

## Анализ аннигиляции позитрона и электрона и дополнительные возможности позитронно-эмиссионной томографии

А.Н. Волобуев, Т.А. Антипова

Самарский государственный медицинский университет  
443099, Российская Федерация, г. Самара  
ул. Чапаевская, 89

Рассмотрены причины возникновения углового распределения образующихся фотонов при аннигиляции электрона и позитрона. Показано, что угловое распределение интенсивности излучения является следствием эффекта Доплера в системе отсчета центра масс электрона и позитрона. В системе отсчета, связанной с электроном, угловое распределение фотонов отсутствует, но заменяется доплеровским изменением частот фотонов. Полученные результаты применены к анализу работы позитронно-эмиссионного томографа.

*Ключевые слова:* аннигиляция, электрон, позитрон, фотон, эффект Доплера, угловое распределение фотонов, позитронно-эмиссионный томограф.

### Введение

Анализ углового распределения вылетающих фотонов при аннигиляции позитрона и электрона имеет важное значение для проектирования позитронно-эмиссионных томографов (ПЭТ). ПЭТ представляет собой самое современное диагностическое устройство, используемое для поиска новообразований на самых ранних стадиях их появления.

К сожалению, механизм процесса аннигиляции электрона и позитрона неизвестен. П. Дираком была предложена модель этого процесса.

Согласно представлениям Дирака [1; 2], аннигиляцию можно представить как переход электрона из состояния с положительной энергией в состояние с отрицательной энергией. Согласно теории вакуумных дырок Дирака, позитрон представляет собой дырку в поле вакуума. Взаимодействие электрона и позитрона, их аннигиляция – это заполнение вакуумной дырки электроном. При этом выделяется энергия в виде двух квантов электромагнитного излучения.

### 1. Угловое и энергетическое распределения аннигиляционного излучения

Квантово-электродинамические расчеты процесса аннигиляции были проведены довольно давно, неоднократно проверялись и перепроверялись, в том числе и авторами статьи.

В результате этих расчетов были получены две формулы для дифференциального эффективного сечения рассеяния квантов электромагнитного излучения в телесный угол  $d\Omega$ .

Первая по времени формула была получена Гайтлером [2]. Эта формула имеет вид:

$$d\sigma = \frac{e^4}{4(4\pi)^2 k^0 p} \left\{ \frac{(k^0)^2 + p^2 + p^2 \sin^2 \theta}{(k^0)^2 - p^2 \cos^2 \theta} - \frac{2p^4 \sin^4 \theta}{\left((k^0)^2 - p^2 \cos^2 \theta\right)^2} \right\} d\Omega. \quad (1)$$

Формула дана в обозначениях [3], где имеется ее подробный вывод. Использована т. н. рациональная система единиц, в которой скорость света и постоянная Планка равны единице  $c = \hbar = 1$ . В этой системе единиц энергия импульс и масса имеют одну и ту же размерность.

В формуле (1)  $e$  – заряд электрона (или позитрона с противоположным знаком),  $k^0$  – энергия фотона,  $p$  – импульс электрона,  $\theta$  – угол между импульсами электрона и одного из излученных фотонов. Формула (1) получена при условии суммирования по всем направлениям поляризации фотонов.

При выводе (1) использована система отсчета, связанная с центром масс взаимодействующих электрона и позитрона, в которой импульс

сы электрона и позитрона равны по модулю между собой и противоположны по направлению  $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$ . Импульсы фотонов также равны по модулю между собой и противоположны по направлению  $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2$  [2; 3]. Отметим, что в этой системе отсчета условия наблюдения обоих фотонов одинаковы.

Вторая формула была предложена несколько позже Фейнманом [4] представляет собой частотное или энергетическое распределение вылетающих квантов:

$$d\sigma = \frac{e^4 \omega_1^2}{64\pi^2 4m^2 |\mathbf{p}_+| (E_+ + m)} \times \left[ \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} + 2 - 4(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2)^2 \right] d\Omega. \quad (2)$$

Формула (2) записана в обозначениях [4]. Как и в предыдущем случае, использована рациональная система единиц.

В формуле (2)  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  – единичные векторы поляризации излученных при аннигиляции фотонов,  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – частоты излученных фотонов,  $m$  – масса электрона (или позитрона),  $|\mathbf{p}_+|$  – модуль импульса позитрона,  $E_+$  – его энергия.

Формула (2) похожа на формулу Клейна – Нишины для эффекта Комптона [4; 5]. Главное отличие в том, что перед третьим и четвертым слагаемыми в квадратных скобках знаки изменены на противоположные.

