

Влияние флуктуаций весового вектора на статистические характеристики адаптивной антенной решетки с нелинейной функцией в цепи обратной связи, настраиваемой по алгоритму LMS с квадратичным ограничением

С.В. Зимина

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
603950, Российская Федерация, г. Нижний Новгород
пр. Гагарина, 23

В статье исследуется влияние флуктуаций весовых коэффициентов на статистические характеристики адаптивной антенной решетки с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, настраиваемой по алгоритму LMS с квадратичным ограничением. Показано, что флуктуации весового вектора приводят к искажению статистических характеристик адаптивной антенной решетки, в том числе корреляционной функции и мощности выходного сигнала. В формулах этих характеристик появляются дополнительные слагаемые, обусловленные учетом флуктуаций, что в итоге искажает полезный сигнал на выходе адаптивной антенной решетки.

Ключевые слова: флуктуации весового вектора, адаптивная антенная решетка, цепь обратной связи, алгоритм LMS.

Введение

Использование адаптивных антенных решеток (ААР) для пространственной обработки сигналов позволяет добиться улучшения качества работы различных систем, применяемых в радиолокации и связи. Скорость и точность настройки ААР определяется флуктуациями настраиваемых весовых коэффициентов [1–3]. Специфика влияния флуктуаций на статистические характеристики адаптивных антенных решеток, в свою очередь, зависит от алгоритма настройки ААР. В работах [4–5] исследовалось влияние флуктуаций весового вектора на статистические характеристики адаптивных антенных решеток с дискретным градиентным и быстрым рекуррентным алгоритмом настройки, имеющих нелинейную функцию в цепи корреляционной обратной связи. В данных работах было показано, что флуктуации весового вектора приводят к искажениям выходного сигнала адаптивных антенных решеток.

В последнее время внимание исследователей снова начинает привлекать классический алгоритм минимизации среднего квадрата ошибки (алгоритм МСКО или алгоритм LMS), который одним из первых был предложен еще Уидроу. Однако применение алгоритма LMS встретило трудности, выражающиеся в неконтролируемом подавлении полезного сигнала в случае, когда помеха коррелирована с сигналом. По этой

причине в настоящее время интерес вызывают в первую очередь различные современные модификации LMS алгоритма, не содержащие этого недостатка, и, в частности, алгоритм LMS с квадратичным ограничением на усиление полезного сигнала [6].

В настоящей работе исследуется влияние флуктуаций весовых коэффициентов на характеристики ААР, настраиваемых по LMS-алгоритму с квадратичным ограничением и содержащих нелинейную функцию в цепи обратной связи.

1. Постановка задачи и метод решения

Рассмотрим работу N – элементной ААР, настраиваемой по LMS-алгоритму с квадратичным ограничением и содержащей нелинейную функцию в цепи обратной связи. Настройка вектора весовых коэффициентов \vec{W} данной системы описывается N -мерным векторным уравнением и в дискретном времени будет иметь вид

$$\vec{W}(k+1) = \vec{W}(k) - \mu \left\{ \vec{X}(k) \cdot F \left[\vec{X}^H(k) \vec{W}(k) \right] + \frac{F \left[\vec{X}^H(k) \vec{W}(k) \right]^2}{F \left[\vec{S}^H \cdot \vec{W}(k) \right]^2} \vec{S} \cdot F \left[\vec{S}^H \cdot \vec{W}(k) \right] \right\}. \quad (1)$$

Здесь $\vec{X}(k)$ – вектор комплексных огибающих входных сигналов на приемных элементах решетки; μ – коэффициент адаптации дискретного градиентного алгоритма; « H », « $*$ » – соответственно знаки эрмитовского и комплексного сопряжения.

Необходимо отметить, что в данном алгоритме по сравнению с работой [6] изменен знак перед последним слагаемым в правой части выражения (1), поскольку предварительный анализ показал, что при знаке « $-$ » алгоритм будет расходящимся.

В выражении (1) $Z(k) = F[\vec{X}^H(k)\vec{W}(k)]$ – выходной сигнал антенной решетки, который может быть записан в виде

$$Z(k) = F[\vec{X}^H(k)\vec{W}(k)] = F[y(k)] = \sum_{j=1}^{N_1} a_j y^j(k), \quad (2)$$

где $F[\]$ – нелинейная функция в цепи обратной связи; $y(k)$ – выходной сигнал линейной части ААР; a_j – коэффициенты разложения нелинейности F в ряд Вольтерра [7]. Указанные коэффициенты могут быть представлены следующим образом:

$$a_j = \frac{1}{j!} F^{(j)}[y=0]. \quad (3)$$

Запишем выходной сигнал $Z(k)$ в матричной форме. Введем два N_1 -мерных вектора: вектор коэффициентов ряда Вольтерра $\vec{A} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{N_1}]^T$ и вектор $\vec{Y}(k) = [y(k) \ y^2(k) \ \dots \ y^{N_1}(k)]^T$, представляющий собой вектор степеней выходного сигнала линейной части адаптивной антенной решетки. Тогда выходной сигнал ААР примет вид

$$Z(k) = \vec{A}^T \cdot \vec{Y}(k). \quad (4)$$

Можно приближенно считать, что в стационарном режиме работы адаптивной антенной решетки выражение, стоящее в знаменателе алгоритма (1), представляет собой некоторое постоянное действительное число, поскольку вектор-фазор полезного сигнала \vec{S} детерминированный вектор, а вектор весовых коэффициентов \vec{W} близок к оптимальному весовому вектору:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |F[\vec{S}^H \cdot \vec{W}(k)]|^2 = const = M.$$

