

Интегральная модель дробного томсоновского автогенератора

В.В. Зайцев, Ар.В. Карлов, Д.Б. Нураев

Самарский государственный университет
443011, Российская Федерация, г. Самара
ул. Ак. Павлова, 1

Разработана модель автоколебательной системы дробного порядка, основанная на интегральном уравнении движения. Приведены численные результаты моделирования процесса установления автоколебаний. Они сопоставлены с приближенными аналитическими результатами, полученными в квазигармоническом приближении.

Ключевые слова: дробная динамика, автоколебательная система, интегральное уравнение Вольтерра, численное интегрирование.

Введение

В последнее время под влиянием возросшего интереса к естественнонаучным приложениям [1] теории дробного интегро-дифференцирования формируется новый раздел динамики – дробная динамика или в англоязычном варианте – фрактальная динамика (fractional dynamics) [2]. Он охватывает исследования систем с интегро-дифференциальными уравнениями движения дробного порядка. Среди них одно из центральных мест, несомненно, принадлежит автоколебательным системам с фрактальными связями – активным фрактальным осцилляторам.

В работе [3] на основе схемы радиоэлектронного автогенератора с дробной цепью возбуждения резонансного контура введена в рассмотрение дифференциальная модель активного фрактального осциллятора (АФО). В [4] предложен алгоритм численного интегрирования дифференциального уравнения движения осциллятора. В настоящем сообщении автоколебания в АФО предлагается исследовать методами численного решения интегрального уравнения движения динамической системы.

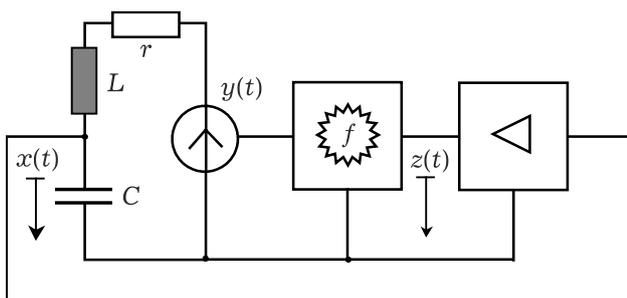


Рис. 1. Эквивалентная схема автогенератора

1. Интегральное уравнение движения АФО

Эквивалентная схема автогенератора томсоновского типа с дробной цепью возбуждения контура и нелинейным усилителем представлена на рис. 1.

Элементы схемы моделируются уравнениями

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 y, \quad (1)$$

$$y = \omega_0^{-\alpha} D_t^\alpha z, \quad (2)$$

$$z = \kappa g(x). \quad (3)$$

Здесь первое уравнение описывает колебательный контур с собственной частотой ω_0 и добротностью Q . Второе уравнение с производной Капуро D_t^α относится к цепи возбуждения дробного порядка α , третье – к усилителю с малосигнальным коэффициентом усиления κ и нелинейной передаточной функцией $g(x)$.

Дифференциальная модель АФО в форме уравнений (1)–(3) методом работы [5] приведена к интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$x(t) = \kappa \omega_0^{2-\alpha} \int_0^t h(t-\tau) D_\tau^\alpha g(x(\tau)) d\tau + X(t) \quad (4)$$

с ядром $h(t-\tau)$ в виде импульсной характеристики осциллятора (1):

$$h(t) = \frac{1}{\omega_1} \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q} t\right) \sin(\omega_1 t) \theta(t),$$

где $\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - 1/4Q^2}$, $\theta(t)$ – функция Хевисайда. Функция времени $X(t)$ в уравнении (4) описы-

вает свободные колебания в контуре, зависящие от начальных условий.

