

Отображение осциллятора Дюффинга в дискретном времени

В.В. Зайцев, А.Н. Шилин, А.Н. Юдин

Самарский государственный университет
443011, Российская Федерация, г. Самара
ул. Ак. Павлова, 1

Предложен вариант дискретного отображения осциллятора Дюффинга – колебательной системы с реактивной кубической нелинейностью. Отображение получено на основе сочетания методов параметрического синтеза и инвариантности импульсных характеристик динамических систем. Исследованы резонансные характеристики дискретного осциллятора Дюффинга – ДВ-системы, определяемой предложенным отображением.

Ключевые слова: колебательная система, дискретное время, нелинейный резонанс.

1. Переход к дискретному времени в математических моделях линейных аналоговых систем (систем непрерывного времени, НВ-систем) широко применяется в практике проектирования цифровых фильтров [1]. Помимо решения прикладных задач, такой подход позволяет ввести в рассмотрение колебательные системы дискретного времени (ДВ-системы) – объекты исследования теории колебаний, или, в более широком смысле, динамической теории. Применяемая процедура дискретизации времени накладывает свой отпечаток на характеристики порождаемой ДВ-системы. Поэтому один и тот же аналоговый прототип отображается во множество объектов динамики дискретного времени. Это утверждение справедливо для линейных систем [1] и тем более относится к системам, содержащим нелинейности [2].

В настоящем сообщении предложен новый вариант отображения в области дискретного времени НВ-осциллятора Дюффинга – колебательной системы с одной степенью свободы, содержащей кубическую реактивную нелинейность. Отметим, что НВ-осциллятор Дюффинга является классической моделью теории нелинейных колебаний [3–5]. Приблизительно она описывает множество реально существующих систем различной физической природы [5]. Представляется, что дискретное отображение осциллятора Дюффинга может быть полезной моделью теории колебаний в дискретном времени и нелинейной ДВ-динамики.

Для дискретизации времени в аналоговом осцилляторе использован метод инвариантности

импульсных характеристик (МИИХ). Метод находит широкое применение в теории и практике проектирования линейных дискретных фильтров [1]. Он привлекателен с физической точки зрения, т. к. сохраняет временные характеристики отклика линейной системы на внешнее воздействие. В сообщении МИИХ дополнен элементами параметрического синтеза динамических систем. Ранее подобный подход был применен для проектирования дискретных отображений осциллятора Ван дер Поля [6–7].

2. Как объект теории нелинейных колебаний (нелинейной динамики) осциллятор Дюффинга определяется уравнением движения

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y + \mu \omega_0^2 y^3 = \omega_0^2 x(t). \quad (1)$$

Здесь ω_0 и Q – собственная частота и добротность системы с параметром нелинейности $\mu = 0$; $x(t)$ – внешнее периодическое воздействие на систему. Имея в виду дискретизацию времени с интервалом Δ , уравнение (1) запишем относительно безразмерной временной переменной $\tau = t\Delta^{-1}$:

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + 2\pi \frac{\Omega_0}{Q} \frac{dy}{d\tau} + 4\pi^2 \Omega_0^2 y + 4\pi^2 \mu \Omega_0^2 y^3 = 4\pi^2 \Omega_0^2 x(\tau), \quad (2)$$

где Ω_0 – частота ω_0 , выраженная в единицах частоты дискретизации.

В качестве аналоговой системы-прототипа рассмотрим линейный осциллятор

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + 2\pi \frac{\Omega_0}{Q} \frac{dy}{d\tau} + 4\pi^2 \Omega_0^2 y = 4\pi^2 \Omega_0^2 x(\tau). \quad (3)$$

В рамках МИИХ ему ставится в соответствие ДВ-осциллятор

$$\begin{aligned} y[n] - 2\alpha \cos(2\pi\Omega_0) y[n-1] + \\ + \alpha^2 y[n-2] = \varepsilon x[n-1], \end{aligned} \quad (4)$$

где α – параметр диссипации:

$$\alpha = \exp\left(-\pi \frac{\Omega_0}{Q}\right),$$

а $\varepsilon = 2\pi\alpha \sin(2\pi\Omega_0)$. Впрочем, учитывая произвольность внешнего воздействия $x[n]$, коэффициент ε можно считать независимым параметром.

