2014 г. *Том 17, № 1*

Физика волновых процессов и радиотехнические системы

УДК 621.396.677.45

Алгоритм анализа тонкого электрического вибратора

Д.А. Куприянов

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики
443010, Российская Федерация, г. Самара
ул. Л. Толстого, 23

Составлен простой алгоритм расчета вибраторных антенн, включающий определение тока по вибратору и диаграмму направленности. Приведен пример.

Ключевые слова: уравнения Халлена, вибраторная антенна, диаграмма направленности.

1. Распределение тока по вибратору

Рассмотрим симметричный вибратор. Будем исходить из интегрального уравнения Халлена [1].

$$\int_{-l}^{l} I_z(z')G(z-z')dz' = C\cos kz - \frac{i2\pi U}{Z}\sin k\,|\,z\,|, \quad (1)$$

где $I_z(z')$ − неизвестное распределение тока; C − неизвестная постоянная; U − напряжение в зазоре вибратора; $G(z-z')$ − функция Грина:

$$G(z-z') = \frac{e^{-ikR}}{R} = \frac{exp\left(-ik\sqrt{(z-z')^2+a^2}\right)}{\sqrt{(z-z')^2+a^2}}.$$

Существует много методов решения интегрального уравнения Халлена; рассмотрим один из них. Решение уравнения (1) можно представить в виде разложения искомой функции в ряд по некоторой системе функций $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$, ... :

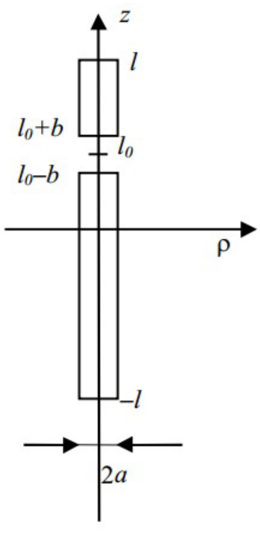

Рис. 1. Геометрия вибратора

$$I_z(z) = \sum_{n=1}^{N} I_n f_n(z), \quad (2)$$

где I_n − коэффициенты разложения, подлежащие определению. Функции $f_n(z)$ называются базисными; они должны быть линейно независимы. В случае точного решения уравнения Халлена они должны составлять полную систему функций и суммирование в (2) должно быть бесконечным. Удобно функции $f_n(z)$ выбирать так, чтобы удовлетворялись граничные условия для тока на концах вибратора, т. е.

$$f_n(\pm l) = 0\,.$$

Для сравнительно коротких вибраторов, представляющих наибольший практический интерес, оказывается достаточным с инженерной точки зрения ограничиваться несколькими членами ряда (2). Подставляя (2) в уравнение (1), получим

$$\sum_n I_n \int_{-l}^{l} f_n(z')G(z-z')dz' = \\ = C\cos kz - \frac{i2\pi U}{Z}\sin k\,|\,z\,|. \quad (3)$$

Для решения уравнения (3) относительно неизвестных коэффициентов I_n необходимо свести его к системе линейных алгебраических уравнений. Это можно сделать, например, методом согласования в точках. Для этой цели умножим левую и правую часть уравнения (3) на дельта-функции $\delta(z-z_p)$, где $p = 1, 2, 3, \ldots$ − номера точек разбиения интервала $-l \leqslant l$ на отрезки. Затем проинтегрируем полученное выражение по z от $-l$ до l и получим следующую систему уравнений:

$$\sum_n I_n \int_{-l}^{l} f_n(z')G(z_p - z')dz' =$$
$$= C\cos kz_p - \frac{i2\pi U}{Z}\sin k\,|\,z_p\,|; \qquad (4)$$
$$p = \overline{1, N}.$$

Таким образом, интегральное уравнение Халлена (1) сведено к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных $I_n (n = \overline{1, N})$. Переход от (1) к (4) означает, что интегральное уравнение Халлена (1) удовлетворяется только в N точках $z_p (p = \overline{1, N})$.

