уравнениям Гельмгольца:

$$\left[\nabla_t^2 + \mathfrak{G}_i^2 \right] T_{E,H} = 0, \quad (8)$$

где \mathfrak{G}_i^2 – решения квадратного уравнения, соответствующего характеристическому уравнению оператора (7), $i = 1, 2$:

$$\mathfrak{G}_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[\sigma_1 K_0^2 - \sigma_2 \beta^2 \right] \pm$$

$$\pm \sqrt{\frac{1}{4} \left[\sigma_1 K_0^2 - \sigma_2 \beta^2 \right]^2 + K_0^2 \beta^2 \sigma_3},$$

$$\sigma_1 = \varepsilon_z \mu_{\perp} + \mu_z \varepsilon_{\perp}, \quad (9)$$

$$\sigma_2 = \mu_z / \mu + \varepsilon_z / \varepsilon,$$

$$\sigma_3 = \varepsilon \mu + \eta k.$$

Решения уравнений (4) записывается в виде

$$E_z(H_z) = \left(A_1 T_{E,H}^1 + A_2 T_{E,H}^2 \right) Z(z), \quad (10)$$

где A_1 , A_2 – неизвестные амплитудные коэффициенты.

Таким образом, продольные компоненты электромагнитного поля гиротропной среды представляются как суперпозиция двух линейно независимых функций. Решение краевых задач для однородной направляющей структуры и резонатора запишется в виде суперпозиции двух волн и, соответственно, колебаний, с одинаковыми постоянными распространения по продольной координате и различными поперечными постоянными распространения. Поскольку рассматриваемый частный случай применения метода разделения переменных приводит к существованию в безграничной бигиротропной среде двух волн с различным характером распространения в поперечном направлении, будем называть такой подход T -методом решения обобщенного уравнения Гельмгольца (от англ. *transversal* – «поперечный»).

Существенным преимуществом рассматриваемого подхода по сравнению с разработанным ранее методом укорочения [4] является возможность рассмотрения полей, не зависящих от координаты z ($\beta_0 = 0$).

3. L -метод решения обобщенного уравнения Гельмгольца

Рассмотрим второй частный случай решения обобщенного уравнения Гельмгольца методом разделения переменных, при котором продольные составляющие электромагнитного поля имеют одинаковую зависимость от поперечных координат и различаются в представлении зависимости от координаты z :

$$E_z = T Z_E(z), \quad H_z = T Z_H(z). \quad (11)$$

При этом система дифференциальных уравнений (2) преобразуется к обобщенному уравнению Гельмгольца (4) с дифференциальным оператором:

$$\Delta = \frac{\partial^4}{\partial z^4} + \lambda_{21} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \lambda_{22}, \quad (12)$$

и однородному уравнению Гельмгольца относительно функции поперечных координат:

$$\left[\nabla_t^2 + \vartheta_0^2 \right] T = 0, \quad (13)$$

где λ_{21} , λ_{22} – некоторые функции компонент тензоров.

Для оператора (12), как и в случае (7), справедливо представление в виде произведения двух операторов второго порядка, и, следовательно, каждое из уравнений (4) преобразуется к двум однородным уравнениям Гельмгольца:

$$\left[\nabla_t^2 + \beta_i^2 \right] Z_{E,H} = 0, \quad (14)$$

где β_i^2 – решения квадратного уравнения, соответствующего характеристическому уравнению оператора (12), $i = 1, 2$:

$$\beta_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[K_0^2 \sigma_3 - \vartheta_0^2 \sigma_2 \right] \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left[\sigma_3 K_0^2 - \sigma_2 \vartheta_0^2 \right]^2 + K_0^2 \vartheta_0^2 \sigma_1}. \quad (15)$$

