2014 г. Том 17, № 1

Физика волновых процессов и радиотехнические системы

УДК 621.382

Влияние конечной проводимости стенок на структуру поля и характеристики круглого волновода

В.В. Бирюков, В.А. Грачев

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева
603950, Российская Федерация, г. Нижний Новгород
ул. Минина, 24

Рассмотрено использование импедансного метода для решения задачи о распространении волн в круглом волноводе с неидеально проводящей поверхностью. Приведено сравнение с результатами, получаемыми с помощью метода возмущений.

Ключевые слова: круглый волновод, уравнение Гельмгольца, дисперсионное уравнение, импедансные граничные условия.

Распространение электромагнитных волн в равновесных системах обязательно сопровождается диссипацией энергии. Тепловые потери являются важной характеристикой волновых процессов, во многом определяющей технические параметры разнообразных приборов и устройств СВЧ- и КВЧ-диапазонов. Поэтому расчету потерь при анализе электромагнитных полей в электродинамических системах уделяется достаточно большое внимание [1–11]. При этом оказывается, что учет потерь приводит не только к количественным изменениям характеристик системы, но в ряде случаев и к качественному изменению структуры полей [7].

Решение уравнений Максвелла для адекватных реальным устройствам моделей представляет весьма трудную задачу. Один из эффективных методов упрощения этой задачи – метод эквивалентных граничных условий, позволяющий исключить из рассмотрения некоторую область пространства (и поле в ней), задавая соответствующие условия на ее границе [1]. Классическим примером являются импедансные граничные условия Щукина – Леонтовича, описывающие поглощение энергии электромагнитного поля в хорошо проводящих средах.

Это условие выводится для плоской безграничной металлической поверхности. Но оно применимо и для криволинейной поверхности, если радиус кривизны много больше характерного масштаба изменения поля (в этом случае граница ведет себя как локально плоская). В произвольном случае можно получить более общие граничные условия, содержащие поправки на кривизну поверхности [2–3] и учитывающие особенности на углах и ребрах [4].

Основная сложность состоит в получении точного выражения для поверхностного импеданса, учитывающего не только параметры материала, но и структуру электромагнитного поля в волноводе. В большинстве работ [5–8] используется приближенное («классическое») выражение для импеданса проводящей поверхности [9], которое обеспечивает точное выполнение граничных условий лишь при нормальном падении волны на поверхность металла.

Строгий расчет с учетом проникновения поля вглубь стенки является примером решения задачи о распространении цилиндрических волн в поперечно-неоднородной среде. Даже в кусочно-однородной по своим свойствам среде в волне, вообще говоря, отличны от нуля все шесть компонент поля и деление волн на магнитные и электрические уже не имеет смысла. Краевая задача для потенциальных функций становится очень громоздкой. Однако для металлов в сантиметровом диапазоне волн волновое сопротивление Z очень малая по модулю комплексная величина, скин-эффект сильно выражен и конечная проводимость с хорошей точностью может быть учтена с помощью граничного условия Щукина – Леонтовича. При этом поле в стенках волновода не представляет интереса, а поле внутри волновода определяется решением тех же уравнений, что и при идеальной проводимости стенок.

Рассмотрим круглый экранированный волновод без диэлектрического заполнения ($\tilde{\varepsilon} = 1$, $\tilde{\mu} = 1$, $\sigma = 0$). Считаем, что толщина проводящей стенки волновода много больше глубины проникновения поля. Запишем уравнения Гельмгольца относительно продольных составляющих полей гибридных волн в цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}+\frac{\omega^2}{c^2}E_z=0\,, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2}+\frac{\omega^2}{c^2}H_z=0\,. \qquad (2)$$

Решения этих уравнений имеют вид:

$$E_z(\rho,\theta,z)=A\,J_n(\chi\rho)\cos n\theta\,e^{-j\beta z}\,, \qquad (3)$$

$$H_z(\rho,\theta,z)=B\,J_n(\chi\rho)\sin n\theta\,e^{-j\beta z}\,, \qquad (4)$$

где $\chi^2=(\omega/c)^2-\beta^2$, χ – поперечное волновое число; β – постоянная распространения; A и B – произвольные постоянные; $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$; c – скорость света в вакууме.

