

Расчет собственной емкости плоских элементов конструкции космического аппарата

В.В. Брагин, Р.А. Помельников, Н.Д. Сёмкин

Самарский государственный аэрокосмический университет им. ак. С.П. Королева
443086, Российская Федерация, г. Самара
Московское шоссе, 34

Предложена методика расчета распределения потенциалов на основе использования триангуляционного метода аппроксимации поверхностей, метода площадок и аналитического нахождения элементов матрицы кулоновского взаимодействия. Полученные результаты имеют хорошую сходимость с экспериментами по исследованию процессов электризации на малом космическом аппарате «АИСТ».

Ключевые слова: триангуляция, собственная емкость, метод интегральных уравнений, космический аппарат, электризация.

Введение

Взаимодействие космического аппарата (КА) с окружающей космической средой является сложным непрерывным физико-химическим процессом, изучение которого имеет важное научное и прикладное значение [1–3]. Одним из результатов взаимодействия космической среды с КА является электризация, т. е. накопление избыточного заряда на его поверхности, что приводит к возникновению разницы потенциалов и может стимулировать электростатические разряды (ЭСР). В связи с тем что данный процесс приводит к сбоям бортовой аппаратуры (БА), ее отказам, а возможно, и полному выходу из строя, математическое моделирование воздействия космической плазмы на аппарат является актуальной задачей.

В настоящее время существует несколько программных пакетов математического моделирования электризации КА, основанных на различных аппроксимациях поверхности, математических методиках [4], например методе интегральных уравнений (МИУ) или методе конечных элементов (МКЭ). У этих программных пакетов имеются свои преимущества и недостатки.

Существуют следующие программные комплексы для моделирования полярных орбит: NASCAP-LEO, POLAR. Методики расчета для данных программных комплексов обладают рядом недостатков:

– аппроксимация поверхности КА прямоугольной сеткой, обладающей низкой точностью

аппроксимации элементов конструкции с небольшим радиусом кривизны;

– необходимость решения электростатической задачи (распределение плотностей зарядов и полей) на каждом временном шаге полностью.

В [4] устранена необходимость решения электростатической задачи на каждом временном шаге. Однако данная методика предназначена для решения электростатической задачи в разреженной плазме (для геостационарной орбиты), кроме того, собственная емкость элементарной площадки находится через специальные функции [4].

Применение средств защиты от статического электричества, а также усложнение геометрической и электрофизической поверхности КА, функционирующих на полярной орбите с высотой до 2000 км, требует разработки методики, устраняющей недостаток существующих.

Для построения математической модели электризации КА [4] выбран МИУ. Данный метод пространственного распределения потенциала описывается следующим соотношением:

$$U(r) = \int_S \frac{\sigma(r')}{|r - r'|} dS', \quad (1)$$

где $U(r)$ – пространственное распределение потенциала; $\sigma(r')$ – относительная плотность поверхностного заряда; r' – радиус-вектор центра тяжести j -го элемента поверхности КА.

Для численного решения данного интегрального уравнения относительно $\sigma(r)$ производят

ся триангуляция поверхности КА. Плотность поверхностного заряда σ_i на каждом элементе считается постоянной, а следовательно, интегральное уравнение сводится к системе линейных уравнений относительно плотности зарядов элементов σ_i :

$$\sum_j A_{mn} \sigma_j = U_i^*, \quad (2)$$

где A_{mn} – матрица кулоновского взаимодействия; U_i^* – эффективный потенциал поверхности i -го элемента.

Искомым решением этой системы является матрица взаимных емкостей элементов поверхности КА [4].

В ряде случаев в диагональных элементах этой матрицы возникает сингулярное возмущение, поэтому уравнение (1) относится к уравнениям Фредгольма первого рода.

1. Методика расчета

Для устранения перечисленных выше недостатков существующих методик расчета потенциала поверхности низкоорбитальных КА разработана методика, которая заключается в следующем:

1. Проведение триангуляции поверхности КА методом Делоне (рис. 1) так, чтобы геометрические размеры полученных элементов поверхности (треугольников) были меньше радиуса Дебая для свойств плазмы на выбранной высоте и орбите функционирования КА. Это обеспечит высокую точность аппроксимации поверхности.

Найдем центры тяжести полученных треугольников и решим интеграл следующего вида:

$$C = \iint_S \frac{dy}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}, \quad (3)$$

где x_0, y_0, z_0 – радиус-вектор центра тяжести i -го треугольника, интегрирование по переменной x, y, z ведется по площади треугольника.

