

## О дискретных отображениях осциллятора Ван дер Поля

В.В. Зайцев

Самарский государственный университет  
443011, Российская Федерация, г. Самара  
ул. Ак. Павлова, 1

Предложены новые дискретные отображения классической автоколебательной системы – осциллятора Ван дер Поля. Отображения получены на основе сочетания методов параметрического синтеза и инвариантности импульсных характеристик динамических систем. Приведены примеры генерации регулярных и хаотических автоколебаний в дискретном времени.

*Ключевые слова:* нелинейная динамика, дискретное время, автоколебательная система, динамический хаос.

1. Современная нелинейная динамика [1] рассматривает эволюцию динамических систем как в непрерывном (НВ), так и дискретном времени (ДВ). Модели и методы нелинейной НВ-динамики широко и успешно применяются в радиофизике, биофизике, экологии, химических технологиях и многих других отраслях науки и техники. В области дискретного времени нелинейная динамика смыкается с цифровой обработкой сигналов [2], и объекты ДВ-динамики могут служить основой алгоритмов обработки. Для выполнения этих функций необходим широкий круг ДВ-систем, обеспечивающий возможность выбора заданной характеристики преобразования сигналов. Поиск таких систем следует рассматривать в качестве одной из задач нелинейной динамики дискретного времени.

Как правило, объекты НВ-динамики являются результатом формализации физических (химических, биологических и т. д.) моделей реально существующих систем, в то время как ДВ-системы в большинстве случаев возникают в результате дискретизации времени в НВ-системах. При этом конкретная форма процесса дискретизации существенным образом влияет на характеристики полученной (синтезированной) ДВ-системы. Заметим, что для обозначения ДВ-систем часто используется также термин «дискретные отображения».

Широко известен ряд способов построения дискретных отображений. В качественной теории динамических систем это сечения Пуанкаре [1]. Для гамильтоновых систем с помощью введения в гамильтониан нелинейных дельта-воздействий

строятся универсальное и стандартное отображения [3]. Рассматривается также и самый прямой способ дискретизации времени – конечно-разностная аппроксимация производных в дифференциальном уравнении движения системы. Этот подход широко распространен в численном моделировании, но имеет ограниченное применение в теории дискретных сигналов и систем [2].

В теории и практике синтеза линейных дискретных фильтров находит применение метод инвариантности импульсных характеристик (МИИХ). Он привлекателен с физической точки зрения, т. к. сохраняет временные характеристики отклика линейной системы на внешнее воздействие. В работах [4; 5] метод распространен на автоколебательные системы томсоновского типа. В настоящем сообщении МИИХ дополнен элементами параметрического синтеза и получены новые варианты дискретных отображений осциллятора Ван дер Поля – базовой модели теории нелинейных колебаний.

2. В качестве линейной аналоговой системы-прототипа рассмотрим диссипативный осциллятор с одной степенью свободы. Имея в виду дискретизацию времени с интервалом  $\Delta$ , уравнение для свободных колебаний запишем относительно безразмерной временной переменной  $\tau = t\Delta^{-1}$ :

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + 4\pi^2 \omega_0^2 y = -2\pi \frac{\omega_0}{Q} \frac{dy}{d\tau}, \quad (1)$$

где  $\omega_0$  – собственная частота контура, измеряемая в единицах частоты дискретизации;  $Q$  – добротность контура.

В рамках МИИХ НВ-осциллятору ставится в соответствие ДВ-осциллятор

$$y[n] - 2\alpha_0 \cos(2\pi \omega_0) y[n-1] + \alpha_0^2 y[n-2] = 0, \quad (2)$$

где  $\alpha_0$  – параметр линейной диссипации:

$$\alpha_0 = \exp\left(-\pi \frac{\omega_0}{Q}\right). \quad (3)$$

Детали перехода (1) → (2) можно найти в [2] (см. также [6]).

