2014 г. Том 17, № 2
Физика волновых процессов и радиотехнические системы

УДК 621.372

Комбинированный метод поиска решений дисперсионных уравнений волн направляющих электродинамических структур на комплексной плоскости одного из волновых чисел

В.А. Малахов, К.В. Попков, А.С. Раевский

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева
603950, Российская Федерация, г. Нижний Новгород
ул. Минина, 24

Рассматривается проблема решения дисперсионных уравнений волн направляющих электродинамических структур на комплексной плоскости одного из волновых чисел. Предлагается комбинированный метод, основанный на сочетании положительных свойств метода Мюллера и метода вариации фазы, основанного на принципе аргумента. Описывается процедура применения метода.

Ключевые слова: дисперсионное уравнение, комплексные корни, метод Мюллера, принцип аргумента, метод вариации фазы.

Как известно [1], в направляющих электродинамических структурах, описываемых несамосопряженными операторами, существуют волны в общем случае с комплексными волновыми числами. Комплексные волны для большинства поперечно-неоднородных и продольно-нерегулярных направляющих структур соответствуют наиболее общему классу решений несамосопряженных краевых задач, описывающих эти структуры. Обычные распространяющиеся и реактивно затухающие (запредельные) волны можно рассматривать как частные варианты указанного общего класса решений. В том случае, когда направляющая структура диссипативная, все волны имеют комплексные волновые числа. В связи с этим очень важными являются вопросы целенаправленного поиска комплексных решений дисперсионных уравнений. Особые трудности возникают в том случае, когда решение краевой задачи для рассматриваемой структуры записывается в незамкнутом виде [2–4], что не позволяет произвести аналитическое рассмотрение дисперсионного уравнения.

В настоящее время используются различные методы поиска корней дисперсионного уравнения: метод половинного деления (бисекции, дихотомии), метод хорд и его модификация – метод Риддерса [5], метод Ньютона и его модификации и другие. Все эти методы обладают радом недостатков среди которых наиболее значимыми являются: требование точного знания области локализации корня и получения наряду с истинными ложных корней (полюсов). Другим существенным недостатком, особенно при поиске комплексных решений дисперсионной задачи, являются значительные временные затраты при уточнении корня. Наиболее быстродействующим методом поиска комплексных корней является метод Мюллера.

Метод Мюллера [6] представляет собой развитее метода секущих (модификация метода Ньютона). В методе секущих при решении уравнения

$$f(x) = 0$$

необходимо задавать два начальных приближения к корню x_k, x_{k-1}, далее через точки $f(x_k)$ и $f(x_{k-1})$ проводится прямая линия, рис. 1, и пересечение ее с осью x даст следующее приближение к корню x_{k+1}.

Пересечение с осью абсцисс определяется формулой:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}. \qquad (1)$$

Метод Мюллера в отличии от методов: секущих, хорд и Ньютона использует не линейную, а квадратичную аппроксимацию функции. В нем для нахождения очередного приближения x_{k+1} необходимы три предыдущие точки: x_k, x_{k-1}, x_{k-2}. Этот метод, также как и метод хорд, метод Ньютона и метод секущих используют для уточнения корня, когда известен интервал, на котором находится нуль функции $f(x)$.

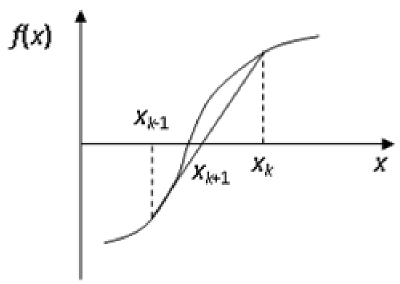

Рис. 1. К вопросу определения положения корня уравнения методом секущих

Метод Мюллера обладает большим быстродействием при нахождении комплексного корня в заданной области поиска с требуемой точностью, но наряду с истинными решениями находит ложные корни.

Рассмотрим алгоритм поиска комплексных корней методом Мюллера. В качестве начального приближения выбираем три значения переменной поиска x_{k-2}, x_{k-1}, x_k вблизи предполагаемого корня. Рассчитываем значения функции в этих точках $f(x_{k-2})$, $f(x_{k-1})$, $f(x_k)$ и получаем следующее приближение x_{k+1} по формуле

$$x_{k+1} = x_k - \left(x_k - x_{k-1}\right)\left(\frac{2C}{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}\right), \qquad (2)$$

где

$$A = \delta f\left(x_k\right) - \delta\left(1+\delta\right) f\left(x_{k-1}\right) + \delta^2 f\left(x_{k-2}\right);$$

$$B = \left(2\delta + 1\right) f\left(x_k\right) - \left(1+\delta\right)^2 f\left(x_{k-1}\right) + \delta^2 f\left(x_{k-2}\right);$$

$$C = \left(1+\delta\right) f\left(x_k\right); \quad \delta = \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1} - x_{k-2}}.$$

Знаки в знаменателе (2) выбираем в зависимости от величины модуля знаменателя. Если величина модуля знаменателя с «плюсом» больше величины модуля знаменателя при выборе «минуса», то берется «плюс», если нет – «минус».