Уравнение (2) подвергнем преобразованию, аналогичному проведенному при переходе (3) \rightarrow (4). Для этого, введя в рассмотрение мгновенную частоту

$$\Omega_i(y(\tau)) = \Omega_0 \sqrt{1 + \mu y^2(\tau)},$$

запишем его как

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + 2\pi \frac{\Omega_0}{Q} \frac{dy}{d\tau} + 4\pi^2 \Omega_i^2(y(\tau)) y = 4\pi^2 \Omega_0^2 x(\tau). \quad (5)$$

Теперь нелинейный осциллятор формально имеет уравнение движения вида (3), но с переменным параметром Ω_i вместо фиксированного параметра Ω_0 . Тогда будем считать, что, поскольку при дискретизации времени уравнение (3) переходит в уравнение (4), то уравнение (5) перейдет в уравнение

$$\begin{aligned} y[n] - 2\alpha \cos(2\pi\Omega_i(y[n-1])) y[n-1] + \\ + \alpha^2 y[n-2] = \varepsilon x[n-1], \end{aligned}$$

т. е., в конечном счете, в уравнение

$$\begin{aligned} y[n] - 2\alpha \cos\left(2\pi\Omega_0 \sqrt{1 + \mu y^2[n-1]}\right) \times \\ \times y[n-1] + \alpha^2 y[n-2] = \varepsilon x[n-1]. \end{aligned} \quad (6)$$

Сформированное таким образом уравнение (6) и есть искомое дискретное отображение осциллятора Дюффинга. Являясь итерируемым отображением, оно дает простой алгоритм преобразования временного ряда $x[n]$. В качестве объекта теории колебаний в дискретном времени систему, определяемую отображением (6), можно также обозначать как дискретный осциллятор Дюффинга. Отметим, что при высоких частотах дискретизации (соответственно при $\Omega_0 \rightarrow 0$) разностное уравнение (6) переходит в дифференциальное уравнение движения (5) осциллятора Дюффинга в непрерывном времени.

Естественным ограничением на величину параметра нелинейности μ в отображении (6) при его отрицательных значениях является нера-

венство $\mu y^2 > -1$. В противном случае не имеет особого смысла говорить о мнимой мгновенной частоте. Если же принять более жесткое ограничение $|\mu y^2| \ll 1$, то с точностью до членов первого порядка малости по этому параметру отображение (6) можно заменить более простым отображением

$$\begin{aligned} y[n] - 2\alpha \cos(2\pi\Omega_0) y[n-1] + \\ + \alpha^2 y[n-2] + \mu_e y^3[n-1] = \varepsilon x[n-1], \end{aligned} \quad (7)$$

где эффективный параметр нелинейности $\mu_e = 2\pi\alpha \sin(2\pi\Omega_0)\mu$. Впрочем, если принять (7) в качестве самостоятельного отображения, то параметр μ_e можно считать независимым. Дискретное отображение (7) содержит нелинейность в аддитивной форме по отношению к уравнению гармонических осцилляций (4), в то время как (6) является отображением с мультипликативной нелинейностью.

Заметим, что отображение (7) можно получить еще одним способом. Для этого в уравнении (2) нелинейное слагаемое следует объединить с внешним воздействием, записав уравнение в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{d\tau^2} + 2\pi \frac{\Omega_0}{Q} \frac{dy}{d\tau} + 4\pi^2 \Omega_0^2 y = \\ = 4\pi^2 \Omega_0^2 (x(\tau) - 4\pi^2 \mu \Omega_0^2 y^3(\tau)). \end{aligned}$$

Это уравнение имеет форму (3), и ему соответствует отображение формы (4):

$$\begin{aligned} y[n] - 2\alpha \cos(2\pi\Omega_0) y[n-1] + \\ + \alpha^2 y[n-2] = \varepsilon (x[n-1] - \mu y^3[n-1]), \end{aligned}$$

полностью совпадающее с отображением (7).

3. Приведем некоторые численные результаты, характеризующие преобразования сигналов отображением (6). При этом будем использовать терминологию теории колебаний, называя (6) дискретным осциллятором Дюффинга (ДОД).