В разностном уравнении движения (2), в отличие от дифференциального уравнения (1), диссипативная составляющая не выделена в явной форме. Такое выделение для высокодобротных осцилляторов проведем путем разложения экспоненты (3) в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} y[n] - 2\alpha_0 \cos(2\pi \omega_0) y[n-1] + \alpha_0^2 y[n-2] &\approx \\ &\approx y[n] - 2 \cos(2\pi \omega_0) y[n-1] + y[n-2] + \\ &+ 2\pi \frac{\omega_0}{Q} (\cos(2\pi \omega_0) y[n-1] - y[n-2]). \end{aligned}$$

Теперь ДВ-осциллятор (2) определяется уравнением движения

$$\begin{aligned} y[n] - 2 \cos(2\pi \omega_0) y[n-1] + y[n-2] &= \\ = -2\pi \frac{\omega_0}{Q} (\cos(2\pi \omega_0) y[n-1] - y[n-2]). \end{aligned} \quad (4)$$

Из сопоставления правых частей уравнений (1) и (4) следует вывод о том, что при переходе к дискретному времени в высокодобротных осцилляторах для неконсервативных частей уравнений движения можно использовать замену

$$\frac{dy}{d\tau} \rightarrow \cos(2\pi \omega_0) y[n-1] - y[n-2]. \quad (5)$$

3. Перейдем теперь к дискретизации времени в осцилляторе Ван дер Поля. Его уравнение движения запишем с выделением диссипативной и активной частей системы:

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + 4\pi^2 \omega_0^2 y = -2\pi \frac{\omega_0}{Q} \frac{dy}{d\tau} + 2\pi \frac{\omega_0}{Q} p g(y) \frac{dy}{d\tau}. \quad (6)$$

Здесь функция активной нелинейности с учетом соответствующей нормировки осциллирующей переменной  $y(\tau)$  имеет вид  $g(y) = (1 - y^2)$ ,  $p$  – коэффициент превышения ( $p > 1$ ) порога генерации ( $p = 1$ ).

Применив к правой части уравнения (6) преобразование (5), получим

$$\begin{aligned} y[n] - 2 \cos(2\pi \omega_0) y[n-1] + y[n-2] &= \\ = -\cos(2\pi \omega_0) (v - \gamma g(y[n-1])) y[n-1] + \\ + (v - \gamma g(y[n-2])) y[n-2], \end{aligned} \quad (7)$$

где введены обозначения  $v = 2\pi \omega_0 / Q$  для полосы линейного осциллятора и  $\gamma = 2\pi \omega_0 p / Q$  для параметра глубины обратной связи. Кроме того, при записи уравнения (7) учтены два члена разложения экспоненты (3) в ряд Тейлора.

Сформированное таким образом нелинейное разностное уравнение (7) есть искомого дискретное отображение осциллятора Ван дер Поля. Являясь интегрируемым отображением, оно дает простой алгоритм генерации дискретных автоколебаний. В качестве объекта теории колебаний в дискретном времени отображение (7) можно также обозначать как ДВ-осциллятор Ван дер Поля. Отметим, что при высоких частотах дискретизации (соответственно при  $\omega_0 \rightarrow 0$ ) разностное уравнение (7) переходит в дифференциальное уравнение (6).

Отображение (7), являясь лишь одним из множества возможных (см., например, [5]), детально воспроизводит в дискретном времени свойства аналоговой автоколебательной системы. Это нетрудно показать цифровым анализом генерируемых (7) временных рядов, но мы воспользуемся здесь методами теории колебаний.

4. Для сокращения записей обозначим через  $\hat{L}_2(y[n])$  разностный оператор гармонических осцилляций в левой части (7), а через  $F(y[n-1], y[n-2])$  – функцию в правой части. С учетом введенных обозначений отображение (7) принимает вид

$$\hat{L}_2(y[n]) = F(y[n-1], y[n-2]). \quad (8)$$

Генерируемый отображением временной ряд представим как

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{2} A[n] Z^n + \frac{1}{2} A^*[n] Z^{-n} = \\ &= \frac{1}{2} A[n] Z^n + \text{к.с.}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $Z = \exp(j2\pi \Omega_0) = Z_r + jZ_i$ ;  $A[n]$  – комплексная амплитуда – медленная функция дискретного времени, связанная с действительными амплитудой  $a[n]$  и фазой  $\phi[n]$  соотношением  $A[n] = a[n] \exp(j\phi[n])$ . С учетом того, что

$$\hat{L}_2(Z^{\pm n}) = 0,$$

действие оператора  $\hat{L}_2(y[n])$  на квазигармоническое колебание (9) приводит к приближенному равенству

$$\begin{aligned} \hat{L}_2\left(\frac{1}{2} A[n] Z^n + \text{к.с.}\right) &= \\ = j(A[n] - A[n-1]) Z_i Z^{n-1} + \text{к.с.} \end{aligned}$$