Кроме того, можно считать, что в стационарном режиме работы адаптивной антенной решетки $\vec{X}^H(k) \cdot \vec{W}(k) \approx \vec{S}^H \cdot \vec{W}(k)$, поскольку величины собственного шума и помехи на выходе адаптивной антенной решетки стремятся к нулю. По этой причине можно записать:

$$F[\vec{S}^H \cdot \vec{W}(k)] \approx F[\vec{X}^H(k)\vec{W}(k)] = \vec{A}^T \cdot \vec{Y}(k).$$

В итоге с учетом данных предположений и формулы (4) перепишем уравнение (1) следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{W}(k+1) &= \vec{W}(k) - \mu \cdot (\vec{X}(k) \cdot \vec{A}^T \cdot \vec{Y}(k) + \\ &+ M^{-1} |\vec{A}^T \cdot \vec{Y}(k)|^2 \vec{S} \cdot \vec{A}^T \cdot \vec{Y}(k)). \end{aligned} \quad (5)$$

Для статистического анализа уравнения (5) воспользуемся методом теории возмущений, подробно изложенным в [4–5; 8]. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \vec{W} &= \langle \vec{W} \rangle + \vec{\tilde{W}}, \\ \vec{Y} &= \langle \vec{Y} \rangle + \vec{\tilde{Y}}, \\ \mathbf{M}_{XX}(k) &\equiv \mathbf{R}_{XX} + \vec{\Phi}(k), \end{aligned} \quad (6)$$

где случайный весовой вектор \vec{W} , вектор степеней выходного сигнала линейной части адаптивной антенной решетки \vec{Y} и стохастическая матрица $\mathbf{M}_{XX} \equiv \vec{X}^*(k)\vec{X}^T(k)$ представлены в виде сумм их средних значений $\langle \vec{W} \rangle$, $\langle \vec{Y} \rangle$, \mathbf{R}_{XX} и флуктуационных составляющих $\vec{\tilde{W}}(k)$, $\vec{\tilde{Y}}(k)$, $\vec{\Phi}(k)$.

Усредняя (5) и используя обозначения (6), найдем уравнение для $\langle \vec{W} \rangle$ вблизи стационарного состояния, учитывая при этом, что $\mathbf{R}_{XA} = \mathbf{0}$ – корреляционная матрица входных сигналов и коэффициентов ряда Вольтерра является нулевой матрицей, поскольку \vec{A} – детерминированный вектор, а среднее значение вектора входных сигналов равно нулю:

$$\begin{aligned} \langle \vec{W}(k+1) \rangle &= \langle \vec{W}(k) \rangle - \\ &- \mu (\bar{\Delta}_{XA} + M^{-1} \langle |\vec{A}^T \cdot \vec{Y}(k)|^2 \vec{S} \cdot \vec{A}^T \cdot \vec{Y}(k) \rangle). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь

$$\bar{\Delta}_{XA} \equiv \langle \vec{X}(k) \cdot \vec{A}^T \cdot \vec{Y}(k) \rangle = \langle \vec{\Phi}_{XA} \vec{\tilde{Y}} \rangle$$

– вектор кумулянтных функций третьего порядка, учитывающих статистическую зависимость флуктуаций выходного сигнала линейной части ААР $\vec{\tilde{Y}}$ (и, следовательно, флуктуаций весовых коэффициентов $\vec{\tilde{W}}$) и входных сигналов $\vec{\tilde{X}}(k)$.

Учтем, что

$$\begin{aligned} \langle |\vec{A}^T \vec{Y}(k)|^2 \rangle &= \langle \vec{Y}^H(k) \rangle \mathbf{R}_{AA} \langle \vec{Y}(k) \rangle + \\ &+ \langle \vec{\tilde{Y}}^H(k) \mathbf{R}_{AA} \vec{\tilde{Y}}(k) \rangle. \end{aligned}$$

Тогда приближенно можно считать, что выражение (7) переписется в виде

$$\begin{aligned} \langle \vec{W}(k+1) \rangle &= \\ &= \langle \vec{W}(k) \rangle - \mu (\bar{\Delta}_{XA} + M^{-1} \langle \vec{\tilde{Y}}^H(k) \rangle \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \mathbf{R}_{AA} \langle \tilde{\mathbf{Y}}(k) \rangle \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{A}}^T \langle \tilde{\mathbf{Y}}(k) \rangle + \\ & + M^{-1} \langle \tilde{\mathbf{Y}}^H(k) \mathbf{R}_{AA} \tilde{\mathbf{Y}}(k) \rangle \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{A}}^T \langle \tilde{\mathbf{Y}}(k) \rangle. \end{aligned}$$

Для определения стационарного среднего значения вектора весовых коэффициентов $\bar{\mathbf{W}}_{CT} \equiv \langle \bar{\mathbf{W}}(k) \rangle$ и других статистических характеристик адаптивной антенной решетки воспользуемся методом возмущений по параметру (μ), который будем полагать малым ($\mu \ll 1$). В качестве нулевого приближения возьмем среднее значение вектора весовых коэффициентов $\langle \bar{\mathbf{W}} \rangle_0 \equiv \bar{\mathbf{W}}_0$, получающееся из усреднения уравнения (5) в приближении «прямого размыкания» всех смешанных моментов:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{W}}_0(k+1) &= \bar{\mathbf{W}}_0(k) - \\ &- \mu M^{-1} \bar{\mathbf{Y}}_0^H(k) \mathbf{R}_{AA} \bar{\mathbf{Y}}_0(k) \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{Y}}_0(k). \end{aligned} \quad (8)$$