Для коротких вибраторов оказывается удобным выбирать базисные функции в виде простых степенных выражений:

$$f_n(z) = \left(1 - \frac{|\,z\,|}{l}\right)^n; \quad n = 1\ldots N,$$

и, следовательно, представить разложение (2) в виде полиномов.

Поскольку в уравнениях (4) содержится неизвестная постоянная C, порядок системы этих уравнений должен быть на единицу больше порядка полинома N. Таким образом, задача сводится к решению на ПЭВМ следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{n=1}^{N} I_n F_n(z_p) - C\cos kz_p =$$
$$= -\frac{i2\pi U}{Z}\sin k\,|\,z_p\,|; \qquad (5)$$
$$p = 1, 2, 3\ldots N+1;$$

где

$$F_n(z) = \int_{-l}^{l}\left(1 - \frac{|\,z'\,|}{l}\right)\frac{exp\left(-ik\sqrt{(z-z')^2 + a^2}\right)}{\sqrt{(z-z')^2 + a^2}}dz'.$$

Значения функции $F_n(z)$ можно найти методами численного интегрирования.

Выбор координат точек разбиения z_p удобно производить по правилу

$$z_p = (p-1)\frac{1}{N}, \quad p = 1, 2, 3, \ldots N+1$$

и определять, таким образом, в (5) значения коэффициентов только по точкам z_p одного плеча вибратора. Для симметричного вибратора этого вполне достаточно. После определения коэффициентов I_n находится распределение токов в вибраторе по формуле

$$I_z(z) = \sum_{n=1}^{N} I_n \left(1 - \frac{|\,z\,|}{l}\right)^n. \qquad (6)$$

Рассмотрим случай, когда вибратор находится в вакууме. С учетом того, что $k \equiv k_0 = 2\pi / \lambda$, $Z \equiv Z_0 = 120\pi$, перейдем в уравнениях (5) к безразмерным величинам $t' = z' / l$, $t = z / l$:

$$\sum_{n=1}^{N} I_n F_n(t_p) - C\cos 2\pi x t_p =$$
$$= -\frac{i2\pi U}{Z_0}\sin 2\pi x\,|\,t_p\,|,$$

где

$$t_p = (p-1)\frac{1}{N}; \quad p = 1, 2, 3, \ldots N+1,$$
$$F_n(t) =$$
$$= \int_{-l}^{l}(1-|\,t'\,|)^n \frac{exp\left(-i2\pi\delta\sqrt{(t-t')^2 + y^2}\right)}{\sqrt{(t-t')^2 + y^2}}dt',$$
$$\delta = l / \lambda, \quad y = a / l.$$

Выражение (6) перепишем в следующем виде:

$$I_z(t) = \sum_{n=1}^{N} I_n (1-|\,t\,|)^n. \qquad (7)$$

2. Определение диаграммы направленности вибратора

Нормированная характеристика направленности имеет вид:

$$F_\theta(\theta, \phi) = \frac{E_\theta(\theta, \phi)}{|\,E_{\theta max}(\theta, \phi)\,|}. \qquad (8)$$

Зная распределения тока вдоль вибратора, можно найти составляющую поля E_θ:

$$E_\theta = -\frac{iZ\delta exp(-ikR)}{2r} \times$$
$$\times \sum_{n=1}^{N} I_n \int_{-l}^{l}(1-|\,t'\,|)^n exp(i2\pi\delta t'\cos\theta)dt'. \qquad (9)$$

На рис. 1 показаны: l − длина половины вибратора; a − радиус провода; $\delta = l / \lambda$ − отношение половины длины вибратора к длине волны.

3. Пример численного расчета тонкого электрического вибратора

Все вычисления и построения произведены в системе MathCad 15 для следующих параметров: $\delta = l / \lambda = 7 / 10$, $y = a / l = 1 / 400$.