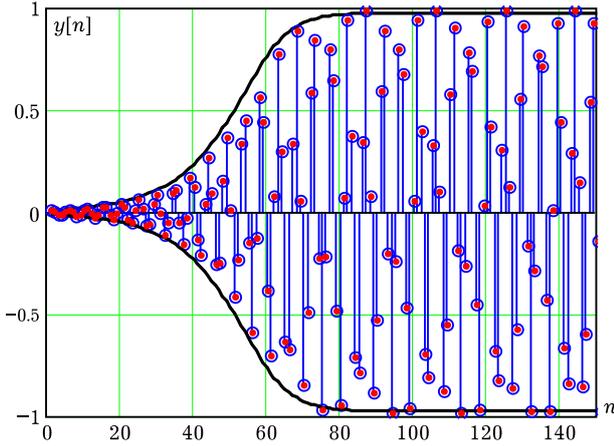


Рис. 1. Процесс установления дискретных автоколебаний

При его выводе использовано условие медленности изменения комплексной амплитуды  $A[n]$  в форме

$$A[n-1] - A[n-2] = A[n] - A[n-1].$$

При подстановке колебания (9) в правую часть уравнения (8) примем во внимание разложение четной функции  $g(y)$  в ряд Фурье

$$\begin{aligned} g(a \cos(2\pi\omega_0 n + \varphi)) &= \\ &= g_0(a) + g_2(a) \cos(4\pi\omega_0 n + 2\varphi) \end{aligned} \quad (10)$$

с коэффициентами  $g_0(a) = 1 - a^2/2$ ,  $g_2(a) = -a^2/2$ . После алгебраических преобразований с учетом допущения о том, что для нелинейных и диссипативных членов  $A[n-2] = A[n-1]$  получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} F(x[n-1], x[n-2]) &= \\ &= -\frac{j}{2} \left( v - \gamma \left( g_0(a[n-1]) + \frac{1}{2} g_2(a[n-1]) \right) \right) \times \\ &\times A[n-1] Z_i Z^{n-1} + \text{к.с.} + \text{в.г.} \end{aligned}$$

Здесь символом «в.г.» обозначены высшие гармоники колебания с частотой  $\omega_0$ .

Теперь из равенства медленных во времени коэффициентов при  $Z^n$  в правой и левой частях уравнения (8) следует укороченное уравнение для комплексной амплитуды автоколебаний:

$$\begin{aligned} A[n] &= A[n-1] - \\ &- \frac{1}{2} \left( v - \gamma \left( g_0(a[n-1]) + \frac{1}{2} g_2(a[n-1]) \right) \right) A[n-1]. \end{aligned} \quad (11)$$

Заметим, что, поскольку нелинейные слагаемые уравнения (11) определяются двумя первыми членами ряда Фурье вида (10), это уравнение справедливо не только для четной квадратичной нелинейности, но и для любой четной функции  $g(y)$ .

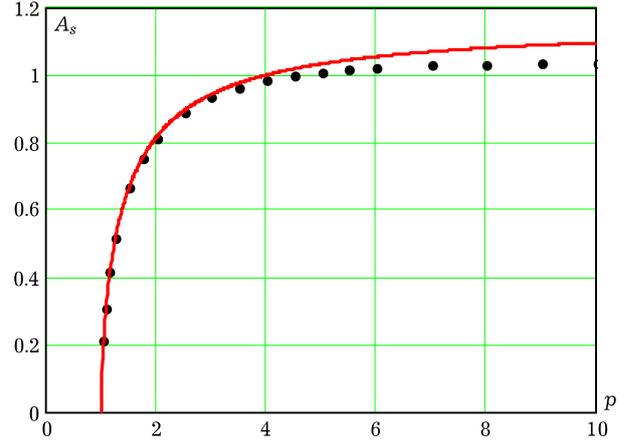


Рис. 2. Зависимость амплитуды автоколебаний от параметра превышения порога генерации

Комплексное укороченное уравнение (11) эквивалентно двум уравнениям для действительных амплитуды  $a[n]$  и фазы  $\varphi[n]$ . Одно из них

$$a[n] \sin(\varphi[n] - \varphi[n-1]) = 0.$$

Следовательно, поправка на частоту  $\Delta\omega = (\varphi[n] - \varphi[n-1]) / 2\pi = 0$ , т. е. автоколебания являются изохронными, как и автоколебания НВ-осциллятора Ван дер Поля.