Решение уравнений (14), соответствующее прямым (обратным) собственным волнам гиротропной среды, запишется в виде

$$E_z(H_z) = \left(A_1 Z_{E,H}^1 + A_2 Z_{E,H}^2 \right) T. \quad (16)$$

Таким образом, продольные компоненты электромагнитного поля волн с прямым (обратным) направлением распространения представляются в виде суперпозиции двух линейно независимых функций. Общее решение краевой задачи о собственных прямых (обратных) волнах гиротропной среды при этом запишется как суперпозиция двух частных решений с одинаковыми постоянными распространения по поперечной координате и различными продольными постоянными распространения. Данный метод приводит к существованию в безграничной бигиротропной среде двух прямых (обратных) волн с различным характером распространения в продольном направлении, поэтому будем называть такой подход *L*-методом решения обобщенного уравнения Гельмгольца (от англ. longitudinal – «продольный»).

4. Электромагнитное поле бигиротропной среды в цилиндрической системе координат

Применим разработанные методы к решению обобщенного уравнения Гельмгольца для биги-

ротропной среды в цилиндрической системе координат (r, φ, z). Рассмотрим продольную и азимутальную компоненты электрического поля, которые с учетом решения уравнений (7) и (10), (11) при условии ограниченности поля при $r = 0$ для *L*- и *T*-подходов записываются в следующем компактном виде:

$$\begin{aligned} E_z &= \sum_{i=1}^2 A_i J_n(\vartheta_{i,\bar{s}} r) \cos(\beta_{i,s} z) e^{jn\varphi}; \\ E_\varphi &= j \sum_{i=1}^2 A_i \frac{\vartheta_{i,\bar{s}}}{\beta_{i,s}} \left[Q_i J'_n(\vartheta_{i,\bar{s}} r) - \right. \\ &\quad \left. - P_i \frac{n J_n(\vartheta_{i,\bar{s}} r)}{\vartheta_{i,\bar{s}} r} \right] \sin(\beta_{i,s} z) e^{jn\varphi}; \end{aligned} \quad (17)$$

где s удобно представить в виде логической переменной, которая принимает следующие значения: $s = 0$ – для случая *T*-метода решения, $s = 1$ – для случая *L*-метода решения; \bar{s} – инверсная логическая переменная; $J_n(\vartheta_{i,\bar{s}} r)$ – функция Бесселя порядка n ; $J'_n(\vartheta_{i,\bar{s}} r)$ – производная функции Бесселя порядка n по всему аргументу; ϑ_i рассчитываются по формуле (9), β_i определяются согласно (15); A_1, A_2 – неизвестные амплитудные коэффициенты линейно независимых решений;

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{p_{i,s} \beta_{i,s}^2 + t_i (q\mu - p_{i,s} k)}{p_{i,s}^2 - q^2}; \\ Q_i &= \frac{q \beta_{i,s}^2 + t_i (p_{i,s} \mu - qk)}{p_{i,s}^2 - q^2}; \\ t_i &= \frac{(K_0^2 \varepsilon_z \mu_{eff} - \vartheta_{i,\bar{s}}^2 - \varepsilon_z / \varepsilon \beta_{i,s}^2)}{\mu_z (k / \mu + \eta / \varepsilon)}; \end{aligned}$$

$$p_{i,s} = K_0^2 [\mu\varepsilon + k\eta] - \beta_{i,s}^2$$

$$q = K_0^2 [k\varepsilon + \mu\eta].$$

Применение каждого из двух подходов для конкретной направляющей или резонансной структуры требует предварительного анализа, поскольку получение дисперсионных и характеристических уравнений в замкнутой форме при заданных граничных условиях возможно лишь в рамках одного из двух методов. Это связано с самой формулировкой *T*- и *L*-подходов к решению обобщенного уравнения Гельмгольца для гиротропной среды. В рамках *T*-метода постулируется, что зависимость компонент электромагнитного поля прямых (обратных) волн от продольной координаты представляется в виде одной функции, зависимость от поперечных ко-

ординат – в виде суперпозиции двух линейно независимых функций. При L -методе, напротив, продольная зависимость компонент поля представляется суперпозицией двух линейно независимых функций, а поперечная – одной. При такой постановке двух подходов к решению краевых задач для электродинамических структур с гиротропным заполнением каждый из методов дает линейно независимое от другого представление поля, и в общем случае полный спектр волн определяется с использованием обоих методов.