В этом приближении мы вообще пренебрегаем флуктуациями весового вектора, считая $\bar{\mathbf{W}}(k) = \langle \bar{\mathbf{W}}(k) \rangle_0 = \bar{\mathbf{W}}_0(k)$. Заметим, что для получения (8) из уравнения (7) следует положить

$$\bar{\Delta}_{XA} \equiv \langle \tilde{\Phi}_{XA} \tilde{\mathbf{Y}} \rangle = \bar{\Delta}_{XA} = \bar{\mathbf{0}}, \quad (9)$$

а также имеем

$$\begin{aligned} & \langle \tilde{\mathbf{Y}}^H(k) \mathbf{R}_{AA} \tilde{\mathbf{Y}}(k) \rangle = \\ & = \langle \tilde{\mathbf{Y}}^H(k) \rangle \mathbf{R}_{AA} \langle \tilde{\mathbf{Y}}(k) \rangle = 0. \end{aligned}$$

Стационарное значение весового вектора в нулевом приближении будет удовлетворять уравнению

$$-\mu M^{-1} \bar{\mathbf{Y}}_0^H(k) \mathbf{R}_{AA} \bar{\mathbf{Y}}_0(k) \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{Y}}_0(k) = 0, \quad (10)$$

Поскольку $-\mu M^{-1} \bar{\mathbf{Y}}_0^H(k) \mathbf{R}_{AA} \bar{\mathbf{Y}}_0(k)$ является числом, не равным нулю, то уравнение для стационарного значения в нулевом приближении вектора $\bar{\mathbf{Y}}_0(k)$ имеет вид

$$\bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{Y}}_0(k) = 0. \quad (11)$$

Для анализа флуктуаций весового вектора около стационарного решения в предположении негауссовской статистической зависимости между вектором входных сигналов и весовым вектором найдем уравнение для вектора поправки

$$\bar{\mathbf{W}}_{\Pi}(k) \equiv \bar{\mathbf{W}}(k) - \bar{\mathbf{W}}_0 = \langle \bar{\mathbf{W}}_{\Pi}(k) \rangle + \tilde{\tilde{\mathbf{W}}}(k)$$

к нулевому приближению. Вычитая выражение (8) из формулы (5), получим вид данного уравнения:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{W}}_{\Pi}(k+1) &= \bar{\mathbf{W}}_{\Pi}(k) - \mu (\bar{\mathbf{X}}(k) \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{Y}}(k) + \\ &+ M^{-1} \left| \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{Y}}(k) \right|^2 \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{Y}}(k)) + \\ &+ \mu M^{-1} \bar{\mathbf{Y}}_0^H(k) \mathbf{R}_{AA} \bar{\mathbf{Y}}_0(k) \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{Y}}_0(k). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $\left| \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{Y}}(k) \right|^2 = \langle p(k) \rangle + \tilde{p}(k)$ – мгновенная выходная мощность в момент времени k ;

$\bar{\mathbf{Y}}_0^H(k) \mathbf{R}_{AA} \bar{\mathbf{Y}}_0(k) = \langle p(k) \rangle$ – средняя выходная мощность в нулевом приближении. Подставив два введенных обозначения в формулу (12), получим:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{W}}_{\Pi}(k+1) &= \bar{\mathbf{W}}_{\Pi}(k) - \\ &- \mu (M^{-1} \tilde{p}(k) \bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{X}}(k)) \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{Y}}(k) - \\ &- \mu M^{-1} \langle p(k) \rangle \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{Y}}_{\Pi}(k). \end{aligned} \quad (13)$$

Рассмотрим наиболее простой и доступный для анализа случай, когда ряд Вольтерра содержит самое большое по величине первое слагаемое, а остальными слагаемыми в силу их малости можно пренебречь. Тогда:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{Y}}_{\Pi}(k) &\rightarrow a_1 \bar{\mathbf{S}}^H \bar{\mathbf{W}}_{\Pi}(k); \\ \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{Y}}(k) &\rightarrow a_1 \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{S}}^H \bar{\mathbf{W}}(k); \\ \bar{\mathbf{X}}(k) \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{Y}}(k) &\rightarrow a_1 \bar{\mathbf{X}}(k) \bar{\mathbf{X}}^H(k) \bar{\mathbf{W}}(k). \end{aligned}$$

В этом случае формула (13) приобретает вид:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{W}}_{\Pi}(k+1) &= \bar{\mathbf{W}}_{\Pi}(k) - \mu a_1 M^{-1} \langle p(k) \rangle \times \\ &\times \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{S}}^H \bar{\mathbf{W}}_{\Pi}(k) - \mu a_1 \{ M^{-1} \tilde{p}(k) \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{S}}^H + \\ &+ \bar{\mathbf{X}}(k) \bar{\mathbf{X}}^H(k) \} \bar{\mathbf{W}}(k). \end{aligned} \quad (14)$$