Второе уравнение, уравнение для амплитуды фактически совпадает с (11):

$$\begin{aligned} a[n] &= a[n-1] - \\ &- \frac{1}{2} \left( v - \gamma \left( g_0(a[n-1]) + \frac{1}{2} g_2(a[n-1]) \right) \right) a[n-1]. \end{aligned} \quad (12)$$

На рис. 1 в качестве примера непрерывными линиями показаны графики зависимостей  $\pm a[n]$  в осцилляторе с параметрами  $\Omega_0 = 0.21$ ,  $Q = 20$  и  $\gamma = 4.5$ , построенные с помощью укороченного уравнения (12) для амплитуды начального возмущения  $a[0] = 0.01$ . Точечный график соответствует временному ряду, генерируемому дискретным отображением (7). При  $n \rightarrow \infty$  уравнение (12) имеет стационарное решение  $A_s = \text{const}$ , соответствующее корню алгебраического уравнения

$$g_0(A_s) + \frac{1}{2} g_2(A_s) = \frac{1}{p}. \quad (13)$$

Хорошее соответствие результатов метода ММА анализируемому колебанию сохраняется в диапазоне  $1 < p \leq 10$ , свидетельством чему является приведенный на рис. 2 график зависимости амплитуды установившихся автоколебаний – корней уравнения (13) от параметра превышения порога генерации. Точками на рисунке показаны значения амплитуды, рассчитанные по реализациям автоколебаний методом аналити-