5. Расчет спектра резонансных частот собственных колебаний цилиндрического экранированного бигиротропного резонатора

Рассмотрим резонансную структуру, образованную отрезком круглого волновода длины h и радиуса a с заматаллизованными торцевыми плоскостями (рис. 1). Стенки резонатора принимаются идеально проводящими, а его заполнение – однородная линейная бигиротропная среда с диэлектрической и магнитной проницаемостями вида (1) и внешним продольным воздействием.

Проведем расчет собственных резонансных частот рассматриваемой резонансной структуры T -методом решения обобщенного уравнения Гельмгольца как наиболее подходящим с точки зрения замкнутости результирующего характеристического уравнения и точности результатов расчета. При этом достаточно рассмотреть лишь продольную и азимутальную компоненты электрического поля в форме (17).

Применяя граничное условие равенства нулю тангенциальной компоненты электрического поля на поверхности экрана $r = a$, приходим к системе двух алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных амплитудных коэффициентов. Характеристическое уравнение собственных резонансных частот структуры получается посредством приравнивания определителя СЛАУ нулю, что определяет нетривиальность решения системы, и записывается в виде

$$Q_2 \vartheta_2 \frac{J'_n(\vartheta_2 a)}{J_n(\vartheta_2 a)} - Q_1 \vartheta_1 \frac{J'_n(\vartheta_1 a)}{J_n(\vartheta_1 a)} - \frac{n}{a} (P_2 - P_1) = 0. \quad (18)$$

В этом случае в соотношениях (17) продольное волновое число собственных колебаний определяется как $\beta_0 = \pi l / h$, где $l = 0, 1, 2 \dots$ – продольный индекс собственных колебаний.

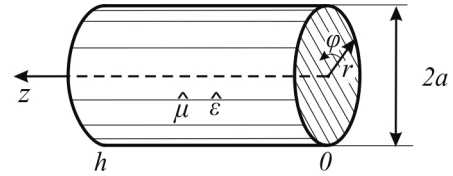


Рис. 1. Цилиндрический однородный бигиротропный резонатор

Необходимо отметить, что в случае направляющей структуры в виде однородного круглого волновода уравнение (18) представляет собой дисперсионное уравнение собственных волн структуры.

Рассматривая колебания без зависимости от продольной координаты при $\beta_0 = 0$, что также является условием срыва распространения волн в круглом бигиротропном волноводе, расчет по формуле (9) приводит к следующим выражениям для поперечных постоянных распространения: $\vartheta_1^2 = K_0^2 \epsilon_z \mu_{\perp}$, $\vartheta_2^2 = K_0^2 \mu_z \epsilon_{\perp}$.

Применяя граничное условие на боковой поверхности экрана, получаем следующие выражения для собственных частот резонатора:

$$f_p = \frac{c \zeta_{nm}}{2\pi a \sqrt{\epsilon_z \mu_{\perp}}}; \quad f_p = \frac{c \zeta_{nm}}{2\pi a \sqrt{\mu_z \epsilon_{\perp}}}, \quad (19)$$

где ζ_{nm} – m -й корень уравнения $J_n(x) = 0$; c – скорость света в вакууме.

Результаты решения характеристического уравнения (18) в случае заполнения резонатора гиротропной средой с параметрами: $h = a = 10$ мм, $\epsilon = \epsilon_z = 10$, $\eta = \epsilon / 10$, $\mu = \mu_z = 1$, приведены на рис. 2 и 3 в виде зависимости нормированной резонансной частоты от коэффициента невязимости k / μ для нескольких низших типов колебаний. Внешнее воздействие полагаем сонаправленным с осью Oz . Собственные колебания однородного цилиндрического резонатора с гиротропным заполнением являются гибридными: HE - и EH -колебания. Корректность разработанного алгоритма и программы расчета резонансных частот была проверена на основе предельного перехода к однородному диэлектрическому резонатору при $k \rightarrow 0$ и $\eta \rightarrow 0$.