Преобразуем уравнение для флуктуаций (14), переходя в \mathbf{Q} -матричное представление, диагонализующее эрмитовскую матрицу $\bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{S}}^H$, по следующим формулам:

$$\bar{\Psi} = \mathbf{Q}^{-1} \bar{\mathbf{W}}_{\Pi}, \quad \bar{\mathbf{W}}_{\Pi} = \mathbf{Q} \bar{\Psi}, \quad \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^H, \quad (15)$$

Тогда получим для $\bar{\Psi}$ – флуктуационной составляющей весового вектора в \mathbf{Q} – матричном представлении следующее уравнение:

$$\bar{\Psi}(k+1) = (\mathbf{I} - \mu a_1 \hat{\mathbf{M}} \Lambda) \bar{\Psi}(k) - \mu a_1 \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{T}(k) \bar{\mathbf{W}}(k). \quad (16)$$

Здесь

$$\Lambda = \mathbf{Q}^{-1} \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{S}}^H \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

– диагональная $N \times N$ матрица; $\mathbf{T}(k) = M^{-1} \tilde{p}(k) \times \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{S}}^H + \bar{\mathbf{X}}(k) \bar{\mathbf{X}}^H(k)$ – некоторая новая эквивалентная матрица; $\hat{\mathbf{M}} = M^{-1} \langle p(k) \rangle$ – в стационарном режиме работы адаптивной антенной решетки среднюю мощность в нулевом приближении можно приближенно считать постоянной величиной, что дает возможность ввести новую постоянную $\hat{\mathbf{M}}$.

Решение уравнения (16) можно формально записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(k+1) &= -\mu a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\lambda}(n) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{T}(k-n) \times \\ &\times [\bar{\mathbf{W}}_0 + \mathbf{Q} \bar{\Psi}(k-n)], \end{aligned} \quad (18)$$

здесь $\hat{\lambda}(k)$ – диагональная матрица следующего вида:

$$\hat{\lambda}(k) = \begin{bmatrix} (1 - \mu a_1 \widehat{M} \lambda_1)^k & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Ряд теории возмущений по малому параметру $\mu \ll 1$ можно построить, итерируя уравнение (18) [4–5; 8]. В результате вектор $\bar{\Psi}(k)$ и соответствующий ему вектор поправки $\bar{W}_{\Pi}(k) = \mathbf{Q}\bar{\Psi}(k)$ запишутся в виде:

$$\bar{\Psi} = \bar{\Psi}_1 + \bar{\Psi}_2 + \bar{\Psi}_3 + \dots, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \bar{W}_{\Pi}(k) &= \mathbf{Q}\bar{\Psi}(k) = \\ &= \bar{W}_{\Pi 1}(k) + \bar{W}_{\Pi 2}(k) + \bar{W}_{\Pi 3}(k) + \dots \end{aligned} \quad (20)$$

Члены ряда (19) соответственно будут равны:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_1(k+1) &= -\mu a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\lambda}(n) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{T}(k-n) \bar{W}_{0CT}, \\ \bar{\Psi}_2(k+1) &= \\ &= -\mu a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\lambda}(n) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{T}(k-n) \mathbf{Q} \bar{\Psi}_1(k-n) = \\ &= \mu^2 a_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \hat{\lambda}(n) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{T}(k-n) \mathbf{Q} \hat{\lambda}(m) \times \\ &\times \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{T}(k-n-m-1) \bar{W}_{0CT}, \\ \bar{\Psi}_{p+1}(k+1) &= \\ &= -\mu a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\lambda}(n) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{T}(k-n) \mathbf{Q} \bar{\Psi}_p(k-n). \end{aligned} \quad (21)$$

Для вычисления интересующих нас статистических характеристик адаптивной антенной решетки с помощью формул (21) необходимо задать конкретный вид временной зависимости вектора входных сигналов. Ниже рассмотрим случай узкополосной ААР и будем считать, что корреляционная матрица входных сигналов имеет следующий вид:

$$\mathbf{R}_{XX}(k, k+n) \equiv \langle \bar{X}^*(k) \bar{X}^T(k+n) \rangle = \mathbf{R}_{XX} r^{|n|},$$

где r – коэффициент корреляции между отсчетами входного сигнала.

На основе полученных соотношений (19)–(21) в следующих разделах получены аналитические выражения для основных статистических характеристик антенной решетки с ограничениями.

2. Корреляционная функция выходного сигнала ААР с ограничениями

Рассмотрим влияние флуктуаций весовых коэффициентов на корреляционную функцию сиг-

нала на выходе адаптивной антенной решетки. Для нахождения моментных функций более высокого порядка всюду ниже будем дополнительно предполагать, что $\bar{X}(k)$ является комплексным гауссовским случайным вектором.

Корреляционная функция выходного сигнала может быть записана в виде

$$\begin{aligned} K_Z(m, m+n) &\equiv \langle Z^H(m) Z(m+n) \rangle = \\ &= \langle (F[y(m)])^H (F[y(m+n)]) \rangle = \\ &= \langle (\bar{A}^T \bar{Y}(m))^H (\bar{A}^T \bar{Y}(m+n)) \rangle = \\ &= \bar{Y}_{CT}^H \mathbf{R}_{AA} \bar{Y}_{CT} + \langle \bar{Y}^H(m) \bar{A}^* \bar{A}^T \bar{Y}(m+n) \rangle. \end{aligned} \quad (22)$$

В данной формуле первое слагаемое найдено при постоянном стационарном весовом векторе (и, следовательно, при постоянном стационарном выходном сигнале линейной части адаптивной антенной решетки).