В настоящее время метод Мюллера благодаря высокому быстродействию широко используется для поиска комплексных корней в различных прикладных пакетах, предназначенных для решения, в частности, дисперсионных уравнений волн электродинамических структур

$$F(\beta) = 0,$$

которые решаются относительно одного из волновых чисел, например продольного β, имеющего смысл фазовой постоянной волны. Однако, наряду с истинными нулями комплексной функции $F(\beta)$, т. А, рис. 2, при использовании этого метода может быть получено решение, соответствующее локальному минимуму, т. В, рис. 2, что приводит к появлению ложных корней.

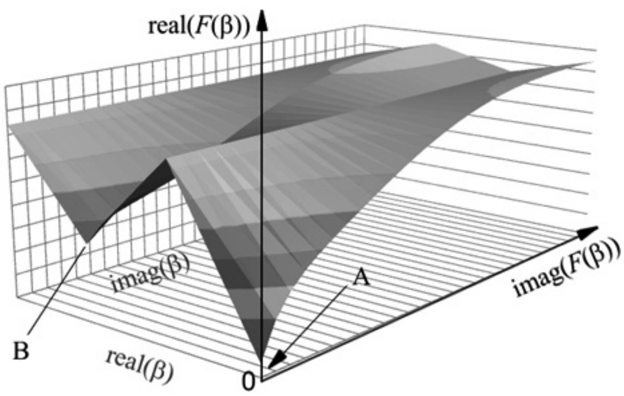

Рис. 2. Истинный «А» и ложный «В» корни уравнения

Чтобы избежать нахождения ложных корней, необходимо выбирать три начальные точки как можно ближе к истинному решению, то есть уменьшать шаг поиска, а это приводит к значительному увеличению времени, тем самым нивелируется преимущество данного метода (быстрота поиска). Кроме того для этого метода важен также выбор начального приближения.

Для локализации корня предлагается использовать метод вариации фазы, разработанный в [7]. Данный метод позволяет получить истинные комплексные решения дисперсионного уравнения $F(\beta) = 0$ для широкого круга электродинамических задач.

Будем понимать под уравнением

$$F(z) = 0 \qquad (3)$$

дисперсионное уравнение волн направляющей структуры, определенное на комплексной плоскости $z = x + iy$ одного из волновых чисел. Считаем, что функция $F(z)$ является аналитической всюду в замкнутой области S, за исключением конечного числа изолированных особых точек z_k. Полагаем, что $F(z)$ не обращается в нуль ни в одной точке контура L, ограничивающего область S, рис. 3, *а*. Тогда [8] разность между полным числом нулей N и полюсов P функции $F(z)$ в области S вычислится как

$$N - P = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L+} \frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)} d\zeta, \qquad (4)$$

где ζ – значения комплексной переменной z на контуре L, знак «+» указывает на положительное направление обхода контура.

Под полным числом нулей и полюсов в (4) понимается их число с учетом кратности

$$N = \sum_{k=1}^{n} n_k; \quad P = \sum_{k=1}^{p} p_k, \qquad (5)$$

где n_k – кратность k-го нуля; p_k – кратность k-го полюса.

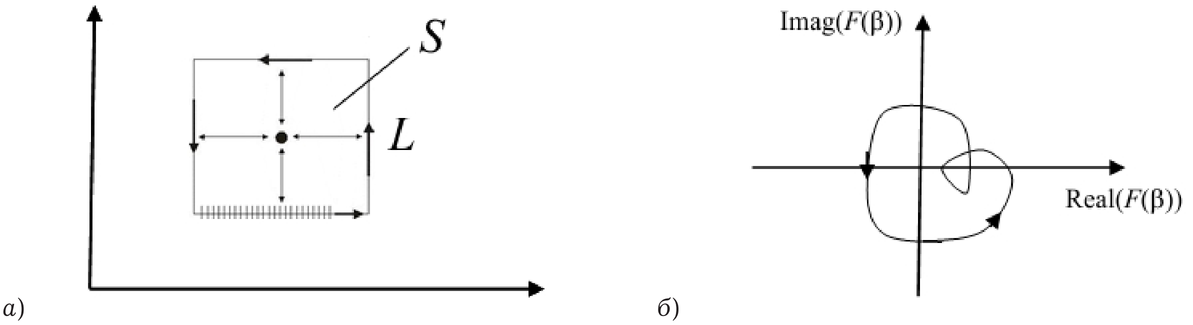

Рис. 3. К вопросу определения корня методом вариации фазы: *а*) локализация области поиска корня на комплексной плоскости продольного волнового числа; *б*) поведение годографа комплексной функции $F(\beta)$