Согласно (17), угловая зависимость полей в азимутально симметричном резонаторе имеет вид $e^{\pm in\varphi}$. Значениям $+n$ и $-n$ при $k > 0$ и $\eta > 0$ соответствуют два независимых решения краевой задачи, описывающие гибридные волны с правым и левым вращением плоскости поляризации соответственно. Поскольку направление вращения плоскости поляризации привязано к направлению оси Oz , при изменении направ-

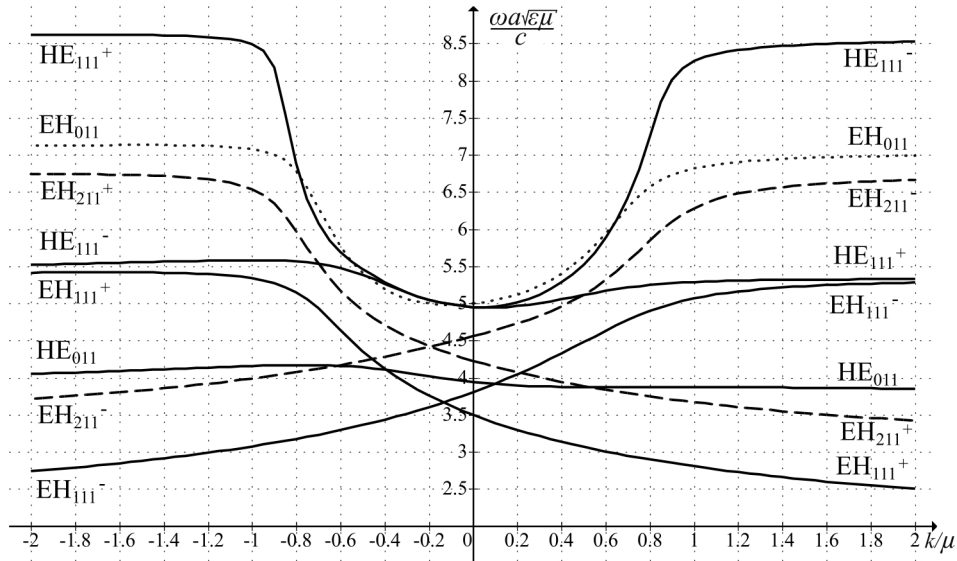


Рис. 2. Резонансные частоты собственных колебаний цилиндрического однородного бигиротропного резонатора