2. Для упрощения решения уравнения вида (3) и повышения скорости вычислений при каждом вычислении i -го треугольника переходят к новой системе координат так, чтобы треугольник располагался в плоскости XOY . Для этого необходимо сдвинуть начало координат в одну из вершин, а затем совершить три обратных поворота вокруг осей координат на углы Эйлера, описанные следующими формулами:

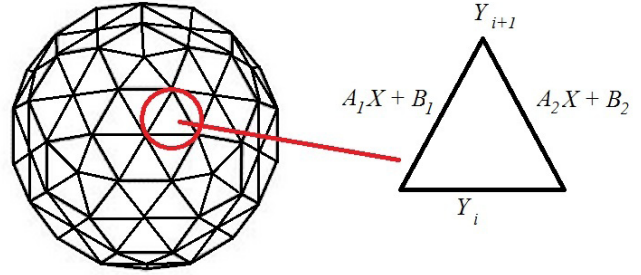


Рис. 1. Определение пределов интегрирования

$$\begin{cases} x_1 = x \cos \varphi + y \sin \varphi; \\ y_1 = -x \sin \varphi + y \cos \varphi; \\ z_1 = z; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1; \\ y_2 = y_1 \cos \theta + z_1 \sin \theta; \\ z_2 = -y_1 \sin \theta + z_1 \cos \theta; \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} x_3 = x_2 \cos \psi + z_2 \sin \psi; \\ y_3 = y_2; \\ z_3 = -x_2 \sin \psi + z_2 \cos \psi. \end{cases}$$

После преобразований координат i -го треугольника уравнение (3) примет вид

$$C = \iint_S \frac{dy}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2}}. \quad (5)$$

3. Определяются пределы интегрирования уравнения (5). Интегрирование по dx проводится в пределах от x_{pi} до x_{vi} , где x_{pi} – значение x составляющей координаты точки пересечения высоты, опущенной из одной вершины i -го треугольника и противоположного ребра, а x_{vi} – это значение x составляющей точки вершины i -го треугольника. Интегрирование по dy проводится в пределах от $(A_1 x + B_1)$ до $(A_2 x + B_2)$, где коэффициенты прямых вычисляются по следующим формулам:

$$A = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i},$$

$$B = y_i - \frac{x_i}{x_{i+1} - x_i} (y_{i+1} - y_i).$$

Подставим пределы интегрирования в уравнение (5), получим:

$$C = \int_{x_{pi}}^{x_{vi}} dx \int_{A_1 x - B_1}^{A_2 x - B_2} \frac{dy}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2}}. \quad (6)$$

4. Находится аналитическое решение уравнения (6). Для этого производятся следующие замены $C = (x - x_{Ti})^2 + z^2$, $D = y - y_{Ti}$, $dD = dy$ в уравнении (6), и при условии изменения пределов интегрирования получается

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \int_{y_i - y_{Ti}}^{Ax+B-y_{Ti}} \frac{dD}{\sqrt{C^2 + D^2}} = \ln \left(D + \sqrt{C^2 + D^2} \right) \Big|_{y_i - y_{Ti}}^{Ax+B-y_{Ti}}. \quad (7)$$

Преобразуем полученный натуральный логарифм (7) в обратную гиперболическую функцию:

$$\ln \left(D + \sqrt{C^2 + D^2} \right) \Big|_{y_i - y_{Ti}}^{Ax+B-y_{Ti}} = \operatorname{Arsh} \left(\frac{D}{C} \right) + \ln(C) \Big|_{y_i - y_{Ti}}^{Ax+B-y_{Ti}}. \quad (8)$$

Подставим пределы интегрирования в уравнение (8):

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\ln \left(Ax + B - y_{Ti} + \sqrt{(x - x_{Ti})^2 + z^2 + (Ax + B - y_{Ti})^2} \right) - \ln \left(y_i - y_{Ti} + \sqrt{(x - x_{Ti})^2 + (y_i - y_{Ti})^2 + z^2} \right) \right) dx. \quad (9)$$

Проинтегрируем первый член выражения (9):

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\ln \left(Ax + B - y_{Ti} + \sqrt{(x - x_{Ti})^2 + z^2 + (Ax + B - y_{Ti})^2} \right) \right) dx. \quad (10)$$

Для этого сделаем следующие замены в выражении (10):

$$Ax + B - y_{Ti} = C, \quad x = \frac{C - B + y_{Ti}}{A}, \quad dC = Adx.$$

В результате замены в уравнении (10) получаем следующие выражение:

$$\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\ln \left(AC + \sqrt{(C - B + y_{Ti} - Ax_{Ti})^2 + A^2 z^2 + C^2 A^2} \right) - \ln(A) \right) dC. \quad (11)$$