Составляющие полей E_ρ, E_θ, H_ρ и H_θ определяются из соотношений:

$$\begin{aligned} E_\rho&=\frac{-j}{\chi^2}\left(\beta\frac{\partial E_z}{\partial\rho}+\frac{\omega\mu_0}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\theta}\right),\\ E_\theta&=\frac{-j}{\chi^2}\left(\frac{\beta}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\theta}-\omega\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial\rho}\right), \end{aligned} \qquad (5)$$

$$\begin{aligned} H_\rho&=\frac{j}{\chi^2}\left(\frac{\omega\varepsilon_0}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\theta}-\beta\frac{\partial H_z}{\partial\rho}\right),\\ H_\theta&=\frac{-j}{\chi^2}\left(\omega\varepsilon_0\frac{\partial E_z}{\partial\rho}+\frac{\beta}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\theta}\right). \end{aligned} \qquad (6)$$

Таким образом, согласно (3)–(6), компоненты поля гибридных волн имеют вид:

$$\begin{aligned} E_\rho&=-j\left(\frac{A\beta}{\chi}J_n'(\chi\rho)+\frac{Bn\omega\mu_0}{\chi^2\rho}J_n(\chi\rho)\right)\cos n\theta\ e^{-j\beta z},\\ E_\theta&=j\left(\frac{An\beta}{\chi^2\rho}J_n(\chi\rho)+\frac{B\omega\mu_0}{\chi}J_n'(\chi\rho)\right)\sin n\theta\ e^{-j\beta z},\\ E_z(\rho,\theta,z)&=A\,J_n(\chi\rho)\cos n\theta\,e^{-j\beta z}\,, \qquad (7)\\ H_\rho&=-j\left(\frac{An\omega\varepsilon_0}{\chi^2\rho}J_n(\chi\rho)+\frac{B\beta}{\chi}J_n'(\chi\rho)\right)\sin n\theta\ e^{-j\beta z},\\ H_\theta&=-j\left(\frac{A\omega\varepsilon_0}{\chi}J_n'(\chi\rho)+\frac{Bn\beta}{\chi^2\rho}J_n(\chi\rho)\right)\cos n\theta\ e^{-j\beta z},\\ H_z(\rho,\theta,z)&=B\,J_n(\chi\rho)\sin n\theta\,e^{-j\beta z}\,. \end{aligned}$$

Граничные условия Щукина – Леонтовича в общем случае определяются выражением

$$\left[\vec n,\vec E\right]=-Z_2\left[\vec n,\left[\vec n,\vec H\right]\right], \qquad (8)$$

где $\vec n$ – нормаль к поверхности однородной среды с потерями (направлена вглубь среды).

В рассматриваемой нами задаче вектор нормали $\vec n\uparrow\uparrow\vec e_\rho$. В этом случае векторное условие (8) распадается на два условия, связывающие тангенциальные составляющие векторов $\vec E$ и $\vec H$ поля в непроводящей среде на границе с проводником, имеющим волновое сопротивление Z_2:

$$E_z=-Z_2H_\theta\,,\quad E_\theta=Z_2H_z\,, \quad (9)$$

где

$$Z_2=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0\tilde\varepsilon_{к2}}}\,,\quad \tilde\varepsilon_{к2}=\tilde\varepsilon_2'-\frac{j\sigma_2}{\omega\varepsilon_0};$$

$\tilde\varepsilon_{к2}$ – относительная комплексная диэлектрическая проницаемость проводящей среды; σ_2 – проводимость.

Применяя граничное условие (9) к выражениям для компонент поля (7) получим систему уравнений относительно постоянных A и B:

$$\begin{cases} A\left[J_n(\chi a)-\dfrac{jZ_2\omega\varepsilon_0}{\chi}J_n'(\chi a)\right]-B\dfrac{jZ_2n\beta}{\chi^2 a}J_n(\chi a)=0,\\ A\dfrac{jn\beta}{\chi^2 a}J_n(\chi a)+B\left[\dfrac{j\omega\mu_0}{\chi}J_n'(\chi a)-Z_2J_n(\chi a)\right]=0. \end{cases}$$

Записывая условие нетривиальности ее решения (приравнивая нулю главный определитель), получаем дисперсионное уравнение волн круглого экранированного волновода с неидеально проводящей стенкой:

$$\begin{aligned} &\left[J_n(\chi a)-jZ_2\frac{\omega\varepsilon_0}{\chi}J_n'(\chi a)\right]\times\\ &\times\left[j\frac{\omega\mu_0}{\chi}J_n'(\chi a)-Z_2\,J_n(\chi a)\right]= \qquad (10)\\ &=Z_2\left[\frac{n\beta}{\chi^2 a}J_n(\chi a)\right]^2. \end{aligned}$$

Решение данного дисперсионного уравнения для нескольких волн круглого волновода с медными стенками отражено на рис. 1. Постоянные распространения, полученные с учетом конечной проводимости медных стенок, на графике неотличимы от значений, получаемых в приближении идеально проводящих стенок.