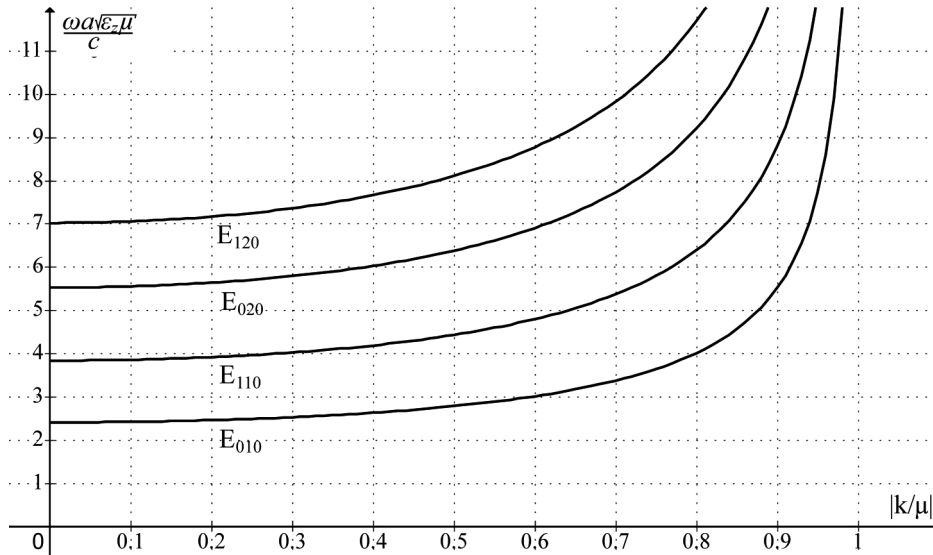


Рис. 3. Резонансные частоты собственных колебаний EH_{011} -типа

ления воздействия на противоположное, что приводит к изменению знака параметров k и η , при $n > 0$ возбуждаются колебания с левой поляризацией, а не с правой, как в случае с сонаправленным по отношению к продольной оси подмагничиванием. Поэтому в обозначении типа колебаний вводится знаки: «+» – если направление вращения плоскости поляризации левое (против часовой стрелки, если смотреть по направлению оси Oz), и «-» при правом вращении плоскости поляризации (по часовой стрелке). При вариации параметра невязности на рис. 2 направление внешнего воздействия зафиксировано вдоль направления оси Oz и привязано к величине η .

Индексное обозначение резонансных колебаний определяется тремя целыми числами: ази-

мутальным индексом $|n|$, порядковым номером t корня характеристического уравнения (18) соответствующего типа колебания при фиксированных n и l , а также продольным индексом колебания l .

Анализ графиков рис. 2 позволяет сделать вывод о том, что наименьшие резонансные частоты имеют колебания EH_{011} и $\text{EH}_{111}^{+/-}$ -типов. Поэтому большинство развязывающих ферритовых устройств работает именно на этих колебаниях.

Необходимо отметить, что в случае магнитогиротропной среды при $\eta = 0$ точки пересечения графиков резонансных частот однотипных колебаний, отличающихся знаком азимутального индекса, на рис. 2 смещаются к вертикальной оси, и картина приобретает симметрию. При этом тип поляризации определяется по знаку величины k .

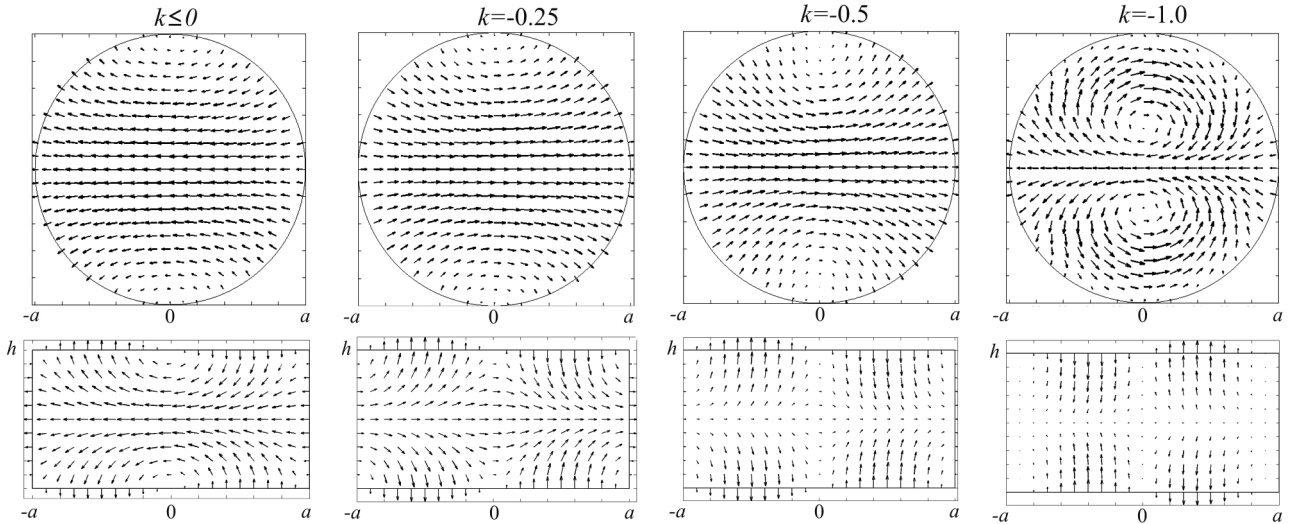


Рис. 4. Трансформация структуры электрического поля $E_{H_{111}^+}$ -колебания в плоскостях $z = h / 4$ и $\varphi = 0^\circ$

В отличие от колебаний с ненулевым продольным индексом резонансные частоты $E_{H_{nm0}}$ -колебаний при стремлении параметра невязности к единице неограниченно увеличиваются. Это связано с уменьшением эффективной магнитной проницаемости вплоть до нуля при $|k / \mu| = 1$.