2. Алгоритм и результаты численного моделирования

При численном решении интегрального уравнения (4) перейдем в нем к безразмерному времени $t \rightarrow \omega_0 t$, сохранив для него прежнее обозначение. Кроме того, предполагая высокую ($Q \geq 10$) добротность контура, будем считать $\omega_1 = \omega_0$. Тогда уравнение и его ядро (импульсная характеристика) примут вид

$$x(t) = \kappa \int_0^t h(t - \tau) D_t^\alpha g(x(\tau)) d\tau + X(t), \quad (5)$$

$$h(t) = \exp\left(-\frac{t}{2Q}\right) \sin(t) \theta(t). \quad (6)$$

Производную Капуто $D_t^\alpha g(x(t))$ на дискретной временной сетке $t_n = n\Delta$ аппроксимируем конечными разностями:

$$D_t^\alpha g(x(t_n)) = \sum_{k=1}^n \rho_{n-k} (g(x(t_k)) - g(x(t_{k-1}))), \quad (7)$$

где

$$\rho_{nk} = \frac{1}{\Delta^\alpha \Gamma(2 - \alpha)} \left[(n - k + 1)^{1 - \alpha} - (n - k)^{1 - \alpha} \right],$$

а $\Gamma(z)$ – гамма-функция. Порядок данной аппроксимации зависит от величины α : при $\alpha \rightarrow 1$ формула дифференцирования (7) имеет погрешность $O(\Delta)$, а при $\alpha \rightarrow 0$ она является точной.

Для представления интеграла в правой части уравнения (5) воспользуемся квадратурной формулой трапеций. С учетом того, что $h(0) = 0$ и $D_t^\alpha g(x(0)) = 0$, конечно-разностное представление интегрального уравнения (5) принимает вид

$$x_n = \kappa \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k=1}^m \rho_{m-k} h(t_n - t_m) \times (g(x_k) - g(x_{k-1})) + X_n, \quad (8)$$

где X_n – отсчеты свободных колебаний с начальным состоянием $x(0) = 0$, $x'(0) \neq 0$:

$$X_n = x'(0) \exp\left(-\frac{t_n}{2Q}\right) \sin(t_n).$$

Соотношение (8) является рекуррентной формулой и позволяет последовательно рассчитывать значения отсчетов x_n автоколебаний на дискретной временной сетке начиная с $n = 2$ при начальных условиях $x_0 = 0$ и $x_1 = x'(0)\Delta$. Результаты моделирования процесса установления автоколебаний в АФО по алгоритму (8) иллю-

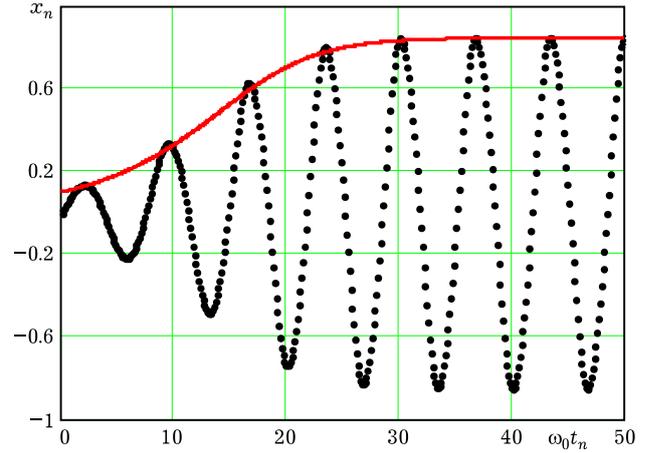


Рис. 2. Процесс установления автоколебаний

стрируются рис. 2. На нем точками отмечена последовательность отсчетов x_n , рассчитанная при начальном условии $x'(0) = 0.1$ с шагом $\Delta = 0.125$ для осциллятора с параметрами $Q = 10$, $\kappa = 0.5$ и $\alpha = 0.5$.

Непрерывной линией на рис. 2 показан график временной зависимости амплитуды первой гармоники автоколебаний, полученный в результате решения приведенного в [3] укороченного уравнения

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{A}{2Q} \left(1 - \kappa Q (1 - A^2) \sin\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) \right). \quad (9)$$

Из рис. 2 видно, что численные и приближенные аналитические результаты моделирования автоколебаний находятся в хорошем количественном соответствии. Наличие незначительного расхождения результатов объясняется тем, что аналитическое решение получено методом гармонической линеаризации и не учитывает высших гармоник автоколебаний, присутствующих в численном решении (8). С ростом параметра превышения порога генерации κQ степень расхождения численных и аналитических результатов увеличивается. Поэтому для моделирования существенно нелинейных режимов автоколебаний ($\kappa Q > 10$) следует пользоваться численным решением.

