2014 г. *Том 17, № 3*

Физика волновых процессов и радиотехнические системы

УДК 631.372

Колебания и волны, присоединенные к источнику

А.С. Раевский[1], *С.Б. Раевский*[1], *А.Ю. Седаков*[2]

[1] Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева
603950, Россия, г. Нижний Новгород
ул. Минина, 24

[2] ФГУП «ФНПЦ НИИ измерительных систем им. Ю.Е. Седакова»
603137, Россия, г. Нижний Новгород
ул. Тропинина, 47

Для колебательных и направляющих структур сопоставляются краевые задачи, которые описывают колебания и волны, присоединенные к источнику, существующие (как решения краевой задачи) только при его наличии.

Ключевые слова: колебательные структуры, направляющие структуры, краевая задача.

Краевые задачи, в которых учитывается обратное влияние поля излучения на источник, называются самосогласованными, поскольку волновые числа в функциях поля и источника совпадают.

В [1–4] показано, что собственные комплексные волны (КВ) двухслойных изотропных направляющих структур индивидуально возбуждаются распределенными источниками бегущих волн. Находясь в синхронизме с этими волнами, КВ, «привязанные» к источникам такого типа, удовлетворяют уравнению Гельмгольца с правой частью, соответствующей функции, описывающей бегущую волну. Такое уравнение можно назвать [5] присоединенным уравнением Гельмгольца. Поля двух КВ с комплексно сопряженными амплитудами, волновые числа которых удовлетворяют дисперсионному уравнению, образуют «присоединенное» к источнику колебание, которое в силу обязательного требования присутствия источника не следует называть собственным. Указанные колебания классифицируются [2–4] как комплексный резонанс (КР).

Рассмотрим двухслойную изотропную цилиндрическую направляющую структуру. Это может быть двухслойный экранированный волновод или круглый открытый диэлектрический волновод (ДВ). Комплексные волны таких волноводов достаточно подробно исследованы [2–4]. Их дискретные спектры в экранированных структурах содержат собственные КВ, в открытых – включают в себя как собственные, так и несобственные волны.

Сформулируем присоединенную краевую задачу для круглого двухслойного экранированного волновода. Она состоит из уравнения:

$$\frac{\partial^2 \Pi_z^{e,m}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Pi_z^{e,m}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Pi_z^{e,m}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Pi_z^{e,m}}{\partial z^2} + \varepsilon\mu\omega^2 \Pi_z^{e,m} = A^{e,m} R_n^{e,m}(\alpha r)\cos n\varphi e^{-i\beta z}, \tag{1}$$

которое будем называть присоединенным уравнением Гельмгольца, и граничных условий:

$$\Pi_z^e(r=b)=0; \quad \Pi_z^e(r=b)=0; \tag{2а}$$

$$\vec{E}_{1\tau}(r=a)=\vec{E}_{2\tau}(r=a); \quad \vec{H}_{1\tau}(r=a)=\vec{H}_{2\tau}(r=a), \tag{2б}$$

$\Pi_z^{e,m}$ – продольные компоненты электрического и магнитного векторов Герца; a и b – радиусы внутреннего слоя и экрана.

Функции в правой части уравнения (1) имеют вид:

$$R_n^{e,m}(\alpha_1 r) = J_n(\alpha_1 r) \text{ при } r\in[0\div a];$$

$$R_n^{e}(\alpha_2 r) = \frac{J_n(\alpha_2 r)Y_n(\alpha_2 b) - J_n(\alpha_2 b)Y_n(\alpha_2 r)}{J_n(\alpha_2 a)Y_n(\alpha_2 b) - J_n(\alpha_2 b)Y_n(\alpha_2 a)};$$

$$R_n^{m}(\alpha_2 r) = \frac{J_n(\alpha_2 r)Y_n'(\alpha_2 b) - J_n'(\alpha_2 b)Y_n(\alpha_2 r)}{J_n(\alpha_2 a)Y_n'(\alpha_2 b) - J_n'(\alpha_2 b)Y_n(\alpha_2 a)},$$

при $r\in[a\div b]$,

где $J_n(\alpha_{1.2} r)$, $Y_n(\alpha_2 r)$ – цилиндрические функции первого и второго рода. Для открытого круглого ДВ функции $R_n^e(\alpha_2 r)$ и $R_n^m(\alpha_2 r)$ заменяются на функции Ханкеля второго пода $H_n^{(2)}(\alpha_2 r)$.