На рис. 4 представлен процесс трансформации структуры полей $E_{H_{111}^+}$ -колебания при изменении параметра невязности. Из графиков рис. 2 и картин распределения комплексной амплитуды вектора напряженности электрического поля (рис. 4) следует, что в случае асимптотического приближения резонансных частот заданного колебания с изменением параметра невязности к значениям резонансных частот другого типа колебания (в данном случае $E_{H_{111}^-}$ -колебания) структура электромагнитного поля постепенно полностью преобразуется в распределение колебания более высокого типа. Таким образом, для некоторых типов колебаний с асимптотической особенностью резонансных частот обозначение типа в полной мере отражает структуру поля лишь при малых значениях параметров невязности (k / μ и η / ε). Эти обстоятельства следует учитывать при построении элементов селективного возбуждения колебаний резонатора.

6. Расчет дисперсионных характеристик волн однородного гиротропного радиального волновода

Рассмотрим радиальный волновод, образованный двумя идеально проводящими параллельными плоскостями (рис. 5). Пространство между плоскостями заполнено однородной бигиротроп-

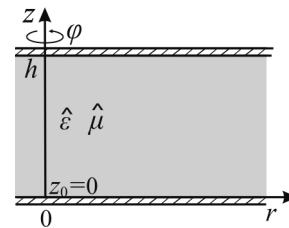


Рис. 5. Однородный радиальный гиротропный волновод

ной средой с магнитной и диэлектрической проницаемостями вида (1). При этом внешнее воздействие полагаем сонаправленным с осью Oz . Электромагнитное поле рассматриваемой структуры представляется в цилиндрической системе координат (r, φ, z) . Проведем расчет дисперсионных характеристик однородного гиротропного радиального волновода (ОГРВ).

Применим L -подход к решению обобщенного уравнения Гельмгольца как наиболее оптимального метода решения с точки зрения замкнутости результирующего дисперсионного уравнения. При этом достаточно использовать граничное условие равенства нулю азимутальной компоненты электрического поля на границе $z = h$. Используя выражение для составляющей поля E_φ (17) и подставляя его в граничное условие $E_\varphi|_{z=h} = 0$, приходим к функциональному уравнению относительно двух неизвестных амплитудных множителей и зависимостью от радиальной координаты r . Чтобы избавиться от радиальной зависимости множителей амплитудных коэффициентов разложения поля, необходимо сгруппировать все члены, зависящие от $J'_n(\vartheta_0 r)$, и члены с зависимостью вида $nJ_n(\vartheta_0 r) / (\vartheta_0 r)$ друг с другом, а затем приравнять получившиеся алгебраические суммы нулю. В результате приходим к СЛАУ второго порядка относительно