Вычисление логарифмического вычета (4) функции $F(z)$ удобно проводить, используя принцип аргумента [8]

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L^+}\frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)}d\zeta=\frac{1}{2\pi}\operatorname{var}[\arg F(z)]\Big|_{L^+}, \qquad (6)$$

из которого следует, что разность между полным числом нулей и полюсов функции $F(z)$ в области S определяется числом оборотов, совершаемым точкой $w = F(z)$ вокруг точки $w = 0$ при положительном обходе точкой z контура L, рис. 3, *б*.

Таким образом, при определении числа $N - P$, соответствующего области S, необходимо, прежде всего, вычислив значения функции $F(z)$ во всех точках контура L, убедиться, что она не обращается в нуль ни в одной из этих точек. Если в каких-либо точках это условие нарушается, нужно, деформировав (в частных случаях расширив или сузив область S) контур L, исключить точки, в которых $F(z) = 0$.

Далее, в (4) следует определить число полюсов с учетом их кратности (5). Для этого нужно рассмотреть конкретный вид функции $F(z)$, проанализировав все точки ее особенностей. Положение точек, в которых она обращается в бесконечность, определяется по виду входящих в нее функций. Для определения кратности полюсов в общем случае функцию $F(z)$ в указанных точках необходимо разлагать в ряд Лорана и определять число коэффициентов этого ряда с отрицательными индексами. В конкретных частных случаях кратность полюсов можно определить по виду входящих в $F(z)$ функций.

Подставив найденное число P в (4), находим число нулей N функции $F(z)$, т. е. число в общем случае комплексных корней дисперсионного уравнения (3). Сам результат: $N \neq 0$ говорит о существовании в рассматриваемой области S комплексных решений дисперсионного уравнения, а в направляющей структуре с конкретными параметрами, входящими в дисперсионное уравнение (3), комплексных волн.

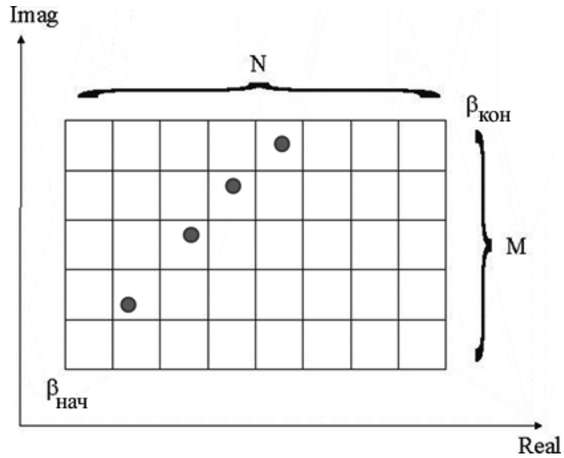

Рис. 4. Разбиение области поиска комплексных корней на подобласти

Этот метод обладает свойством точной идентификации наличия или отсутствия корня в заданной области, но имеет малое быстродействие, и для более точного определения корня желательно максимально сжать область поиска к месту нахождения предполагаемого корня.

В настоящей статье предлагается комбинированный метод поиска комплексных решений, лишенный недостатков метода Мюллера и метода вариации фазы.

Комбинированный метод поиска корней [9] является комбинацией метода Мюллера и метода вариации фазы, что позволяет использовать только лучшие стороны обоих методов, а именно: быстроту метода Мюллера и возможность идентификации ложных корней методом вариации фазы.

Рассмотрим более подробно суть комбинированного метода поиска комплексных корней. На определенной частоте f_i область поиска по комплексному волновому числу $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ разбивается на $K = NM$ подобластей, рис. 4, на интервале $\beta \in [\beta_{нач}, \beta_{кон}]$. На рис. 4 кружками показаны подобласти, в которых существуют решения.

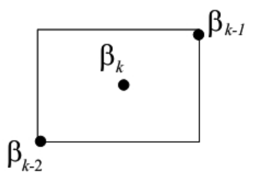

Рис. 5. Выбор начального приближения в методе Мюллера

В каждой прямоугольной подобласти последовательно выбираются три начальные точки, например, как показано на рис. 5, а далее методом Мюллера проверяется наличие корня.

Если предполагаемое решение в исследуемой подобласти найдено, то обходом по контуру, рис. 3, *а*, используя метод вариации фазы, проверяется, является ли найденное решение истинным корнем или локальным минимумом. Если методом вариации фазы подтверждается истинность найденного решения, оно записывается в память. Возможен также вариант поиска, когда сначала методом вариации фазы определяется наличие в данной подобласти решения, которое затем уточняется методом Мюллера и записывается в память. После этого происходит переход к следующей подобласти.