В выражении (11) сделаем следующие замены:

$$X = -B + y_{Ti} - Ax_{Ti}, \quad Z = A^2 z^2. \quad (12)$$

После подстановки (12) в (11) получаем выражение:

$$\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\ln \left(AC + \sqrt{(C + X)^2 + Z + C^2 A^2} \right) - \ln(A) \right) dC. \quad (13)$$

Используем интегрирование по частям:

$$du = dx$$

$$v = \ln \left(AC + \sqrt{(C + X)^2 + Z + C^2 A^2} \right);$$

$$u = x;$$

$$dv = \frac{AdC}{AC + \sqrt{A^2 C^2 + (C + X)^2 + Z}} +$$

$$+ \left[(1 + A^2) C + X \right] /$$

$$/ \left[\left(AC + \sqrt{A^2 C^2 + (C + X)^2 + Z} \right) \times$$

$$\times \sqrt{A^2 C^2 + (C + X)^2 + Z} \right] dC. \quad (14)$$

Для решения интеграла (14) применим третью подстановку Эйлера, т. к. выполняется следующее условие:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2). \quad (15)$$

Представим выражение (14) в виде произведения (15):

$$A^2 C^2 + (C + X)^2 + Z =$$

$$= (1 + A^2) C^2 + 2CX + X^2 + Z =$$

$$= (1 + A^2) \left(C - \frac{-X - \sqrt{-A^2(X^2 + Z) - Z}}{1 + A^2} \right) \times \quad (16)$$

$$\times \left(C - \frac{-X + \sqrt{-A^2(X^2 + Z) - Z}}{1 + A^2} \right).$$

Сделаем следующую замену в выражении (16):

$$a = 1 + A^2.$$

Обозначим множители в выражении (16) как

$$\mu = \frac{-X - \sqrt{-A^2(X^2 + Z) - Z}}{a};$$

$$\lambda = \frac{-X + \sqrt{-A^2(X^2 + Z) - Z}}{a}. \quad (17)$$

После третьей подстановки Эйлера в уравнение (13) получаем:

Таблица

Матрица собственных емкостей плоской поверхности КА

2.407	0.960	0.519	0.365	0.508	0.724	0.367	0.347
0.960	2.407	0.724	0.508	0.365	0.519	0.347	0.367
0.508	0.724	2.407	0.960	0.353	0.532	0.508	0.724
0.365	0.519	0.960	2.407	0.264	0.350	0.365	0.519
0.519	0.365	0.347	0.264	2.407	0.960	0.519	0.365
0.724	0.508	0.532	0.353	0.960	2.407	0.724	0.508
0.367	0.347	0.519	0.365	0.508	0.724	2.407	0.960
0.347	0.367	0.724	0.508	0.365	0.519	0.960	2.407

$$C = \frac{\lambda t^2 - a\mu}{t^2 - a} =$$

$$= \left[t^2 \left(-X + \sqrt{-A^2(X^2 + Z) - Z} \right) + \right. \quad (18)$$

$$\left. + a \left(X + \sqrt{-A^2(X^2 + Z) - Z} \right) \right] / \left[a(t^2 - a) \right].$$

$$\sqrt{A^2 C^2 + (C + X)^2 + Z} = \frac{a(\lambda - \mu)t}{t^2 - a} =$$

$$= \frac{2t\sqrt{-A^2(X^2 + Z) - Z}}{t^2 - a}; \quad (19)$$

$$dC = \frac{2a(\mu - \lambda)t}{(t^2 - a)^2} dt = \frac{-4t\sqrt{-A^2(X^2 + Z) - Z}}{(t^2 - a)^2}. \quad (20)$$

$$A \int \left[\frac{-4t\sqrt{-A^2(X^2 + Z) - Z}}{(t^2 - a)^2} \right] /$$

$$/ \left[A \frac{t^2 \left(-X + \sqrt{-A^2(X^2 + Z) - Z} \right)}{a(t^2 - a)} + \right. \quad (21)$$

$$\left. + A \frac{a \left(X + \sqrt{-A^2(X^2 + Z) - Z} \right)}{a(t^2 - a)} + \right.$$

$$\left. + \frac{2t\sqrt{-A^2(X^2 + Z) - Z}}{t^2 - a} \right] dt =$$

$$= A \int \frac{-4tabdt}{(t^2 - a)(A(-X + b)t^2 + 2abt + a(X + b))}. \quad (22)$$

$$b = \sqrt{Z(-A^2 - 1) - A^2 X^2}.$$

Полученный интеграл приведем к виду

$$A \int \frac{-4tabdt}{(t^2 - a)(t - A1)(t - A2)}. \quad (23)$$



Рис. 2. Распределение заряда на поверхности плоского элемента КА

В качестве примера проведен расчет потенциалов для плоского элемента конструкции КА (солнечной батареи). Получена матрица собственных емкостей (табл.).