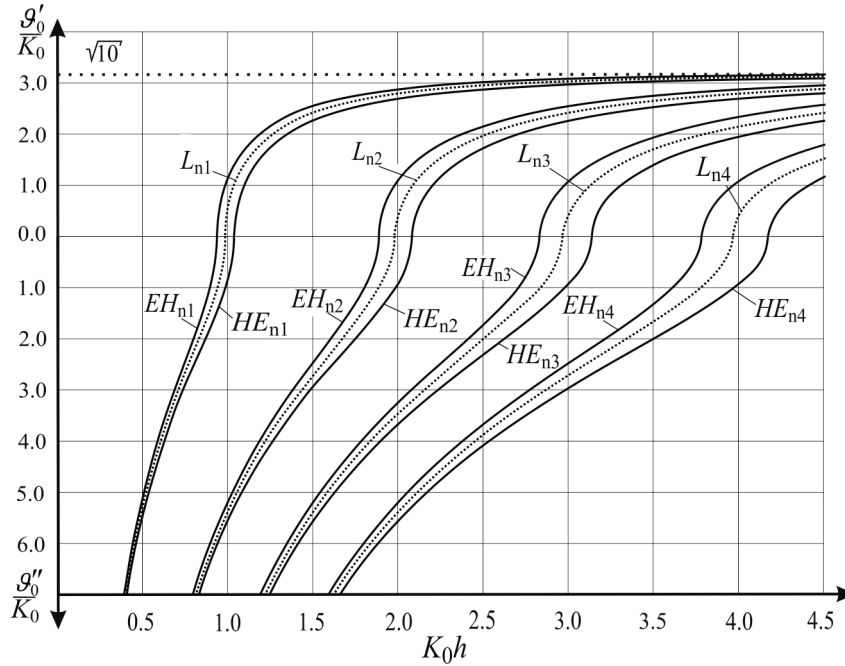


Рис. 6. Дисперсионные характеристики собственных волн однородного гироволновода

коэффициентов A_1 и A_2 . Условие нетривиальности решения СЛАУ в виде равенства нулю главного определителя системы обуславливает дисперсионное уравнение собственных волн ОГРВ в виде:

$$Q_1 P_2 - Q_2 P_1 = 0. \quad (20)$$

Как следует из приведенных пояснений к выводу уравнения (20), зависимость от азимутального индекса колебаний n исчезла. Дисперсионные характеристики также инвариантны к одновременному изменению знаков параметров k и η .

Результаты решения дисперсионного уравнения (20) для ОГРВ с параметрами $h = 10$ мм, $\mu = \mu_z = 1$, $\varepsilon = \varepsilon_z = 1$, $\eta = 0$, $k = 0.1$ приведены на рис. 6 в виде зависимости от нормированной частоты ($K_0 h$) нормированной действительной \mathcal{G}'_0 / K_0 и мнимой \mathcal{G}''_0 / K_0 частей поперечной постоянной распространения. На рисунке также приведены дисперсионные характеристики собственных распространяющихся и реактивно затухающих волн соответствующего однородного диэлектрического радиального волновода (ОДРВ) с параметрами тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей, идентичными соответствующим параметрам гиротропной среды (ε , ε_z , μ , μ_z) и $\eta = 0$, $k = 0$.

Собственные волны изотропного ОДРВ являются продольно магнитными LM_{nl} и продольно электрическими LE_{nl} с идентичными дисперсионными характеристиками, поэтому обозначим их как L_{nl} . Собственные волны ОГРВ являются

гибридными, поскольку из формул (13) видно, что при $k \neq 0$ и $\eta \neq 0$ в структуре поля присутствуют как продольная (E_z), так и поперечные компоненты поля (E_φ).

Основным свойством гибридных собственных волн ОГРВ является расщепление дисперсионных кривых собственных волн: в результате наблюдаются дуплетные HE_{nl} - и EH_{nl} -волны, где l – продольный индекс собственных волн. В спектре собственных волн ОГРВ с ненулевым продольным индексом имеют место распространяющиеся и реактивно-затухающие волны. Волна HE_{n0} -типа является бездисперсной и при $\eta = 0$, $k = 0.1$, $\mathcal{G}_0 / K_0 = 0.994987\sqrt{10}$. С увеличением модуля параметра невязности смещение нормированной поперечной постоянной распространения HE_{n0} -волны вниз от значения $\sqrt{\varepsilon\mu}$ увеличивается, а для дуплетных волн наблюдается рост величины расщепления дисперсионных характеристик.

Следует отметить, что для продольных постоянных распространения справедливы следующие соотношения:

$$\beta_1^{EH} h / \pi = \beta_2^{HE} h / \pi = l \quad \text{и} \quad (\beta_2^{EH} h / \pi)^2 < l^2, \quad (\beta_1^{HE} h / \pi)^2 > l^2. \quad (21)$$

Другими словами, продольный индекс собственных волн ОДРВ равен числу вариаций поля по продольной координате одной из парциальных волн, полученных в рамках L -метода решения ОУГ. Число вариаций поля по координате

z второй парциальной волны меньше индекса l для EH -волн и больше - для волн HE -типа.