Когда анализ всех K подобластей закончен, происходит переход на следующую частоту $f_{i+1} = f_i + h_i$ и описанные выше действия повторяются, до тех пор, пока не пройден заданный частотный диапазон.

Комбинированный метод поиска лишен недостатков, присущих методу Мюллера и методу вариации фазы. Он позволяет использовать быстроту нахождения комплексных корней методом Мюллера и однозначность идентификации комплексного корня методом вариации фазы.

В таблице ниже приведены результаты замеров времени при поиске комплексных корней одного и того же дисперсионного уравнения различными методами на персональном компьютере с процессором Intel® i7 950 с тактовой частотой 3.07 ГГц, размер ОЗУ – 6 Гб. Результаты были округлены в большую сторону. Для каждого метода в определенном частотном диапазоне найдено одинаковое количество комплексных корней дисперсионного уравнения волн экранированной микрополосковой линии [3; 4], соответствующих комплексным волнам [1].

Из таблицы видно, что наилучшие быстродействие показал метод Мюллера, но наравне с истинными решениями были получены ложные корни, которые метод Мюллера не исключает. Наибольшее время было затрачено при расчете методом вариации фазы, однако этот метод обладает свойством точной идентификации наличия или отсутствия корня в заданной области.

Метод половинного деления обладает достаточно большим временем поиска комплексных корней и кроме истинных решений выдает ложные (полюса).

Комбинированный метод показал быстродействие близкое к методу Мюллера, но в отличие от него, благодаря использованию метода вариации фазы, он выдает только истинные решения.

На основе комбинированного метода поиска комплексных корней была создана подпрограмма расчета дисперсионных характеристик исследуемых в диссертации направляющих структур в интегрированной среде разработки Microsoft Visual Studio 2010, на языке С++, и получено свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ [10].

Таблица

Название метода	Время расчета, мин	Точность расчета
Метод половинного деления	17	0,00001
Метод Мюллера	5	0,00001
Метод вариации фазы	21	0,00001
Комбинированный метод	7	0,00001

Список литературы

1. Раевский А.С., Раевский С.Б. Комплексные волны. М.: Радиотехника, 2010. 223 с.
2. Малахов В.А., Раевский А.С. Комплексные волны в волноводно-щелевой линии и новый подход к оценке корректности решений электродинамических задач, поставленных в незамкнутой форме // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46. № 5. С. 517–521.
3. Малахов В.А., Раевский А.С. Возможные подходы к оценке сходимости решений задачи о расчете дисперсионных характеристик экранированной микрополосковой линии // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 1998. Т. 1. № 4.

4. Малахов В.А., Раевский А.С. Комплексные волны в экранированной микрополосковой линии // Радиотехника и электроника. 1999. Т. 44. № 1. С. 58–61.
5. Ridders C.J.F. A new algorithm for computing a single root of a real continuous function // IEEE Transactions on Circuits and Systems. 1979. Vol. CAS-26. P. 979–980.
6. Muller D.E. A method for solving algebraic equations using an automatic computer // Mathematical Tables and Other Aids to Computation. 1956. № 10. P. 208-215.
7. Бритов И.Е., Раевский А.С., Раевский С.Б. Целенаправленный поиск комплексных волн в направляющих электродинамических структурах // Антенны. 2003. Вып. 5 (72). С. 64–71.
8. Привалов И.И. Введение в теорию функции комплексного переменного. М.: Наука, 1967. 444 с.
9. Применение комбинированного метода поиска комплексных корней к решению дисперсионного уравнения волн круглого диэлектрического волновода, покрытого поглощающей пленкой / А.А. Бабкин [и др.] // Тезисы докладов IX Международной научно-технической конференции «Физика и технические приложения волновых процессов». Челябинск. 2010. С. 23.
10. Малахов В.А., Раевский А.С. Программа нахождения комплексных решений дисперсионных уравнений // Государственный реестр программ для ЭВМ. Свидетельство № 2010615410 от 23.08.2010 г.

The combined method of finding solutions to the dispersion equation for waveguide electrodynamic structures on the complex plane of one of the wave numbers

V.A. Malakhov, K.V. Popkov, A.S. Raevskii

The problem of solving the dispersion equation for waves guideway electrodynamic structures on the complex plane of one of the wave numbers is considered. Combined method based on the combination of positive properties Muller method and the method of phase variation, based on the principle of the argument is proposed. The procedure of the application of the method is described.

Keywords: dispersion equation, complex roots, Muller method, the principle of the argument, the method of phase variation.