В качестве аппроксимации функции (6), описывающей распределение тока по вибратору, использовался полином 5-го порядка. Для определения коэффициентов I_n необходимо решить систему из 6 линейных уравнений:

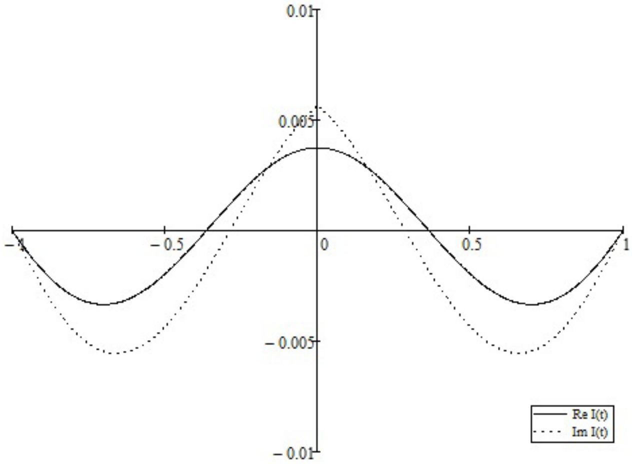

Рис. 2. Распределение тока вдоль вибратора с параметрами $l / \lambda = 7 / 10,\ a / l = 1 / 400$

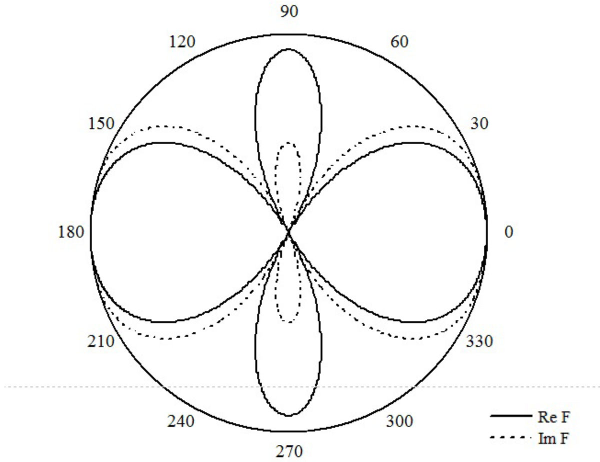

Рис. 3. Нормированная характеристика направленности с параметрами $l / \lambda = 7 / 10,\ a / l = 1 / 400$

$$\sum_{n=1}^{5} I_n F_n(t_p) - C\cos 2\pi\delta t_p = \\ = -\frac{i2\pi U}{Z_0}\sin 2\pi\delta \mid t_p \mid; \qquad (10)$$

$$p = \overline{1,6},$$

где $t_p = (p-1) / 5$. Систему алгебраических уравнений (10) будем решать методом LU-разложения (функция lsolve).

Вычисляем коэффициенты I_n для параметров $\delta = l / \lambda = 7 / 10,\ y = a / l = 1 / 400$:

$I_1 = -0.02 - i0.027;$

$I_2 = 0.017 + i6.821 \cdot 10^{-3};$

$I_3 = 0.068 + i0.112;$

$I_4 = -0.087 - i0.118;$

$I_5 = 0.026 + i0.032.$

Подставив найденные коэффициенты в формулу (7), построим графики распределения тока вдоль вибратора (рис. 2). Сплошной линией показана действительная часть тока, а штриховой – мнимая часть составляющей.

Подставляя эти коэффициенты в (9), определяем зависимость компоненты поля E_θ от угла θ. Подставляя эти значения в (8), находим нормированную характеристику направленности вибратора (рис. 3).

Список литературы

1. Неганов В.А. Излучение и дифракция электромагнитных волн. М.: Радио и связь, 2004. 203 с.
2. Неганов В.А., Табаков Д.П., Яровой Г.П. Современная теория и практическое применение антенн. М.: Радиотехника, 2009. 720 с.

Analysis algorithm of the thin electric vibrator

D.A. Kupriyanov

Compiled a simple algorithm for calculating the dipole antennas. Includes current detection on the vibrator and use pattern. There is an example.

Keywords: Hallen equation, dipole antenna, the radiation pattern.