Сравнение коэффициентов затухания, полученных двумя этими методами (рис. 2), показывает их хорошее совпадение при значениях удельной проводимости $5{,}8\cdot10^7$ сим/м (проводимость меди). Графики зависимостей, полученных обоими методами, совпадают. Отличие в этом случае составляет не более 0,05 дБ/км.

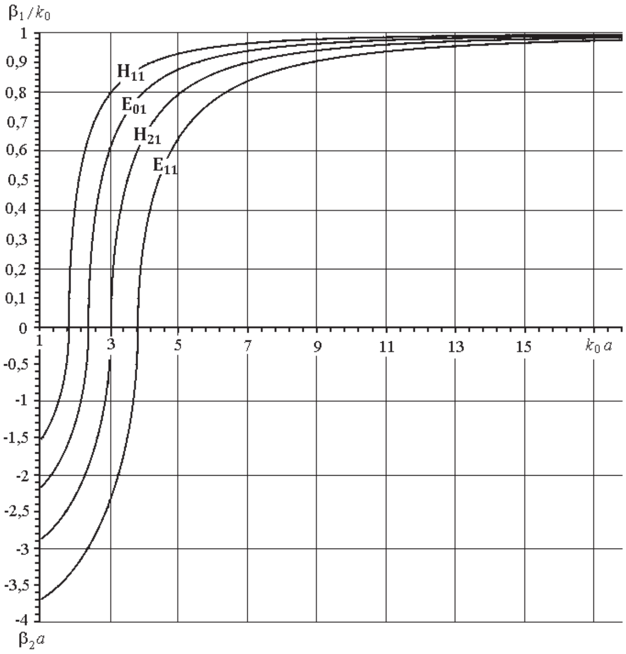

Рис. 1. Зависимости нормированных действительной β_1 и мнимой β_2 частей постоянных распространения первых 4-х волн круглого волновода от нормированной частоты

Наблюдается некоторое занижение величины потерь (растущее с ростом частоты) при использовании метода возмущений.

При уменьшении проводимости материала стенок волновода различие коэффициентов затухания становится более заметным. На рис. 3 показаны зависимости коэффициентов затухания основной волны круглого волновода от частоты при удельной проводимости стенок 10^3 сим/м, полученные импедансным методом и методом возмущений.

Как отмечалось выше, наличие потерь в стенках волновода может приводить к изменению структуры поля. Раздельное существование E- и H-волн становится невозможным (за исключением азимутально симметричных). В частности, основная волна круглого волновода H_{11} становится гибридной или «квазимагнитной» волной. О степени гибридности этой волны можно судить по соотношению амплитудных коэффициентов B и A. На рис. 4 показана зависимость отношения $A\ /\ B$, нормированного на волновое сопротивление свободного пространства, от удельной проводимости материала стенок волновода.

Как видно из рисунка, с уменьшением удельной проводимости материала стенок волновода структура электромагнитного поля меняется. Это изменение необходимо учитывать как при расчете затухания волны в таком волноводе, так и при проектировании устройств возбуждения.

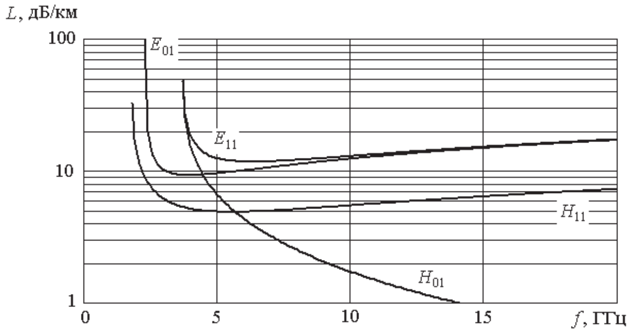

Рис. 2. Зависимости затухания первых 4 волн круглого волновода от частоты. Радиус волновода $a = 5$ см, удельная проводимость материала стенок волновода $\sigma = 5{,}8 \cdot 10^7$ сим/м