Важнейшим отличительным условием вывода формулы (2) является использование другой системы отсчета по сравнению с выводом формулы (1). Формула (2) выводилась в системе отсчета, в которой электрон покоится, а движется позитрон.

Эта система отсчета в целом эквивалентна системе отсчета, связанной с ПЭТ. Поэтому назовем эту систему отсчета лабораторной. Электроны объекта, исследуемого в ПЭТ, в основном находятся в связанном состоянии. Позитроны же возникают в результате  $\beta$ -позитронного распада радиоактивных элементов. Поэтому электроны в лабораторной системе отсчета можно считать неподвижными (если исключить хаотическое тепловое движение молекул).

Обе формулы (1) и (2) выводились с помощью стандартной диаграммной техники Фейнмана и диаграмм второго порядка теории возмущений. Однако результаты вывода существенно различаются.

Во-первых, формула (1) предполагает довольно сложное угловое распределение интен-

сивности  $I$  аннигиляционного излучения т. к.  $d\sigma \sim dP \sim Id\Omega$ , где  $dP$  – поток энергии излучения через площадь  $dS$ , интенсивность  $I = dP / dS$ . Причем это распределение связано только с импульсом электрона, угол  $\theta$  присутствует только в комплексе с импульсом  $p$ . В формуле (2) угловое распределение фотонов в явном виде отсутствует.

Во-вторых, формула (2) предполагает возможность различной энергии фотонов при аннигиляции, что запрещается выводом формулы (1) вследствие  $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2$ .

Поэтому прежде всего, возникает вопрос: какова природа углового распределения интенсивности аннигиляционного излучения в (1)? Связано ли это распределение с самим процессом аннигиляции, т. е. переходом «вещество – энергия», либо определяется какими-то другими эффектами? Сохранится ли данное угловое распределение фотонов при переходе к другой системе отсчета, например, связанной с позитронно-эмиссионным томографом?

## 2. Причины углового и энергетического распределения аннигиляционного излучения

Для исследования причины угловой зависимости дифференциального эффективного сечения (1) рассмотрим промежуточное выражение вывода, которое еще не просуммировано по направлениям поляризации фотонов [3]:

$$d\sigma = \frac{1}{128\pi^2} \frac{e^4}{pk^0} \times \left\{ \frac{(k^0)^4}{(pk_1)(pk_2)} - \frac{4(k^0)^4 (pe_1)^2 (pe_2)^2}{(pk_1)^2 (pk_2)^2} - \frac{4(k^0)^2 (e_1 e_2)(pe_1)(pe_2) - (e_1 e_2)^2}{(pk_1)(pk_2)} \right\} d\Omega, \quad (3)$$

где  $k_1$  и  $k_2$  – импульсы фотонов. Переменные в квадратных скобках: импульс электрона, импульсы фотонов, единичные векторы поляризации фотонов записаны в виде 4-векторов.

Формулу (3) несложно преобразовать к виду:

$$d\sigma = \frac{1}{128\pi^2} \frac{e^4}{pk^0} \left\{ \frac{(k^0)^4}{(pk_1)(pk_2)} - \left[ 2(k^0)^2 \frac{(pe_1)(pe_2)}{(pk_1)(pk_2)} + (e_1 e_2)^2 \right]^2 \right\} d\Omega. \quad (4)$$

Перейдем в (4) к пространственным векторам, используя правило  $(ab) = a^0 b^0 - \mathbf{a}\mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  – трехмерные векторы, компоненты которых изменяются ковариантно,  $a^0$  и  $b^0$  – контравариантно изменяющиеся компоненты 4-векторов, в нашем случае энергетические компоненты.

Переходя к трехмерным векторам, а также учитывая отсутствие контравариантных компонент у поляризационных 4-векторов  $e^0 = 0$ , выражение (4) можно представить в виде

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{128\pi^2} \frac{e^4}{pk^0} \left\{ \frac{(k^0)^4}{(k^0)^4 - (\mathbf{p}\mathbf{k}_1)^2} - \right. \\ &\quad \left. - \left[ 2(k^0)^2 \frac{(\mathbf{p}\mathbf{e}_1)(\mathbf{p}\mathbf{e}_2)}{(k^0)^4 - (\mathbf{p}\mathbf{k}_1)^2} + (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) \right]^2 \right\} d\Omega = \\ &= \frac{1}{128\pi^2} \frac{e^4}{pk^0} \left\{ \frac{1}{1 - \left( \frac{\mathbf{p}\mathbf{k}_1}{(k^0)^2} \right)^2} - \right. \\ &\quad \left. - \left[ \frac{2}{(k^0)^2} \frac{(\mathbf{p}\mathbf{e}_1)(\mathbf{p}\mathbf{e}_2)}{1 - \left( \frac{\mathbf{p}\mathbf{k}_1}{(k^0)^2} \right)^2} + (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) \right]^2 \right\} d\Omega. \end{aligned} \quad (5)$$

При выводе (5) также использовано условие вылета фотонов в строго противоположных направлениях  $\mathbf{k}_2 = -\mathbf{k}_1$ .