Функцию в правой части уравнения (1) можно рассматривать как функцию распределенного источника бегущей волны, а присоединенную краевую задачу (1), (2а), (2б) − как задачу о возбуждении волн «присоединенных» к указанному источнику.

Записываем решение сформулированной краевой задачи в виде:

$$\Pi^{e,m}_{z_{1,2}} = \left[C^{e,m}_{n_{1,2}} R^{e,m}_n \left(\alpha_{1,2} r\right) + D^{e,m}_{n_{1,2}} \left(-\frac{iz}{2\beta}\right) \times \right. \\ \left. \times R^{e,m}_n \left(\alpha_{1,2} r\right) + \rho^{e,m} \left(\alpha_{1,2} r\right) \right] \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{-i\beta z}, \tag{3}$$

где функция $\rho^{e,m}\left(\alpha_{1,2} r\right)$ удовлетворяет уравнениям:

$$\rho''\left(\alpha_{1,2} r\right) + \frac{1}{r}\rho'\left(\alpha_{1,2} r\right) + \left(\alpha^2_{1,2} - \frac{n^2}{r^2}\right)\rho\left(\alpha_{1,2} r\right) = \\ = \bar{D}^{e,m}_{n_{1,2}} R^{e,m}_n \left(\alpha_{1,2} r\right), \tag{4}$$

которые можно рассматривать как присоединенные уравнения Бесселя.

Подставляя решения в (3) в уравнения (1), получаем:

$$C^{e,m}_{n_{1,2}} \left[R^{e,m''}_n \left(\alpha_{1,2} r\right) + \frac{1}{r} R^{e,m}_n \left(\alpha_{1,2} r\right) + \right. \\ \left. + \left(\alpha^2_{1,2} - \frac{n^2}{r^2}\right) R^{e,m}_n \left(\alpha_{1,2} r\right) \right] + D^{e,m}_{n_{1,2}} \left[R^{e,m''}_n \left(\alpha_{1,2} r\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{r} R^{e,m}_n \left(\alpha_{1,2} r\right) + \left(\alpha^2_{1,2} - \frac{n^2}{r^2}\right) R^{e,m}_n \left(\alpha_{1,2} r\right) \right] + \\ + \left[\rho^{e,m''} \left(\alpha_{1,2} r\right) + \frac{1}{r} \rho^{e,m'} \left(\alpha_{1,2} r\right) + \right. \\ \left. + \left(\alpha^2_{1,2} - \frac{n^2}{r^2}\right) \rho^{e,m} \left(\alpha_{1,2} r\right) \right] - \\ - D^{e,m}_{n_{1,2}} R^{e,m}_n \left(\alpha_{1,2} r\right) = A^{e,m} R^{e,m}_n \left(\alpha_{1,2} r\right). \tag{5}$$

Из (5) видно, что решения (3) удовлетворяют с учетом уравнения (4) присоединенным уравнениям Гельмгольца (1) при условии:

$$\bar{D}^{e,m}_{n_{1,2}} - D^{e,m}_{n_{1,2}} = A^{e,m}. \tag{6}$$

В том случае, когда

$$\bar{D}^{e,m}_{n_{1,2}} = D^{e,m}_{n_{1,2}}, \tag{7}$$

решения (3) удовлетворяют обычному (однородному) уравнению Гельмгольца.

Из граничных условий (2б) получаем систему функциональных уравнений, зависящих от продольной координаты. Приравнивая в них члены, имеющие линейную зависимость от координаты z, получаем систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $D^{e,m}_{n_{1,2}}$. Условие нетривиальности решений этой системы дает уравнение, совпадающее с дисперсионным уравнением обычных волн круглого двухслойного экранированного волновода.

Члены в вышеуказанных функциональных уравнениях, не имеющие координатной зависимости, при условии (4) дают систему линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов: $C^{e,m}_{n_{1,2}}$. Главные определители двух систем (однородной и неоднородной) совпадают. Будучи приравненными нулю, они дают дисперсионные уравнения нормальных волн.