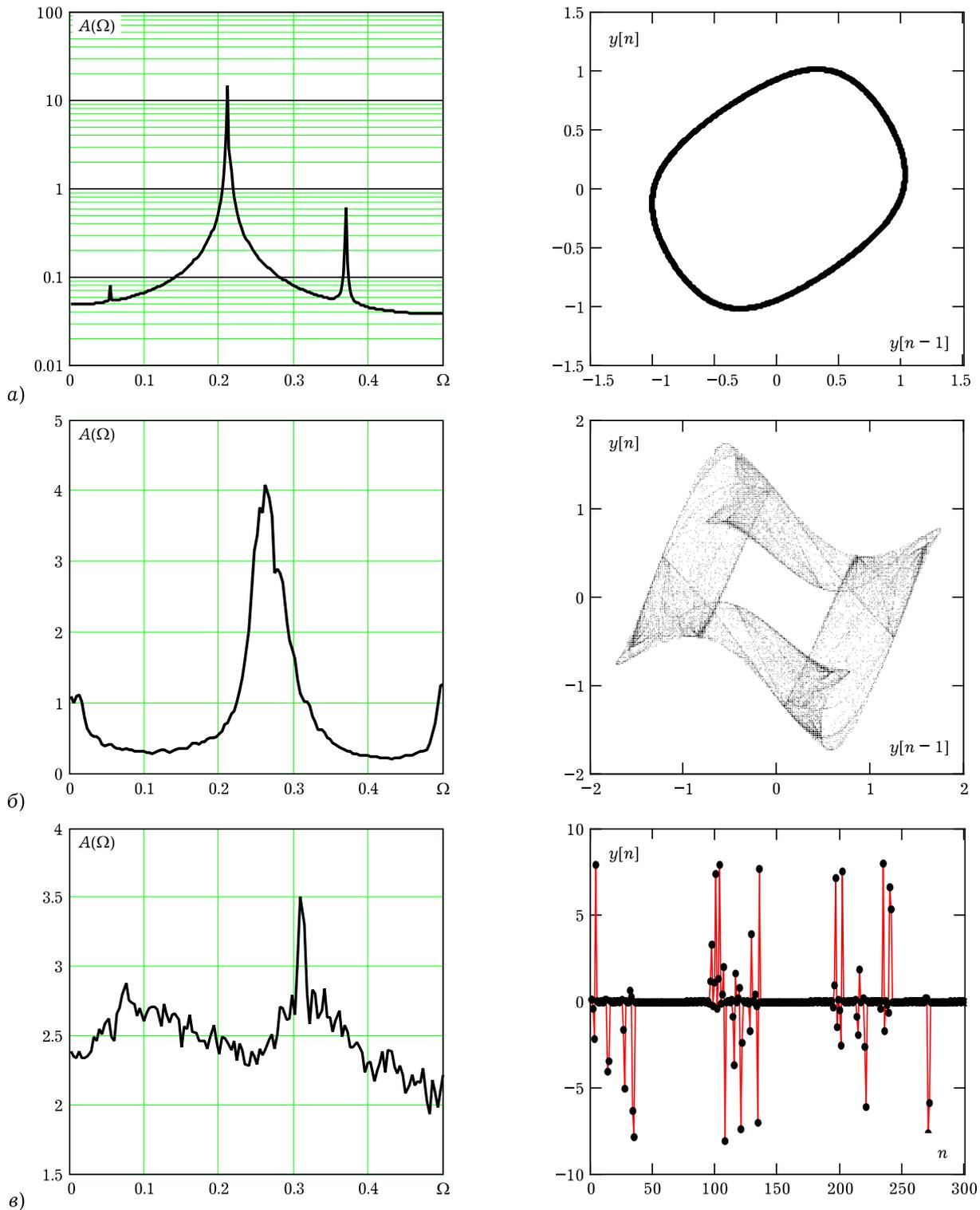


Рис. 3. Амплитудные спектры и фазовые портреты автоколебаний ДВ-осциллятора Ван дер Поля

ческого сигнала. Отметим, что уравнение (13) справедливо и для амплитуды установившихся автоколебаний в аналоговом осцилляторе Ван дер Поля.

Таким образом, результаты проведенного анализа указывают на то, что динамика осцилляций, задаваемых отображением (7), типична для автоколебаний осциллятора Ван дер Поля.

Это дает основания использовать предложенное отображение в алгоритмах нелинейной фильтрации дискретных сигналов, например, подобно тому, как автогенераторы с частотным управлением используются в устройствах связи [7].

5. Дополнив принцип импульсной инвариантности элементами параметрического синтеза,

получим еще одну форму дискретного отображения осциллятора Ван дер Поля. Для чего уравнение движения (6) запишем в виде

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + 4\pi^2 \omega_0^2 y = -2\pi \frac{\omega_0}{Q} (1 - g(y)) \frac{dy}{d\tau}. \quad (14)$$

Коэффициент при первой производной в правой части уравнения (14) рассматриваем как нелинейный параметр диссипации. Тогда при дискретизации времени в нелинейной системе, по аналогии с переходом (1) → (2), совершим переход от дифференциального уравнения (14) к разностному уравнению

$$y[n] - 2\cos(2\pi\omega_0)\alpha(y[n-1])y[n-1] + \alpha^2(y[n-2])y[n-2] = 0, \quad (15)$$

где диссипативная функция с учетом (3) принимает вид

$$\alpha(y) = \exp\left(-\pi \frac{\omega_0}{Q} (1 - pg(y))\right) = \exp(-\nu + \gamma g(y)). \quad (16)$$

Дискретное отображение (15) содержит нелинейность (16) в мультипликативной по отношению к порождающему уравнению гармонических осцилляций  $\hat{L}_2(y[n]) = 0$  форме, в то время как (7) является отображением с аддитивной нелинейностью. Легко установить, что при учете двух членов разложения экспоненты (16) в ряд Фурье отображение (15) переходит в отображение (7). Поэтому без проведения дополнительных исследований разностного уравнения (15) имеются все основания предполагать совпадение динамических характеристик дискретных отображений осциллятора Ван дер Поля с мультипликативной и аддитивной нелинейностями при умеренных превышениях порога генерации ( $p \leq 10$ ) в высокочастотных осцилляторах ( $Q \geq 10$ ). При значительных превышениях порога генерации ( $p > 10$ ) метод ММА неприменим к анализу динамики отображений (7) и (15). В этой ситуации свойства отображений можно установить путем исследования генерируемых отображениями временных рядов (сигналов).

6. Приведем некоторые численные результаты, иллюстрирующие режимы генерации сигналов отображением (15). При этом будем использовать терминологию теории колебаний, называя (15) ДВ-осциллятором Ван дер Поля. Значение добротности в дальнейшем остается постоянной величиной  $Q = 20$ , а собственная частота резонатора  $\Omega_0$  и уровень возбуждения  $p$  варьируются.