Стационарный выходной сигнал линейной части ААР определяется выражением

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{CT} &= \left[y_{CT} \ y_{CT}^2 \ \dots \ y_{CT}^{N_1} \right]^T = \\ &= \left[\bar{X}^T \bar{W}_{CT} \ (\bar{X}^T \bar{W}_{CT})^2 \ \dots \ (\bar{X}^T \bar{W}_{CT})^{N_1} \right]^T, \end{aligned} \quad (23)$$

где \bar{W}_{CT} – постоянный стационарный весовой вектор, который ищется из выражения (11).

В рассматриваемом нами случае большого первого слагаемого в ряде Вольтерра и малых остальных слагаемых имеем:

$$F \left[\bar{X}^T \bar{W} \right] \rightarrow a_1 \bar{X}^T \bar{W};$$

$$\mathbf{R}_{AA} \rightarrow a_1^2;$$

$$\bar{Y}_{CT} \rightarrow \bar{X}^T \bar{W}_{CT}.$$

Тогда первое слагаемое в правой части выражения (22) приобретает вид

$$K_{ZCT}(n) = \bar{Y}_{CT}^H \mathbf{R}_{AA} \bar{Y}_{CT} = a_1^2 \bar{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \bar{W}_{CT} \cdot r^{|n|}.$$

Последнее слагаемое в (22) может быть представлено в виде произведения двух сомножителей:

$$\begin{aligned} &\langle \bar{Y}^H(m) \bar{A}^* \bar{A}^T \bar{Y}(m+n) \rangle = \\ &= \langle \bar{Y}^H(m) \bar{A}^* \mathbf{Q}^H \mathbf{Q} \bar{A}^T \bar{Y}(m+n) \rangle = \\ &= \langle \left[\mathbf{Q} \bar{A}^T \bar{Y}(m) \right]^H \left[\mathbf{Q} \bar{A}^T \bar{Y}(m+n) \right] \rangle = \\ &= \left\langle \left[\mathbf{Q} \sum_{j=1}^{N_1} a_j (\bar{X}(m) \bar{W}(m))^j \right]^H \times \right. \\ &\times \left. \left[\mathbf{Q} \sum_{p=1}^{N_1} a_p (\bar{X}(m+n) \bar{W}(m+n))^p \right] \right\rangle. \end{aligned} \quad (24)$$

В случае большого первого слагаемого ряда Вольтерра и малых остальных слагаемых выражение (24) приобретает вид

$$\begin{aligned} & \langle \tilde{Y}^H(m) \bar{A}^* \bar{A}^T \tilde{Y}(m+n) \rangle = \\ & a_1^2 \langle [\mathbf{Q} \bar{X}^T(m) \tilde{W}(m)]^H \times \\ & \times [\mathbf{Q} \bar{X}^T(m+n) \tilde{W}(m+n)] \rangle. \end{aligned} \quad (25)$$

Найдем значение выражения (25) в первом борновском приближении. Для этого учтем, что флуктуационную часть весового вектора можно считать приближенно равной значению первой поправки к весовому вектору, находимую методом теории возмущений $\tilde{W}(m) \cong \tilde{W}_{\Pi 1}(m)$. Тогда получим

$$\begin{aligned} & \langle \tilde{Y}^H(m) \bar{A}^* \bar{A}^T \tilde{Y}(m+n) \rangle \cong \\ & \cong a_1^2 \langle [\mathbf{Q} \bar{X}^T(m) \tilde{W}_{\Pi 1}(m)]^H \times \\ & \times [\mathbf{Q} \bar{X}^T(m+n) \tilde{W}_{\Pi 1}(m+n)] \rangle. \end{aligned} \quad (26)$$

Для нахождения окончательного вида (26) воспользуемся формулами (21). После преобразований имеем

$$\begin{aligned} & \langle \tilde{Y}^H(m) \bar{A}^* \bar{A}^T \tilde{Y}(m+n) \rangle \cong \\ & \cong \mu^2 a_1^4 \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \bar{W}_{0CT}^H \langle \mathbf{T}^H(m-1-n_1) \times \\ & \times (\mathbf{Q} \hat{\lambda}(n_1) \mathbf{Q}^{-1})^H \bar{X}^*(m) \bar{X}^T(m+n) \times \\ & \times (\mathbf{Q} \hat{\lambda}(n_2) \mathbf{Q}^{-1}) \mathbf{T}(m+n-1-n_2) \rangle \bar{W}_{0CT} \end{aligned} \quad (27)$$

Рассмотрим $\mathbf{Q} \hat{\lambda}(k) \mathbf{Q}^{-1}$ и найдем его значение:

$$\mathbf{Q} \hat{\lambda}(k) \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} (1 - \mu a_1 \hat{M} \lambda_1)^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \mathbf{Q}^{-1}.$$

Поскольку $\mu a_1 \hat{M} \lambda_1 \ll 1$, то при больших k в стационарном режиме работы адаптивной антенной решетки $(1 - \mu a_1 \hat{M} \lambda_1)^k \approx 1$ и

$$\begin{bmatrix} (1 - \mu a_1 \hat{M} \lambda_1)^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}^{-1} \approx \mathbf{I}.$$

Тогда:

$$\mathbf{Q} \begin{bmatrix} (1 - \mu a_1 \hat{M} \lambda_1)^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q} \mathbf{I} \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{I}.$$

Тогда формула (27) перепишется в виде

$$\begin{aligned} & \langle \tilde{Y}^H(m) \bar{A}^* \bar{A}^T \tilde{Y}(m+n) \rangle = \\ & \cong \mu^2 a_1^4 \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \bar{W}_{0CT}^H \langle \mathbf{T}^H(m-1-n_1) \times \\ & \times \bar{X}^*(m) \bar{X}^T(m+n) \mathbf{T}(m+n-1-n_2) \rangle \bar{W}_{0CT}. \end{aligned} \quad (28)$$

Вычисление данного выражения будем вести в предположении, что рассматриваемая ААР является узкополосной, т. е. корреляционную матрицу входного сигнала можно представить в виде произведения пространственной и временной частей.