Нетривиальные решения системы линейных однородных алгебраических уравнений (коэффициенты $D^{e,m}_{n_{1,2}}$) подставляются в систему неоднородных уравнений, которая решается относительно коэффициентов $C^{e,m}_{n_{1,2}}$.

Поскольку для волн, описываемых решениями (3) должны выполняться граничные условия (2б), необходимо, чтобы системы однородных и неоднородных линейных алгебраических уравнений имели совместные решения. Система однородных уравнений имеет нетривиальные решения только при равенстве нулю ее определителя. Поскольку главный определитель системы неоднородных уравнений совпадает с определителем системы однородных уравнений, система неоднородных уравнений может иметь решения только при равенстве нулю ее дополнительных определителей.

Таким образом, собственные значения краевой задачи, определяющие волновые числа волн, описываемых этой задачей, находятся как совместные решения трех трансцендентных уравнений: уравнения: совпадающего с дисперсионным уравнением нормальных волн, и двух дополнительных уравнений.

Волнам, описываемым рассматриваемой краевой задачей, соответствуют решения, удовлетворяющие одновременно всем трем уравнениям. Численное исследование этих уравнений [6−8] показало существование их совместных решений, соответствующих волнам, которые можно назвать присоединенными к источнику, поскольку они описываются уравнением (1), в правой части которого стоит функция (описывающая источник), являющаяся решением краевой задачи на однородном уравнении Гельмгольца.

Таким образом, мы наблюдаем единство математической и физической идеологий: решаем краевую задачу на присоединенном уравнении Гельмгольца, получаем волны, существующие только при наличии источника, то есть присоединенные (привязанные) к нему. Согласованные задачи об излучении приводят к однородным интегральным уравнениям типа Фредгольма. Их собственные функции и собственные значения дают базис, по которому производится разложение поля излучения подобно тому, как поле излучения источника при КР представляется полями двух комплексно-сопряженных КВ.

Заключение

Для поперечно-неоднородных колебательных и направляющих электродинамических структур, описываемых несамосопряженными операторами, могут быть сформулированы краевые задачи, которые определяют колебания и волны, присоединенные к источнику, существующие только при его наличии. Такие задачи следует называть самосогласованными: в них учитывается обратное влияние поля источник, поскольку волновые числа и в функциях поля, и в функциях источника одни и те же. Амплитуды указанных волн и колебаний имеют зависимость от продольной координаты. Поля указанных колебаний (соответствующих КР) и волн (классифицируемых как присоединенные) имеют амплитуды, зависящие от продольной координаты: поле колебания при КР экспоненциально убывает при удалении от источника, поле присоединенной волны имеет линейную зависимость от продольной координаты.

Список литературы

1. Веселов Г.И., Раевский С.Б. Комплексные волны в поперечно-неоднородных направляющих структурах // Радиотехника. 1987. Т. 42. № 8. С. 64–67.
2. Веселов Г.И., Раевский С.Б. Слоистые металло-диэлектрические волноводы. М.: Радио и связь, 1988. 248 с.
3. Раевский А.С., Раевский С.Б. Неоднородные направляющие структуры, описываемые несамосопряженными операторами. М.: Радиотехника, 2004. 110 с.
4. Раевский А.С., Раевский С.Б. Комплексные волны. М.: Радиотехника, 2010. 223 с.
5. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.
6. Малахов В.А., Раевский А.С., Раевский С.Б. Присоединенные волны в круглом двухслойном экранированном волноводе // Письма в ЖТФ. 2011. Т. 37. Вып. 2. С. 71–79.
7. Malakhov V.A., Raevskii A.S., Raevskii S.B. Added solutions of boundary value problems for double-layer guiding structures // International Journal of Electromagnetics and Applications. 2012. Vol. 2. № 5. P. 114–119.
8. Раевский А.С., Раевский С.Б. Присоединенные волны как волны, создаваемые источником типа антенны бегущей волны // Письма в журнал технической физики. 2013. № 23. С. 13–17.

Waves connected to a source

A.S. Raevskii, S.B. Raevskii, A.Yu. Sedakov

For vibrational and guiding structures mapped boundary value problems that describe oscillations and waves, connected to the source, the existing (as a solution of the boundary problem) only when it is available.

Keywords: vibrational structure, the structure of the guide, the boundary value problem.