Из матрицы собственных емкостей поверхности в результате получаем следующее распределение заряда на поверхности плоского элемента КА (рис. 2).

2. Обсуждение результатов

Преимуществом данной методики расчета потенциала поверхности КА является широкий диапазон орбит функционирования, который включает в себя не только низкие, но и геостационарные и полярные орбиты.

Применение в предложенной методике триангуляции Делоне обусловлено рядом преимуществ, которые достигаются при аппроксимации поверхности:

- при построении используется простое локальное условие, для его проверки достаточно анализировать пары смежных треугольников;
- несмотря на локальные условия, триангуляция Делоне является однозначной с точностью до множества точек, лежащих на одной окружности, внутри которой нет других точек;
- следствием условия Делоне является локальное условие максимума минимального угла, поэтому получаемые треугольники наиболее

близки к равносторонним, что повышает точность последующей интерполяции поверхности.

Это позволяет обеспечить высокую точность построения модели КА любой сложности.

Предложен аналитический метод нахождения потенциала поверхности КА для геостационарных орбит, позволяющий увеличить скорость и точность (т. к. позволяет обойти сингулярность возникающую при нахождении матрицы кулоновского взаимодействия) вычислений.

Для низких орбит функционирования КА с высокой концентрацией плазмы предложено численное решение экранированного уравнения Пуассона, которое позволяет учесть влияние плазмы на потенциал поверхности КА. На численное решение накладывається ограничение линейных размеров дискретности аппроксимации, линейные размеры треугольника не должны превышать длины радиуса Дебая для выбранной орбиты функционирования КА. Это ограничение приводит к увеличению времени вычислений, например, для КА цилиндрической формы с радиусом 1,5 м и высотой 7 м, для орбиты функционирования 600 км, радиус Дебая составляет 0,012 м, а число дискрет порядка 1600000.

Заключение

1. Триангуляция Делоне дает возможность аппроксимировать поверхность с большей точностью.

2. Данная методика позволяет определить потенциал поверхности низкоорбитальных КА, функционирующих на полярной орбите с высотой до 2000 км.

3. Нет необходимости решать электростатическую задачу на каждом временном шаге полностью.

4. Полученные результаты интегрирования имеют 5 %-ную погрешность по сравнению с потенциалом, полученным из аналитического уравнения для сферы.

5. Возможно применение данной методики в широком диапазоне орбит функционирования КА.

Список литературы

1. Графодатский О.С., Исляев Ш.Н. Взаимодействие спутников связи с окружающей средой. Томск: МПП РАСКО, 1993. 208 с.
2. Моделирование распределения электромагнитного поля при электростатическом разряде на поверхности космического аппарата / Н.Д. Семкин [и др.] // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. 2012. № 2. С. 112–120.
3. Методы защиты негерметичных отсеков космического аппарата от проникновения электромагнитного поля / Н.Д. Семкин [и др.] // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. 2012. № 2. С. 120–126.
4. Математическое моделирование электризации космических аппаратов / Л.С. Новиков [и др.] // Модель космоса. Т. II. Воздействие космической среды на материалы и оборудование космических аппаратов; под ред. Л.С. Новикова. М.: КДУ, 2007. С. 276–314.
5. Иоссель Ю.Я., Кочанов Э.С., Струнский М.Г. Расчет электрической емкости. Л.: Энергоиздат, 1981. 488 с.
6. Янпольский А.Р. Гиперболические функции. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 288 с.
7. Галанин М.П., Щеглов И.А. Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей: прямые методы. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2006.

Calculating the self-capacitance of planar structural elements of the spacecraft

V.V. Bragin, R.A. Pomelnikov, N.D. Syomkin

The paper presents a methodology for calculating distribution of potentials based on the triangulation method of plane approximation, surface method and analytical determination of the matrix elements of Coulomb interaction. The results obtained demonstrate good agreement with the experiments on the electrization process in small spacecraft «AIST».

Keywords: triangulation, self-capacitance, the method of integral equations, spacecraft, electrification.