В итоге окончательное выражение для корреляционной функции выходного сигнала ААР в стационарном режиме работы примет вид

$$\begin{aligned} K_Z(m, m+n) &= a_1^2 \bar{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \bar{W}_{CT} \cdot r^{|n|} + \\ & + \mu^2 a_1^4 \frac{M^{-1}}{1-r^2} r^{|n|} Sp(\mathbf{R}_{XX}) \bar{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{SS}^H \mathbf{R}_{XX} \bar{W}_{CT} + \\ & + \mu^2 a_1^4 \frac{M^{-1} r^2}{1-r^2} r^{|n|} Sp(\mathbf{R}_{XX}) \bar{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \mathbf{R}_{SS} \bar{W}_{CT} + \\ & + \mu^2 a_1^4 r \frac{1+r-r^n}{(1-r)^2} r^{|n|} \bar{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX}^3 \bar{W}_{CT} + \\ & + \mu^2 a_1^4 \frac{r}{(1-r)^2(1+r)} r^{|n|} Sp(\mathbf{R}_{XX}) \times \\ & \times \bar{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX}^2 \bar{W}_{CT} + \mu^2 a_1^4 r^{|n|} \times \\ & \times \left\{ \frac{2}{(1-r^2)^2} + \frac{1-r^{2n+2}}{1-r^2} \right\} \times \\ & \times Sp(\mathbf{R}_{XX}^2) \bar{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \bar{W}_{CT} + \\ & + \mu^2 a_1^4 \frac{r^{|n|+3}}{1-r^2} \left\{ \frac{1-r^n}{1-r^2} + \frac{1}{1-r} \right\} \times \\ & \times Sp(\mathbf{R}_{XX}^2) \bar{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX}^2 \bar{W}_{CT}. \end{aligned} \quad (29)$$

Из выражения (29) видно, что влияние флуктуаций весового вектора определяется коэффициентом адаптации μ , возведенным во вторую степень, коэффициентом корреляции между отсчетами входного сигнала r . Нелинейная функция в цепи обратной связи адаптивной антенной решетки в данном случае представлена коэффициентом a_1 в четвертой степени, также увеличивающим влияние флуктуаций весового вектора на статистические характеристики ААР.

3. Одномоментные статистические характеристики ААР с ограничениями

Рассмотрим более подробно одномоментные характеристики флуктуаций весовых коэффици-

циентов и их влияние на суммарную мощность выходного сигнала $\langle |Z|^2 \rangle_{CT}$. Матрицу ковариации вектора весовых коэффициентов в стационарном режиме работы в совпадающие моменты времени в борновском приближении можно представить так:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\bar{W}} &\equiv \langle \bar{W}^* \bar{W}^T \rangle = K_{\bar{W}}(m, m) \equiv \\ &\equiv \langle \bar{W}^*(m) \bar{W}^T(m) \rangle \equiv \mathbf{Q}^* \langle \bar{\Psi}_1^*(m) \bar{\Psi}_1^T(m) \rangle \mathbf{Q}^T. \end{aligned} \quad (30)$$

Используя (21), можно получить вид корреляционной матрицы для вектора весовых коэффициентов $\bar{\Psi}$ (15) в \mathbf{Q} – матричном представлении $\langle \bar{\Psi}_1^* \bar{\Psi}_1^T \rangle$:

$$\begin{aligned} &\langle \bar{\Psi}_1^* \bar{\Psi}_1^T \rangle = \\ &= \mu^2 a_1^2 \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \langle (\mathbf{Q}^* \hat{\lambda}^*(n_1) \mathbf{Q}^T) \mathbf{T}^*(k-n_1) \times \\ &\times \bar{W}_{0CT}^* \bar{W}_{0CT}^T \mathbf{T}^T(k-n_2) (\mathbf{Q}^* \hat{\lambda}^T(n_2) \mathbf{Q}^T) \rangle. \end{aligned} \quad (31)$$

Вычисляя (31) и учитывая, что адаптивная антенная решетка является узкополосной, получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\bar{W}} &= \mu^2 a_1^2 \left\{ M^{-2} \hat{A} \bar{S}^* \bar{S}^T + \frac{1-r^2-r^4}{(1-r^2)^2} \times \right. \\ &\times Sp(\bar{W}_{CT}^* \bar{W}_{CT}^T \mathbf{R}_{XX}) \mathbf{R}_{XX} + \\ &\left. + (\mathbf{R}_{XX} \bar{W}_{CT})^* (\mathbf{R}_{XX} \bar{W}_{CT})^T \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь \hat{A} определяется из выражения:

$$\langle \tilde{p}^*(i) \tilde{p}(j) \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ \hat{A}, & i = j, \end{cases}$$

где $\tilde{p}(i)$ – «флуктуационная» часть выходной мощности в момент времени i .