Учитывая  $|\mathbf{k}_1| = k^0$ , а также в соответствии с законом сохранения энергии  $ck^0 = mc^2$  (для наглядности вводим внутри скобок скорость света  $c = 1$ ), в формуле (5) заменим

$$\frac{\mathbf{p}\mathbf{k}_1}{(k^0)^2} = \frac{V}{c} \cos \theta,$$

где  $V$  – скорость электрона. В результате получим

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{128\pi^2} \frac{e^4}{pk^0} \left\{ \frac{1}{1 - \left( \frac{V}{c} \cos \theta \right)^2} - \right. \\ &\quad \left. - \left[ \frac{2}{1 - \left( \frac{V}{c} \cos \theta \right)^2} \frac{(\mathbf{p}\mathbf{e}_1)(\mathbf{p}\mathbf{e}_2)}{(k^0)^2} + (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) \right]^2 \right\} d\Omega. \end{aligned} \quad (6)$$

Перейдем в (6) в лабораторную систему отсчета, предложенную в [4], связанную с электроном. В этом случае  $\mathbf{p} = 0$ , а  $V$  – можно рассма-

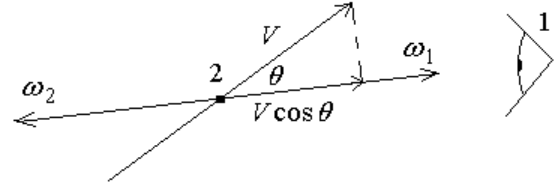


Рис. 1. Наблюдение фотонов, испускаемых движущимся источником

тривать как скорость движения позитрона. То же самое относится и к величине  $p$  в коэффициенте перед скобками. В данной системе отсчета формула (6) значительно упрощается:

$$d\sigma = \frac{1}{128\pi^2} \frac{e^4}{pk^0} \left\{ \frac{1}{1 - \left( \frac{V}{c} \cos \theta \right)^2} - (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2 \right\} d\Omega. \quad (7)$$

Исследуем вспомогательную задачу.

Наблюдатель 1, находящийся в «неподвижной» (связанной с Землей) системе отсчета, рис. 1, рассматривает некоторую движущуюся со скоростью  $V$  частицу 2, которая в определенный момент времени излучает два противоположно направленных кванта. При  $V = 0$  частота квантов равна  $\omega_0$ . Угол между скоростью частицы и направлением распространения одного из квантов равен  $\theta$ . В направлении наблюдателя частица имеет составляющую скорости  $V \cos \theta$ .

За счет эффекта Доплера квант, движущийся в направлении наблюдателя, будет обладать повышенной частотой [6]:

$$\omega_1 = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c} \cos \theta}. \quad (8)$$

Для кванта, движущегося в противоположном направлении, будет наблюдаться т. н. «красное смещение»:

$$\omega_2 = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c} \cos \theta}. \quad (9)$$

Используя (8) и (9), найдем величину комплекса  $\omega_1 / \omega_2 + \omega_2 / \omega_1 + 2$ , который входит в формулу (2):

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} + 2 = \frac{(\omega_1 + \omega_2)^2}{\omega_1 \omega_2} = \frac{4}{1 - \left( \frac{V}{c} \cos \theta \right)^2}. \quad (10)$$

Отметим, что различие в частотах квантов в рассматриваемой задаче определяется различием в условиях наблюдения этих квантов: один

квант движется к наблюдателю, другой удаляется от него.

В формуле (7) фактически реализуется рассмотренная вспомогательная задача. При этом под движущейся частицей подразумевается позитрон, а наблюдатель находится на «неподвижном» электроне. Поэтому, подставляя (10) в (7), найдем:

$$d\sigma = \frac{1}{128\pi^2} \frac{e^4}{pk^0} \left\{ \frac{1}{4} \left( \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} + 2 \right) - (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2)^2 \right\} d\Omega =$$

$$= \frac{1}{128\pi^2} \frac{e^4}{4pk^0} \left\{ \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} + 2 - 4(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2)^2 \right\} d\Omega. \quad (11)$$

Отметим, что при использовании формулы (10) мы фактически отказались от условия  $\mathbf{k}_2 = -\mathbf{k}_1$ .