3. Усечение импульсной характеристики

Вычислительную эффективность алгоритма (8) можно повысить, если вместо полной импульсной характеристики (6) в уравнении (5) использовать усеченную во времени функцию вида

$$h(t) = \exp\left(-\frac{t}{2Q}\right) \sin(t) [\theta(t) - \theta(t - T_h)],$$

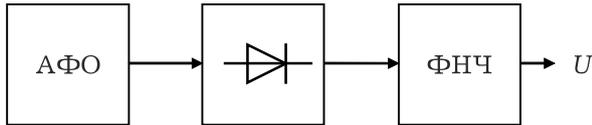


Рис. 3. Схема численного эксперимента

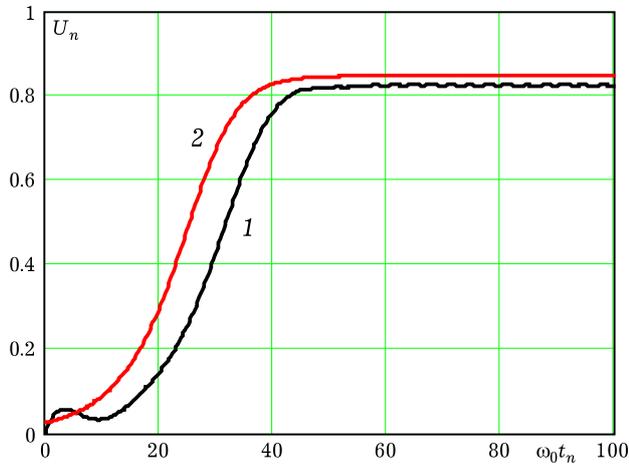


Рис. 4. Огибающая автоколебаний по результатам численного эксперимента

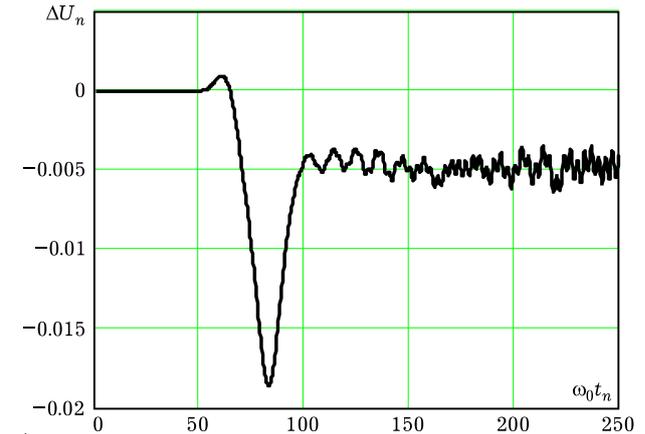
т. е. импульсную характеристику конечной длительности T_h . В этом случае для вычисления значений x_n при $n > M = T_h / \Delta$ вместо формулы (8) следует использовать формулу

$$x_n = \kappa \sum_{m=n-M+1}^{n-1} \sum_{k=1}^m \rho_{m-k} h(t_n - t_m) \times (g(x_k) - g(x_{k-1})). \quad (10)$$

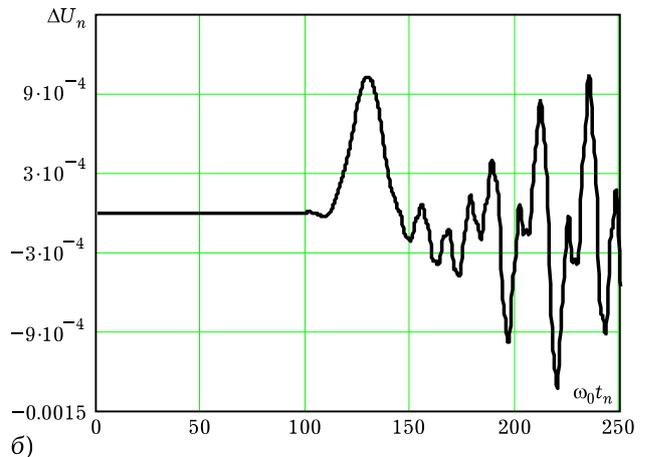
Дать теоретическую оценку погрешности вычислений с усеченной импульсной характеристикой не представляется возможным. Поэтому оценим погрешность на основании результатов численного эксперимента, в котором сигнал АФО подвергнем преобразованию по схеме, приведенной на рис. 3.

