

## Сжатие света в двухатомной модели Джейнса – Каммингса с зависящим от интенсивности атом-полевым взаимодействием

*Е.К. Башкиров*

Самарский государственный университет  
443011, Российская Федерация, г. Самара  
ул. Ак. Павлова, 1

Исследованы особенности сжатия света в системе двух двухуровневых атомов, взаимодействующих с модой когерентного электромагнитного поля в идеальном резонаторе, с учетом зависимости параметра атом-полевого взаимодействия от интенсивности поля. В результате численного моделирования параметров сжатия показано, что для рассматриваемой модели максимальная степень сжатия поля значительно превосходит соответствующую величину для однофотонного случая.

*Ключевые слова:* двухуровневые атомы, сжатие света с зависящим от интенсивности взаимодействием.

Исследование сжатых состояний света – одно из наиболее перспективных направлений в современной квантовой оптике [1; 2]. Такие состояния привлекают особое внимание не только потому, что они позволяют глубже понять природу электромагнитного поля, но и благодаря их широкому возможному применению для высокоточных оптических измерений, оптической связи, квантовых вычислений и др. [2]. Особенно перспективными представляются возможности применения сжатого света в детекторах гравитационных волн. Такое предложение было сделано еще 25 лет назад, но только в последнее время появилась возможность реализации такого проекта с использованием сжатого света [3]. Сжатые состояния света являются также потенциальной основой для множества информационно-квантовых протоколов с непрерывными параметрами [4].

Экспериментально сжатие света было впервые реализовано в 1985 году в нелинейном процессе четырехволнового смешения света в оптическом резонаторе [5]. Позднее для генерации сжатых состояний электромагнитного поля использовались различные нелинейные оптические процессы: оптические параметрические процессы, эффект Керра и др. [1]. В настоящее время выполнено большое число экспериментов по наблюдению сжатых состояний света в различных нелинейных оптических средах. Наиболее перспективными методами получения сжатого света считаются вырожденное параметриче-

ское усиление и вырожденное четырехволновое смешение света [2]. Однако для получения значительной степени сжатия света нужны сильно нелинейные среды и малые затухания и избыточные шумы. К сожалению, в современном эксперименте не удается выполнить оба этих условия одновременно, поэтому поиск альтернативных схем получения сжатого света имеет большое практическое значение.

В настоящее сжатие света реализовано также для системы атомов в резонаторе. При наличии точного резонанса моды резонаторного поля с атомным переходом система атомов представляет собой сильно нелинейную среду, в которой возможна генерация сжатого света. Имеются две группы экспериментов по наблюдению сжатых состояний света для пучков атомов в резонаторе. В эксперименте [6] использовались пучки атомов Na, а в работе [7] – атомные пучки Ba. При этом максимальное уменьшения уровня шума для резонаторного поля в указанных экспериментах составило примерно 20 %. Для теоретического описания сжатого состояния моды поля, взаимодействующей с атомами в резонаторе, необходим полный анализ квантовой динамики атомной и полевой подсистем. Хорошо известно, что простейшей нетривиальной моделью, позволяющей описать квантовые эффекты излучения атома в резонаторе, является модель Джейнса – Каммингса, описывающая двухуровневый атом, взаимодействующий с выделенной модой квантованного электромагнитного поля. В рам-

ках этой модели и ее простейших обобщений могут быть описаны практически все основные квантовые эффекты, возникающие при взаимодействии излучения с веществом, в том числе и сжатие света [8]. В настоящее время интерес к таким моделям перестал быть чисто теоретическим, поскольку реализация одноатомного однофотонного и двухфотонного лазера и микролазера [9; 10] предоставила возможность непосредственного исследования таких систем и экспериментальной проверки основных положений квантовой электродинамики. Модель Джейнса – Каммингса была реализована также на ионах в магнитных ловушках, на квантовых точках, примесных спинах и в сверхпроводящих системах [11].

Возможность сжатия света в модели Джейнса – Каммингса была впервые предсказана в работе [12]. Для описания генерации сжатого света пучками атомов в резонаторах естественно рассмотреть многоатомную модель Джейнса – Каммингса. При этом аналитические выражения для параметра сжатия могут быть получены только для моделей, состоящих из нескольких атомов, взаимодействующих с полем в резонаторе. Сжатие света в простейшей системе двух двухуровневых атомов с различными типами переходов в идеальном резонаторе в случае вакуумного, когерентного и теплового состояний резонаторного поля было рассмотрено в [13–15]. В работе [16] показано, что поглощение и испускание атомами фотонов в резонаторе в случае достаточно интенсивных резонаторных полей приводит к заметному изменению параметра атом-полевого взаимодействия. Следовательно, для адекватного анализа динамики атомной и полевой подсистем в резонаторе необходим учет зависимости параметра взаимодействия атомов и поля от интенсивности резонаторного поля. В настоящей работе исследованы особенности сжатия света для двухатомной модели Джейнса – Каммингса с зависящим от интенсивности поля параметром атом-полевого взаимодействия для различных начальных интенсивностей резонаторного поля и различных начальных состояний атомной подсистемы.