В заключение следует отметить, что уравнение (20) может быть с успехом применено для расчета резонансных частот собственных EH_{nm0} -колебаний однородного гиротропного резонатора (рис. 1), если положить $\vartheta_0 = \zeta_{nm} / a$. Другими словами, уравнение (20) можно рассматривать как характеристическое уравнение EH_{nm0} -колебаний однородного гиротропного цилиндрического резонатора. Результаты расчета при этом полностью совпадают с приведенными на рис. 3 и, в отличие от T -метода решения обобщенного уравнения Гельмгольца, не требуют дополнительного анализа.

Заключение

Проведенный анализ двух частных решений обобщенного уравнения Гельмгольца позволил осуществить расчет полного спектра собственных колебаний круглого однородного бигиротропного резонатора и характеристик дисперсии собственных волн однородного гиротропного радиального волновода. Разработанные при этом T - и L -методы в перспективе могут применяться при решении широкого спектра краевых задач для направляющих и резонансных структур с послойным гиротропным заполнением. Из проведенного анализа следует, что для радиально-неоднородных гиротропных структур (волноводов или резонаторов) именно T -подход позволит получить решение в замкнутом виде, тогда как

L -метод предпочтителен в случае продольно-нерегулярных структур. Расчет полного спектра волн направляющих структур сложной геометрической конфигурации с гиротропным заполнением, очевидно, необходимо проводить на базе комбинации обоих методов.

Список литературы

1. Микаэлян А.Л. Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1963. 664 с.
2. Лемберг К.В., Сержантов А.М. Электрически управляемый микрополосковый жидкокристаллический фазовращатель // Современные проблемы радиоэлектроники: сб. научн. ст. Красноярск: ИПК СФУ, 2009. С. 111–114.
3. Krupka J. Measurements of all complex permeability tensor components and the effective line widths of microwave ferrites using dielectric ring resonators // Transactions on MTT. 1991. Vol. 39. № 7. P. 1148–1157.
4. Абрамов В.П., Дмитриев В.А., Шелухин С.А. Невзаимные устройства на ферритовых резонаторах. М.: Радио и связь, 1989. 200 с.
5. Козлов В.А., Назаров А.В., Светлаков Ю.А. Расчет и технология изготовления феррит-диэлектрических элементов волноводных КВЧ-циркуляторов и вентилялей // Антенны. 2007. Вып. 2 (117). С. 25–30.
6. Назаров А.В., Раевский С.Б. О спектре волн круглого открытого ферритового волновода // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49. № 4. С. 439–444.
7. Электродинамика и распространение радиоволн: учебник / В.А. Неганов [и др.]; под ред. В.А. Неганова и С.Б. Раевского. Изд. 4-е, доп. и перераб. М.: Радиотехника, 2009. 744 с.

Two approaches to the solution of resonance and guiding gyrotropic filling structures boundary value problems

E.A. Mihalitsyn, A.S. Raevsky, A.Yu. Sedakov

The T&L methods of boundary value problems solving to concern electrodynamic gyrotropic filling structures have been developed in the cylindrical coordinate system. Approaches are based on two linearly independent solutions of the generalized Helmholtz equation of the gyrotropic medium. The complete resonant frequencies spectrum of a cylindrical homogeneous gyrotropic resonator has been obtained. The eigenwaves dispersion characteristics of a homogeneous gyrotropic radial waveguide have been calculated. The structure transforming effect of electromagnetic fields of a cylindrical homogeneous gyrotropic resonator eigenmodes with a non-reciprocity parameter sweeping is illustrated in the paper.

Keywords: gyrotropic resonator, generalized Helmholtz equation, bigyrotropic medium, radial girowaveguide, the eigenmodes fields structure transforming effect.