Из приведенной формулы видно, что поскольку собственные числа корреляционной матрицы входных сигналов \mathbf{R}_{XX} и матрицы $(\mathbf{R}_{XX} \bar{W}_{CT})^* (\mathbf{R}_{XX} \bar{W}_{CT})^T$ различны, то в общем случае собственные числа корреляционной матрицы флуктуаций весового вектора $\mathbf{K}_{\bar{W}}$ также различны. Поэтому флуктуации весового вектора в ААР с нелинейной функцией в цепи обратной связи, настраивающейся по LMS-алгоритму с квадратичным ограничением, неизотропны в пространстве весовых коэффициентов и различны в разных направлениях. Заметим, что для линейной ААР с LMS-алгоритмом настройки с квадратичным ограничением флуктуации весовых коэффициентов изотропны, т. е. являются одинаковыми по величине во всех направлениях [9].

Суммарную мощность сигнала на выходе адаптивной антенной решетки с учетом флуктуаций весовых коэффициентов можно записать в виде

$$\begin{aligned} \langle |Z|^2 \rangle_{CT} &= \langle Z^H(k) Z(k) \rangle = \\ &= \langle [F(y(k))]^H [F(y(k))] \rangle = \\ &= \langle [\bar{A}^T \bar{Y}(k)]^H [\bar{A}^T \bar{Y}(k)] \rangle = \\ &= \langle |Z|^2 \rangle_0 + \langle \bar{Y}^H(k) \bar{A}^* \bar{A}^T(m) \bar{Y}(k) \rangle, \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\langle |Z|^2 \rangle_0 \equiv \bar{Y}_{CT}^H \mathbf{R}_{AA} \bar{Y}_{CT} = a_1^2 \bar{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \bar{W}_{CT} \quad (34)$$

– выходная мощность без учета флуктуаций весовых коэффициентов.

Данная характеристика может быть получена из общего выражения для корреляционной функции выходного сигнала (29). Из формулы (29) можно найти слагаемые в (33), учитывающие влияние флуктуаций весовых коэффициентов, если положить в ней $n = 0$. Тогда после преобразований получим:

$$\begin{aligned} \langle |Z|^2 \rangle_{CT} &= a_1^2 \langle |Z|^2 \rangle_0 + \\ &+ \mu^2 a_1^4 \frac{M^{-1}}{1-r^2} Sp(\mathbf{R}_{XX}) \bar{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{SS}^H \mathbf{R}_{XX} \bar{W}_{CT} + \\ &+ \mu^2 a_1^4 \frac{M^{-1} r^2}{1-r^2} Sp(\mathbf{R}_{XX}) \bar{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \mathbf{R}_{SS} \bar{W}_{CT} + \\ &+ \mu^2 a_1^4 \frac{r^2}{(1-r)^2} \bar{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX}^3 \bar{W}_{CT} + \\ &+ \mu^2 a_1^4 \left\{ \frac{r}{(1-r)^2(1+r)} Sp(\mathbf{R}_{XX}) + \right. \\ &\left. + \frac{r^3}{(1-r^2)(1-r)} Sp(\mathbf{R}_{XX}^2) \right\} \bar{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX}^2 \bar{W}_{CT} + \\ &+ \mu^2 a_1^4 \frac{3-2r^2+r^4}{(1-r^2)^2} Sp(\mathbf{R}_{XX}^2) \langle |Z|^2 \rangle_0. \end{aligned} \quad (35)$$

Здесь

$$\langle |Z|^2 \rangle_0 = y_{CT}^H a_1^2 y_{CT} = a_1^2 \bar{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \bar{W}_{CT}$$

– выходная мощность ААР, найденная при постоянном стационарном весовом векторе.

Сравним формулу (35) с выражением, найденным для адаптивной антенной решетки с LMS-алгоритмом настройки с квадратичным ограничением без нелинейной функции в цепи обратной связи [10]:

$$\begin{aligned} \langle |Z|^2 \rangle_{CT} &= \langle |Z|^2 \rangle_0 \times \\ &\times \left\{ 1 + \frac{1}{2} \mu \frac{1-3r^2}{1-r^2} Sp(\mathbf{R}_{XX}) \right\}. \end{aligned} \quad (36)$$

Сравнение выражений (35) и (36) показывает, что качественное влияние флуктуаций на выходную мощность различное. При настройке ААР с нелинейной функцией в цепи обратной связи может иметь место только эффект рас- согласования, поскольку все слагаемые в выражении выходной мощности, обусловленные флуктуациями весовых коэффициентов, могут быть только положительными. В адаптивной антенной решетке без нелинейной функции может наблюдаться как увеличение выходной мощности, так и ее уменьшение в зависимости от величины коэффициента корреляции входных сигналов r . Кроме того, в первом случае флуктуации весового вектора имеют второй порядок малости по коэффициенту адаптации μ и зависят от большего числа параметров (a_1 , r , μ , $Sp(\mathbf{R}_{XX}^2)$, $Sp(\mathbf{R}_{XX})$), в то время как в антенной решетке без нелинейной функции в цепи обратной связи имеет место зависимость флуктуаций только от r , μ , $Sp(\mathbf{R}_{XX})$.