На рис. 1 показаны графики зависимости амплитуды A первой гармоники вынужденных колебаний от частоты Ω внешнего воздействия

$$x[n] = \varepsilon \cos(2\pi\Omega n) \quad (8)$$

на осциллятор с параметрами $\Omega_0 = 0.21$ и $Q = 20$. Амплитуда воздействия здесь и в дальнейшем полагается единичной: $\varepsilon = 1$. Зависимости $A = A(\Omega)$ рассчитаны путем цифровой обработки колебаний $y[n]$, возбуждаемых входным сигналом (8) с частотой, линейно меняющейся в диапазоне $0.18 \leq \Omega \leq 0.25$; скорость изменения частоты

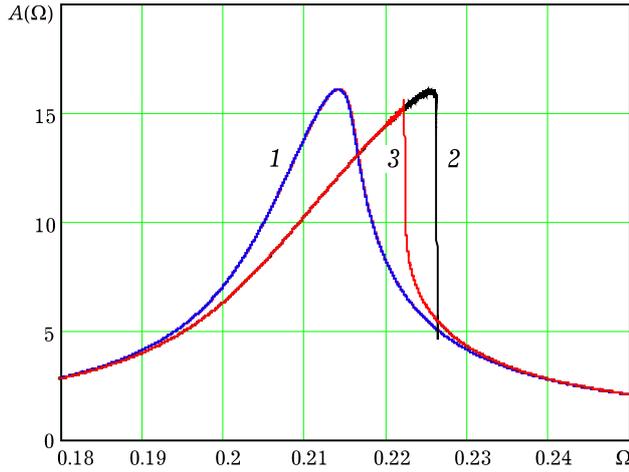


Рис. 1. Амплитудно-частотные характеристики ДОД

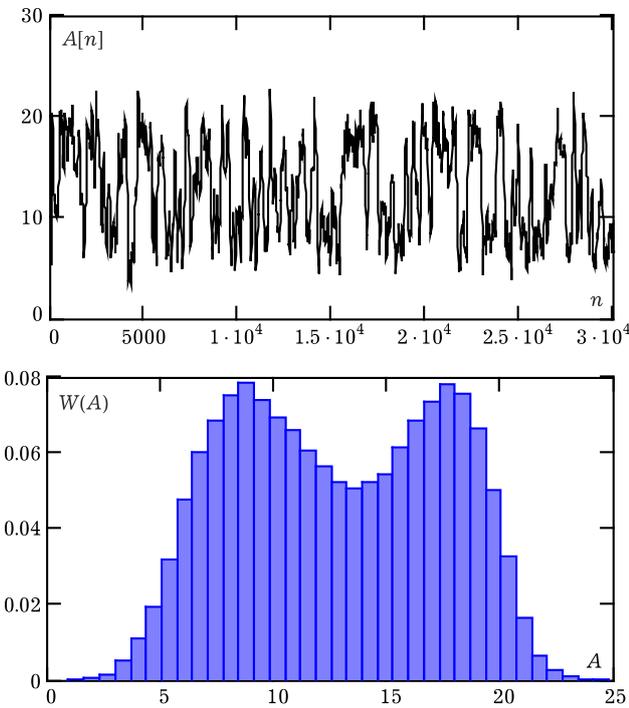


Рис. 2. Отрезок реализации и гистограмма огибающей

ты $\Delta\Omega / N = 5.34 \cdot 10^{-7}$. Линия 1 соответствует значению $\mu = 2 \cdot 10^{-4}$, линии 2 и 3 – значению $\mu = 7.5 \cdot 10^{-4}$; для линии 2 частота Ω увеличивается, а для 3 – уменьшается.

Асимметрия амплитудно-частотной характеристики и ее гистерезис – характерный признак явления нелинейного резонанса, наблюдаемого в ДОД. При $\mu > 0$ имеет место правая асимметрия АЧХ, при $\mu < 0$ – левая. Качественно характеристики нелинейного резонанса в дискретном и непрерывном временах в основном совпадают.

Представленный здесь осциллятор предлагается использовать как составной элемент более сложных динамических систем при их числен-

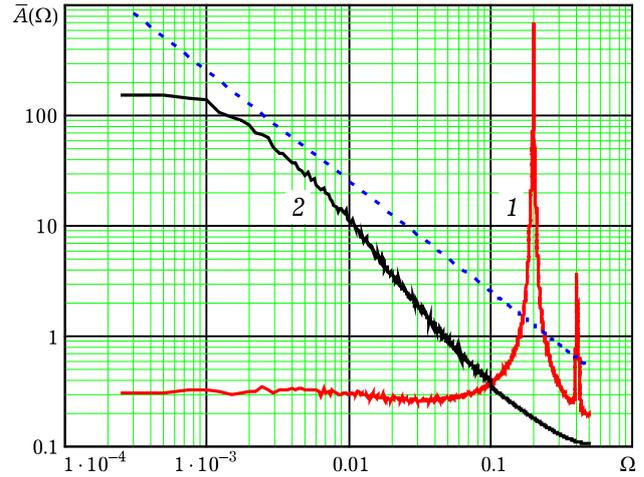


Рис. 3. Усредненные амплитудные спектры стохастических процессов в ДОД

ном моделировании, а также как базовый динамический объект при моделировании физических процессов в нелинейных системах.