Если в коэффициенте перед скобками в формуле (2) принять  $E_+ = m = \omega_1$ , то формулы (2) и (11) становятся тождественными.

Отметим еще один существенный момент, проявляющийся при переходе от системы отсчета, связанной с центром масс электрона и позитрона, к лабораторной системе отсчета, связанной с электроном. Если поделить формулу (9) на формулу (8), то получается результат, отличающийся от результата, полученного в монографиях, например, [7; 8].

При делении (9) на (8), принимая  $c = 1$ , получаем

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{1 - V \cos \theta}{1 + V \cos \theta}. \quad (12)$$

В [7; 8] предлагается следующее соотношение:

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{E_+ - p_+ \cos \theta}{m}. \quad (13)$$

Учитывая  $E_+ = m$  и  $p_+ = mV$ , находим:

$$\frac{k_2}{k_1} = 1 - V \cos \theta. \quad (14)$$

Формула (14) несколько отличается от формулы (12). Это связано с тем, что формула (14) получена в рамках первого приближения теории возмущений. Поэтому она принципиально неточная. Формула (12) следует из точных формул эффекта Доплера. Таким образом, оставаясь только в рамках первого приближения теории возмущений невозможно установить эквивалентность формул (1) и (2).

В заключение просуммируем формулу (11) по поляризациям фотонов. Возвращаясь к поляризационным 4-векторам с учетом  $e^0 = 0$  и используя  $\sum_{e_1, e_2} (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2)^2 = 2$  [3], найдем:

$$d\sigma = \frac{1}{128\pi^2} \frac{e^4}{4pk^0} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} + 2 - 4(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2)^2 \right\} d\Omega =$$

$$= \frac{1}{128\pi^2} \frac{e^4}{pk^0} \left\{ 1 - \frac{(\omega_2 - \omega_1)^2}{4\omega_1 \omega_2} \right\} d\Omega. \quad (15)$$

Знак модуля принят вследствие стандартного использования модуля составного матричного элемента при нахождении дифференциального эффективного сечения процесса [2].

### 3. Применение аннигиляционного излучения в позитронно-эмиссионном томографе

Учитывая, что в позитронно-эмиссионном томографе скорости позитронов невелики, а также (8) и (9), можно записать:

$$\omega_1 \omega_2 = \omega_0^2 \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2 \cos^2 \theta} \approx \omega_0^2. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (15), получим

$$d\sigma \approx \frac{1}{128\pi^2} \frac{e^4}{pk^0} \left\{ 1 - \frac{(\Delta\omega)^2}{4\omega_0^2} \right\} d\Omega, \quad (17)$$

где обозначено  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ .

Найдем разность частот излучаемых фотонов, т. е. величину  $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ , используя формулы (8) и (9):

$$\Delta\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c} \cos \theta} - \omega_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c} \cos \theta} =$$

$$= \omega_0 \frac{2 \frac{V}{c} \cos \theta \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \left(\frac{V}{c} \cos \theta\right)^2}. \quad (18)$$

Если угол  $\theta = 0$ , т. е. позитрон движется по линии, соединяющей детекторы  $\gamma$ -излучения  $D_1$  и  $D_2$ , разность частот фотонов будет максимальной и формула (18) преобразуется к виду

$$\Delta\omega_{\max} = \omega_0 \frac{2 \frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (19)$$

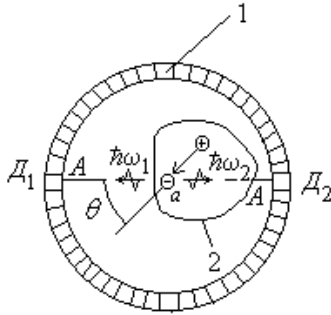


Рис. 2. Принципиальная схема регистрации фотонов в позитронно-эмиссионном томографе

Учитывая  $V \ll c$ , найдем:

$$\frac{\Delta\omega_{\max}}{2\omega_0} = \frac{V}{c}. \quad (20)$$

Величину  $\omega_0$  можно получить, исходя из приближенного равенства  $\hbar\omega_0 \approx mc^2$ . В этом случае

$$\Delta\omega_{\max} = 2 \frac{V}{\lambda}, \quad (21)$$

где

$$\lambda = \frac{h}{mc} = 3,86159 \cdot 10^{-13} \text{ м}$$

– комптоновская длина волны электрона [10].

На рис. 2 показана принципиальная схема регистрации фотонов в позитронно-эмиссионном томографе [9].