Заключение

В данной статье представлены результаты анализа влияния флуктуаций весового вектора на статистические характеристики адаптивной антенной решетки, настраиваемой по LMS-алгоритму с квадратичным ограничением и содержащей нелинейную функцию в цепи обратной связи. Проведено сравнение этих результатов с характеристиками ААР с тем же алгоритмом, но не содержащей нелинейной функции в цепи обратной связи. Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы:

1. Флуктуации весового вектора приводят к искажениям выходного сигнала, и используемый алгоритм настройки оказывает существенное влияние на эти искажения.

2. Сравнительный анализ показал, что флуктуации весового вектора в адаптивной антенной решетке с LMS-алгоритмом настройки с квадратичным ограничением без нелинейной функции изотропны во всех направлениях. В ААР с нелинейной функцией в цепи обратной связи флуктуации весового вектора не изотропны и определяются величиной собственных чисел матриц, входящих в выражение матрицы ковариации флуктуаций весовых коэффициентов.

Список литературы

1. Монзинго Р.А., Миллер Т.У. Адаптивные антенные решетки. М.: Радио и связь, 1986. 448 с.

2. Уидроу Б., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов. М.: Радио и связь, 1989. 440 с.
3. Hudson J.E. Adaptive array principles. London: Peter Peregrinus Ltd., 1991. 253 p.
4. Зими́на С.В. Анализ статистических характеристик адаптивной антенной решетки с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи // Радиотехника и электроника. 2005. Т. 50. № 8. С. 952–960.
5. Зими́на С.В. Флуктуации весового вектора в адаптивных антенных решетках с нелинейной функцией в цепи обратной связи, настраиваемых по алгоритму рекуррентного обращения выборочной оценки корреляционной матрицы входных сигналов // Изв. вузов. Радиофизика. 2006. Т. 49. № 2. С. 164–173.
6. Орешкин Б.Н., Бакулев П.А. Алгоритм LMS с квадратичным ограничением // Антенны. 2007. № 9. С. 29–34.
7. Пупков К.А., Капалин В.И., Ющенко А.С. Функциональные ряды в теории нелинейных систем. М.: Наука, 1976. 448 с.
8. Игнатенко С.В., Мальцев А.А. Статистические характеристики адаптивных антенных решеток при обработке дискретных сигналов с коррелированными отсчетами // Изв. вузов. Радиофизика. 1994. Т. 37. № 12. С. 1532–1545.
9. Зими́на С.В. Матрица ковариации вектора весовых коэффициентов адаптивной антенной решетки, настраиваемой по алгоритму LMS с квадратичным ограничением // Материалы XX Международной научно-технической конференции «Информационные системы и технологии» ИСТ-2014, посвященной 100-летию профессора Г.В. Глебовича. Нижний Новгород, 2014. С. 26.
10. Зими́на С.В., Зимин В.В. Корреляционная функция и мощность выходного сигнала адаптивной антенной решетки, настраиваемой по алгоритму LMS с квадратичным ограничением, с учетом флуктуаций весовых коэффициентов // Материалы XIX международной научно-технической конференции «Информационные системы и технологии» ИСТ-2013. Нижний Новгород, 2013. С. 34–35.

Weight vector jitter influence on statistical characteristics of adaptive antenna array with nonlinear function in correlation feedback, tuning on LMS algorithm with quadratic constraint

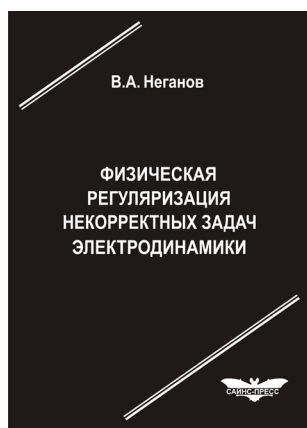
S.V. Zimina

In the article it is researched influence of weight vector jitter on the statistical characteristics of adaptive antenna array with nonlinear function in correlation feedback, tuning on LMS algorithm with quadratic constraint. It is shown, that weight vector jitter leads to distortions of adaptive antenna array statistical characteristic (correlation function of output signal, output power, correlation matrix of weight vector jitter).

Keywords: fluctuations in the weight vector, an adaptive array antenna, the feedback loop, LMS algorithm.

Неганов, В.А.

Физическая регуляризация некорректных задач электродинамики: линии передачи, антенны, дифракция электромагнитных волн / В.А. Неганов. – М.: «САЙНС-ПРЕСС», 2008. – 432 с., 122 ил.



ISBN 978-5-88070-161-2

УДК 537.87

ББК 32.84

Н 41

Изложены основы физической регуляризации некорректных задач электродинамики, связанной с особенностями физических и математических моделей задач (физические допущения, некорректные математические выкладки, отсутствие предельного перехода). Подход, по мнению автора, обладает большими возможностями, чем метод регуляризации Тихонова А.Н. интегральных уравнений Фредгольма первого рода, названный в книге методом математической регуляризации. Метод физической регуляризации (МФР) применен к анализу волноведущих и излучающих структур, а также задачам дифракции электромагнитных волн на некоторых телах. МФР позволил впервые корректно осуществить анализ полей в ближних зонах некоторых антенн, устранить несамосогласованное приближение Кирхгофа в задачах дифракции, установить связь поверхностной плотности тока проводимости с напряженностями электрического и магнитного полей для диполя Герца и т. п.

Для специалистов в области радиотехники и радиофизики СВЧ, электромагнитной совместимости РТС, математической теории дифракции и математического моделирования электродинамических структур самого широкого назначения. Может быть полезна преподавателям вузов, докторантам, аспирантам и студентам старших курсов соответствующих специальностей.