В качестве примера такого использования ДОД приведем результаты численного эксперимента по исследованию индуцированных шумом переходов между бистабильными состояниями осциллятора. В данном эксперименте для параметра нелинейности выбрано значение $\mu = -4.5 \cdot 10^{-4}$. Этому значению при единичной амплитуде внешнего гармонического воздействия соответствует АЧХ с левой асимметрией и областью гистерезиса шириной $\Delta\Omega_g = 0.0012$ с центром на частоте $\Omega_g = 0.1998$. На частоте Ω_g амплитуда вынужденных колебаний имеет два устойчивых значения: $A_1 = 10.35$ и $A_2 = 16.38$. Внешнее воздействие представляет собой смесь гармонического колебания и нормального узкополосного шума $\xi[n]$:

$$x[n] = \cos(2\pi\Omega_g n) + \xi[n].$$

Шум $\xi[n]$ характеризуется лоренцевой формой спектра мощности с центральной частотой Ω_g и дисперсией $\sigma_\xi^2 = 0.046$.

На верхнем графике рис. 2 показан фрагмент реализации огибающей колебаний $y[n]$ в ДОД. Отчетливо видны стохастические колебания в окрестностях состояний A_1 и A_2 , а также случайные переходы между состояниями. Такой характер случайного процесса $A[n]$ подтверждает также его вероятностная гистограмма, показанная на нижнем графике рис. 2. Гистограмма построена по реализации процесса длиной $N = 2^{17}$. Для выделения огибающей в численном эксперименте использован метод аналитического сигнала.

Спектральные характеристики отражены на рис. 3. Кривая 1 соответствует усредненному амплитудному спектру $y(\Omega)$ (квадратному корню из удвоенного спектра мощности) стохастических колебаний $y[n]$. Оценка спектра мощности проведена периодограммным методом Бартлетта с 4098-точечным дискретным преобразованием Фурье по реализации $y[n]$ длиной $N = 2^{19}$. На графике, кроме лоренцевой спектральной линии колебания основной частоты, отчетливо видна линия подменной третьей гармоники. Усредненный амплитудный спектр $\bar{A}(\Omega)$ огибающей первой гармоники представлен на рис. 3 кривой 2. По сравнению с соответствующим спектром, наблюдаемым в линейной системе, ширина кривой $\bar{A}(\Omega)$ в ДОД уменьшается, что обусловлено медленными переходами между бистабильными состояниями осциллятора.

Таким образом, представленный численный эксперимент демонстрирует возможности использования дискретного осциллятора (6) при моделировании стохастических процессов в нелинейных системах.

Список литературы

1. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера, 2006. 856 с.
2. Заславский Г.М. Гамильтонов хаос и фрактальная динамика. М.; Ижевск: НИЦ РХД; Ижевский институт компьютерных исследований, 2010. 472 с.
3. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. М.: Мир, 1968. 432 с.
4. Кузнецов А.П. Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2005. 292 с.
5. Kovacic I., Brennan M.J. The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and their Behaviour. N.Y.: John Wiley & Sons, 2011. 386 p.
6. Зайцев В.В., Юдин А.Н. Способ параметрического синтеза нелинейных ДВ-осцилляторов // Материалы X Международной школы-конференции «Хаотические автоколебания и образование структур». Саратов: ООО Издательский центр «Наука», 2013. С. 77.
7. Зайцев В.В., Нураев Д.Б., Юдин А.Н. Параметрический синтез отображения осциллятора Ван дер Поля в дискретном времени // Вестник СГАУ. 2013. № 4 (42). С. 140–144.

The mapping of Duffing oscillator in discrete time

V.V. Zaitsev, A.N. Shilin, A.N. Yudin

The option of discrete mapping of Duffing oscillator – oscillatory system with cubic nonlinearity is offered. Mapping is received on the basis of a combination of methods of parametrical synthesis and invariancy of pulse characteristics of dynamic systems. Resonant characteristics of a discrete Duffing oscillator – the DT-system determined by offered display are investigated.

Keywords: oscillatory system, discrete time, nonlinear resonance.