После двухполупериодного детектирования сигнала x_n из (8) и последующей низкочастотной фильтрации результата (использован фильтр Баттерворта четвертого порядка с частотой среза $\omega_c = 0.4\omega_0$) получен сигнал U_n , показанный на рис. 4 линией 1. Линия 2 отображает решение укороченного уравнения (9) для амплитуды первой гармоники автоколебаний.

Как следует из рис. 4 с учетом начальной реакции фильтра и группового запаздывания можно утверждать, что в эксперименте надежно выделяется огибающая автоколебаний. На следующих этапах эксперимента эта огибающая сравнивается с огибающими $U_n^{(M)}$ автоколебаний, рассчитанных по усеченной импульсной характеристике. На рис. 5 представлен результат такого



а)



б)

Рис. 5. Погрешность усечения импульсной характеристики

сравнения – разность $\Delta U_n = U_n - U_n^{(M)}$. Разность на рис. 5, а соответствует усечению импульсной характеристики на уровне ее огибающей 0.1 от максимального значения, на рис. 5, б – на уровне 0.01.

Погрешность в 1–2 % в первом случае и 0.1 % во втором указывает на применимость процедуры усечения импульсной характеристики при практических вычислениях.

Заключение

Предложенные здесь численный алгоритм расширяет возможности математического моделирования динамических систем с дробными производными и позволяет устанавливать пределы применимости приближенных аналитических методов.

Список литературы

1. Тарасов В.Е. Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка. М.; Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2011. 568 с.

2. Заславский Г.М. Гамильтонов хаос и фрактальная динамика. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. 472 с.
3. Зайцев В.В., Карлов Ар.В., Яровой Г.П. Динамика автоколебаний дробного томсоновского осциллятора // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2012. Т. 15. № 1. С. 64–68.
4. Зайцев В.В., Карлов Ар.В., Нураев Д.Б. Численный анализ автоколебаний активного фрактального осциллятора // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2013. Т. 16. № 2. С. 45–48.
5. Зайцев В.В., Зайцев О.В., Никулин В.В. Интегральные модели автоколебательных систем // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2006. Т. 9. № 1. С. 53–57.

The integral model of fractional Thomson self-oscillator

V.V. Zaitsev, Ar.V. Karlov, D.B. Nuraev

A numerical model of self-oscillating system with an integral equation of motion is designed. The results of modeling transient process of self-oscillations are presented. There compare with the analytical results are obtained in the quasi-harmonic approximation.

Keywords: fractional dynamics, self-oscillation system, integrated equation of Volterra, numerical integration.

Неганов, В.А.

Теория и применение устройств СВЧ: учебн. пособие для вузов / В.А. Неганов, Г.П. Яровой; под ред. В.А. Неганова. – М.: Радио и связь, 2006. – 720 с.

ISBN 5-256-01812-4



УДК 621.396.67

ББК 32.840

Н 41

В учебном пособии рассматриваются методы проектирования и конструктивной реализации устройств СВЧ: линий передачи различных видов, резонаторов, согласующих и трансформирующих устройств, фильтров, фазовращателей, аттенуаторов, тройниковых соединений, направленных ответвителей, различных мостовых соединений, ферритовых устройств (вентилей, циркуляторов, фазовращателей) и СВЧ-устройств на полупроводниковых диодах (умножителей, смесителей, переключателей, выключателей). Приводятся примеры применения устройств СВЧ в радиосвязи, радиолокации, измерительной аппаратуре и т. д. В книгу вошел оригинальный материал, полученный авторами. Учебное пособие может использоваться как справочник по устройствам СВЧ.

Для специалистов в области теории и техники СВЧ, преподавателей вузов, докторантов, аспирантов, студентов старших курсов радиотехнического и радиофизического профиля.