Исследуемый объект 2 помещается в кольцо детекторов 1. При аннигиляции позитрона и электрона, находящегося в точке  $a$ , вылетают два кванта с энергиями  $\hbar\omega_1$  и  $\hbar\omega_2$  в противоположных направлениях (приведенная постоянная Планка  $\hbar = 1$  введена для наглядности). Если кванты, летящие по линии  $A-A$ , регистрируются детекторами  $D_1$  и  $D_2$  одновременно, то точка испускания квантов находится посередине между детекторами  $D_1$  и  $D_2$ . Детекторы в кольце 1 с точки зрения эффекта Доплера в системе отсчета, связанной с электронами, играют роль неподвижных наблюдателей.

По количеству квантов, вылетающих в разных направлениях, процесс сферически симметричен. Поэтому плотность детекторов в кольце 1 должна быть равномерной. Однако частоты квантов, а следовательно, и их энергии, в зависимости от направления на детектор (наблюдатель) за счет эффекта Доплера могут различаться на величину  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ .

Регистрируя разность частот или энергий вылетевших в противоположных направлениях квантов, используя максимальное значение этой разности за время измерения  $\Delta\omega_{\max}$ , можно оценить скорости движения позитронов (21). Учиты-

вая, что скорость позитрона пропорциональна плотности ткани, через которую он движется  $\rho \sim V$ , получаем необходимую информацию о плотности ткани в патологическом очаге. Эта дополнительная информация может быть получена в процессе диагностики организма с помощью позитронно-эмиссионного томографа.

## Заключение

По результатам проведенного анализа мы можем сделать следующие выводы.

Формулы (1) и (2) адекватно в разных системах отсчета описывают разлет фотонов при аннигиляции электрона и позитрона.

В лабораторной системе отсчета, связанной с электроном, угловое распределение количества вылетающих фотонов отсутствует, однако за счет различия в условиях наблюдения квантов, вследствие эффекта Доплера, возникает различие в частотах излученных квантов.

При переходе в систему отсчета, связанную с центром масс электрона и позитрона, различие в частотах излученных квантов редуцируется в угловое распределение интенсивности аннигиляционного излучения, которое также является следствием эффекта Доплера.

Исследуя угловое распределение интенсивности электромагнитного излучения при аннигиляции позитрона и электрона в системе их центра масс, мы исследуем не аннигиляцию, а совершенно другое физическое явление – эффект Доплера, который сопровождает аннигиляционное излучение. Следовательно, первая исчезающая поправка теории возмущений, полученная на основе дырочной гипотезы Дирака, не приводит к подтверждению или отрицанию этой гипотезы, даже если эксперименты подтверждают угловое распределение интенсивности аннигиляционного излучения.

В лабораторной системе отсчета, связанной с позитронно-эмиссионным томографом, излучение аннигиляционных квантов сферически-симметрично, однако следует учитывать некоторое различие частот противоположно излученных фотонов вследствие эффекта Доплера.

## Список литературы

1. Dirac P.A.M. Direction in physics; ed. by H. Hora and J.R. Shepanski. New York: John Wiley & Sons, 1978. 78 p.
2. Гайтлер В. Квантовая теория излучения. М.: Изд-во Иностран. лит., 1956. С. 302–304.

3. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантовых полей. М.: Наука, 1976. С. 203–205.
4. Фейнман Р. Квантовая электродинамика: курс лекций. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. С. 135–137.
5. Волобуев А.Н., Толстоногов А.П. Угловое распределение фотоэлектронов при воздействии на поверхность металла электромагнитных волн // Поверхность. Рентген-, синхротр. и нейтрон. исслед. 2013. № 8. С. 63–74.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1967. С. 156.
7. Ициксон К., Зюбер Ж.-Б. Квантовая теория поля. М.: Мир, 1984. С. 280.
8. Бъеркен Дж.Д., Дрелл С.Д. Релятивистская квантовая теория. М.: Наука, 1978. С. 138.
9. Волобуев А.Н. Основы медицинской и биологической физики. Самара: Самарский дом печати, 2011. С. 636.
10. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике. М.: Наука, 1990. С. 576.

---

## Analysis of annihilation positron and electron and additional opportunities of the positron-emission tomography

*A.N. Volobuev, T.A. Antipova*

The reasons of angular photon distribution occurrence at electron-positron annihilation are considered. It is shown, that angular photon distribution is consequence of Doppler's effect in the reference frame of the electron and positron mass center. In the reference frame bound with moving electron the angular photon distribution is absent. But it is replaced by the Doppler's shift of photons frequencies. The received results are applied to the analysis of a positron-emission tomograph work.

*Keywords:* annihilation, electron, positron, photon, Doppler's effect, angular photon distribution, positron-emission tomograph.

---