На рис. 3, а показаны амплитудный спектр  $A(\Omega)$  и предельный цикл автоколебаний ДВ-осциллятора с параметрами  $\Omega_0 = 0.21$ ,  $p = 3.8$ . Этот режим генерации качественно полностью соответствует свободным автоколебаниям в НВ-системе. Специфика ДВ-системы проявляется лишь в том, что вследствие эффекта подмены частот [2] гармоники автоколебаний наблюдаются на частотах, не кратных основной частоте (на рис. 3 прослеживаются третья и пятая гармоники). Взаимодействие подмененных гармонических составляющих приводит в конечном счете к хаотизации автоколебаний при значительных уровнях возбуждения. Рис 3, б, на котором представлены усредненный амплитудный спектр  $\bar{A}(\Omega)$  и хаотический аттрактор автоколебаний, иллюстрирует режим генерации динамического хаоса в осцилляторе с параметрами  $\Omega_0 = 0.31$  и  $p = 12$ . Дальнейший рост уровня возбуждения до значения  $p = 38$  переводит ДВ-осциллятор (5) в режим генерации хаотических импульсов, показанных в правой части рис. 3, в.

7. Представленные здесь дискретные отображения осциллятора Ван дер Поля наряду с предложенными в работах [4; 5; 8] расширяют круг объектов нелинейной динамики дискретного времени со свойствами автоколебательных систем непрерывного времени. Практические применения предложенных отображений (ДВ-осцилляторов) весьма разнообразны – моделирование сигналов и систем, нелинейная фильтрация дискретных (цифровых) сигналов, защита информации.

## Список литературы

1. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Современные проблемы нелинейной динамики. М.: Эдиториал УРСС, 2000. 336 с.
2. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера, 2006. 856 с.
3. Заславский Г.М. Гамильтонов хаос и фрактальная динамика. М.; Ижевск: НИЦ РХД, Ижевский институт компьютерных исследований, 2010. 472 с.
4. Зайцев В.В., Давыденко С.В. Динамика автоколебаний дискретного осциллятора Ван дер Поля // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2000. Т. 3. № 2. С. 64–67.
5. ДВ-осцилляторы, порождаемые томсоновскими автоколебательными системами / В.В. Зайцев [и др.] // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2008. Т. 11. № 4. С. 98–103.

6. Зайцев В.В. Дискретные сигналы и системы. Самара: Самарский университет, 2010. 96 с. URL: [http://ppent.samsu.ru/docs/Discrete\\_signals\\_and\\_systems.pdf](http://ppent.samsu.ru/docs/Discrete_signals_and_systems.pdf).
7. Линдсей В. Системы синхронизации в связи и управлении. М.: Советское радио, 1978. 600 с.
8. Зайцев В.В., Карлов А.В. (мл.), Карлов Ар.В. Метод эквивалентной линеаризации и алгоритм генерации ДВ-автоколебаний // Нелинейный мир. 2012. Т. 10. № 3. С. 169–172.

## About discrete mapping the Van der Pol oscillator

V.V. Zaitsev

New discrete mappings of classical self-oscillatory system – Van der Paul's oscillator are offered. Displays are received on the basis of a combination of methods of parametrical synthesis and invariance of pulse characteristics of dynamic systems. Examples of generation of regular and chaotic self-oscillations in discrete time are given.

*Keywords:* nonlinear dynamics, discrete time, self-oscillatory system, dynamic chaos.

**Неганов, В.А.**

**Теория и применение устройств СВЧ: учебн. пособие для вузов / В.А. Неганов, Г.П. Яровой;** под ред. В.А. Неганова. – М.: Радио и связь, 2006. – 720 с.

**ISBN 5-256-01812-4**

В.А. Неганов, Г.П. Яровой

**ТЕОРИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ  
УСТРОЙСТВ СВЧ**



УДК 621.396.67  
ББК 32.840  
Н 41

В учебном пособии рассматриваются методы проектирования и конструктивной реализации устройств СВЧ: линий передачи различных видов, резонаторов, согласующих и трансформирующих устройств, фильтров, фазовращателей, аттенуаторов, тройниковых соединений, направленных ответвителей, различных мостовых соединений, ферритовых устройств (вентилей, циркуляторов, фазовращателей) и СВЧ-устройств на полупроводниковых диодах (умножителей, смесителей, переключателей, выключателей). Приводятся примеры применения устройств СВЧ в радиосвязи, радиолокации, измерительной аппаратуре и т. д. В книгу вошел оригинальный материал, полученный авторами. Учебное пособие может использоваться как справочник по устройствам СВЧ.

*Для специалистов в области теории и техники СВЧ, преподавателей вузов, докторантов, аспирантов, студентов старших курсов радиотехнического и радиофизического профиля.*