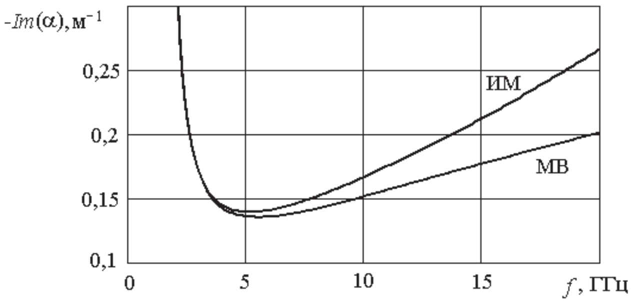

Рис. 3. Зависимости коэффициентов затухания основной волны круглого волновода от частоты. Радиус волновода $a = 5$ см, удельная проводимость материала стенок волновода $\sigma = 10^3$ сим/м

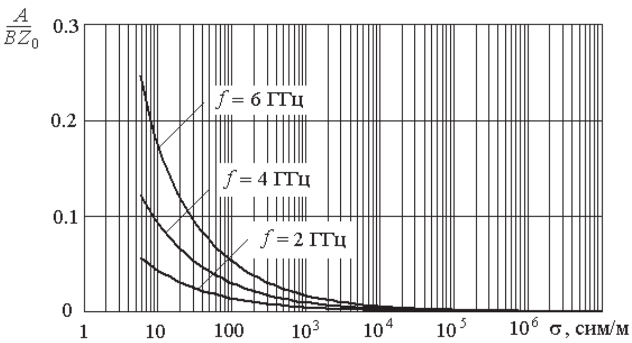

Рис. 4. Влияние удельной проводимости материала стенок волновода на структуру поля основной волны: A − амплитуда E_z; B − амплитуда H_z; Z_0 − волновое сопротивление свободного пространства

Список литературы

1. Ильинский А.С., Слепян Г.Я. Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. М.: МГУ, 1983. 232 с.

2. Mitsher K.M. An integral equation approach to scattering from a body of finite conductivity // Radio Science. 1967. V. 2. № 12. P. 1459−1470.

3. Ong T.T., Celli V., Marvin A.M. General relation between surface impedance and surface curvature // JOSA. 1994. V. A11. P. 759−765.

4. Yuferev S., Proekt L., Ida N. Surface impedance boundary conditions near corners and edges: rigorous consideration // IEEE Transactions on Magnetics. 2001. V. 37. № 5. P. 3465−3468.

5. Conductor loss in hollow waveguides using a surface integral formulation / M. Swaminathan [et al.] // IEEE Transactions on MTT. 1992. V. 40. № 11. P. 2034–2041.

6. Кураев А.А., Синицын А.К. Влияние конечной проводимости металлических стенок на характеристики мощных релятивистских приборов СВЧ с нерегулярными электродинамическими системами // Доклады БГУИР. 2006. № 3(15). С. 89–92.

7. Кураев А.А., Синицын А.К., Яроменок С.И. Поля в продольно-периодических волноводах с учетом потерь в металлических стенках // Доклады БГУИР. 2008. № 1(31). С. 48–54.

8. Котельников И.А. О затухании в волноводе // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 9. С. 91–96.

9. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1989. 544 с.

10. Бирюков В.В., Раевский С.Б. Расчет волноводов с учетом конечной проводимости стенок на основе обобщенного метода Галеркина // Антенны. 2009. № 1. С. 5–12.

11. Бирюков В.В. Учет конечной проводимости при расчете волноводов СВЧ- и КВЧ-диапазонов на основе релятивистского подхода // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34. Вып. 2. С. 75–82.

Effect of the finite conductivity of the walls on the circular waveguide field structure and characteristics

V.V. Biryukov, V.A. Grachev

The use of the impedance method for the decision of a task on propagation of waves in a round waveguide with a non-ideal conducting surface is considered. The comparison with results received with the help of a disturbance method is given.

Keywords: circular waveguide, the Helmholtz equation, the dispersion equation, the impedance boundary conditions, the perturbation method.