Рассмотрим систему двух двухуровневых атомов с частотой атомного перехода  $\omega_0$ , взаимодействующих с модой квантового когерентного электромагнитного поля с частотой  $\omega$ . Предположим наличие в системе точного резонанса  $\omega_0 = \omega$ . Тогда гамильтониан взаимодействия

изучаемой системы в дипольном приближении и приближении вращающейся волны можно записать в виде

$$H_{int} = \hbar g \sum_{i=1}^2 \left( \sqrt{a^+} a a^+ \sigma_i^- + \sigma_i^+ a \sqrt{a^+} a \right), \quad (1)$$

где  $a^+$  ( $a$ ) – оператор рождения (уничтожения) фотона резонаторной моды;  $\sigma_i^+$  ( $\sigma_i^-$ ) – повышающий (понижающий) оператор в  $i$ -м двухуровневом атоме и величина  $g\sqrt{a^+} a$  представляет собой параметр атом-фотонного взаимодействия, зависящий от интенсивности резонаторного поля. Обозначим через  $|+\rangle$  и  $|-\rangle$  возбужденное и основное состояния одиночного атома, а через  $|n\rangle$  – фоковское состояние моды резонаторного поля. Тогда двухатомная волновая функция есть комбинация состояний  $|v_1, v_2\rangle = |v_1\rangle |v_2\rangle$ , где  $v = +, -$ . Пусть атомы приготовлены в начальный момент в произвольной чистой суперпозиции базисных векторов

$$|\Psi(0)\rangle = \alpha |+, +\rangle + \beta |+, -\rangle + \gamma |-, +\rangle + \delta |-, -\rangle,$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  – произвольные комплексные числа, удовлетворяющие условию нормировки

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1,$$

а резонаторное поле – в одномодовом когерентном состоянии

$$|v\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle.$$

Здесь

$$C_n = \exp(-\bar{n}/2) \frac{\bar{n}^{n/2}}{\sqrt{n!}} e^{i\varphi},$$

где  $\bar{n}$  – среднее число фотонов в моде, а  $\varphi$  – фаза когерентного состояния.

Точное решение временного уравнения Шредингера для модели с гамильтонианом (1) для выбранных начальных условий имеет вид

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n \left[ A_n(t) |+, +\rangle + B_n(t) |+, -\rangle + C_n(t) |-, +\rangle + D_n(t) |-, -\rangle \right] |n\rangle. \quad (2)$$

Здесь использованы следующие обозначения

$$\begin{aligned} A_n(t) = & \frac{(n+2)^2 + (n+1)^2 \cos(2\Omega_n t)}{2\Omega_n^2} \alpha F_n - \\ & - i \frac{(n+1) \sin(2\Omega_n t)}{2\Omega_n} \beta F_{n+1} - \\ & - i \frac{(n+1) \sin(2\Omega_n t)}{2\Omega_n} \gamma F_{n+1} - \\ & \frac{(n+1)(n+2) \sin^2(\Omega_n t)}{\Omega_n^2} \delta F_{n+2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_n(t) &= \\
&= -i \frac{n \sin(2\Omega_{n-1}t)}{2\Omega_{n-1}} \alpha F_{n-1} + \cos^2(\Omega_{n-1}t) \beta F_n - \\
&- \sin^2(\Omega_{n-1}t) \gamma F_n - i \frac{(n+1) \sin^2(\Omega_{n-1}t)}{2\Omega_{n-1}} \delta F_{n+1}, \\
C_n(t) &= \\
&= -i \frac{n \sin(2\Omega_{n-1}t)}{2\Omega_{n-1}} \alpha F_{n-1} - \sin^2(\Omega_{n-1}t) \beta F_n + \\
&+ \cos^2(\Omega_{n-1}t) \gamma F_n - i \frac{(n+1) \sin^2(\Omega_{n-1}t)}{2\Omega_{n-1}} \delta F_{n+1}, \\
D_n(t) &= - \frac{(n-1)n \sin^2(\Omega_{n-2}t)}{\Omega_{n-2}^2} \alpha F_{n-2} - \\
&- i \frac{n \sin(2\Omega_{n-2}t)}{2\Omega_{n-2}} \beta F_{n-1} - \\
&- i \frac{n \sin(2\Omega_{n-2}t)}{2\Omega_{n-2}} \gamma F_{n-1} + \\
&+ \frac{((n-1)^2 + n^2) \cos^2(\Omega_{n-2}t)}{2\Omega_{n-2}^2} \delta F_n,
\end{aligned}$$

где

$$\Omega_n = \sqrt{[2n(n+3)+5]}/2.$$

Для того чтобы исследовать возможность сжатия моды поля, введем стандартным образом медленно меняющиеся квадратурные компоненты для моды резонаторного поля

$$X_1 = (1/2)(ae^{i\omega t} + a^+e^{-i\omega t}),$$

$$X_2 = (1/2i)(ae^{i\omega t} - a^+e^{-i\omega t}).$$

Поскольку квадратурные компоненты удовлетворяют коммутационному соотношению  $[X_1, X_2] = i/2$ , соотношение неопределенностей для них принимает вид

$$(\Delta X_1)^2 (\Delta X_2)^2 \geq 1/16,$$

где  $(\Delta X_i)^2 = \langle X_i^2 \rangle - \langle X_i \rangle^2$  ( $i=1,2$ ) – дисперсии квадратурных компонент. Как известно, сжатое состояние минимизирует соотношение неопределенностей для квадратурных компонент. При этом для одной из компонент (сжатой) выполняется соотношение  $(\Delta X_i)^2 < 1/4$  ( $i=1,2$ ). Для проведения численных расчетов удобно ввести так называемые параметры сжатия следующим образом:

$$S_i = \frac{(\Delta X_i)^2 - 1/4}{1/4} = 4(\Delta X_i)^2 - 1 \quad (i=1,2).$$

При таком выборе когерентному и вакуумному состоянию поля в любой момент времени будет соответствовать значение параметра сжатия, равное нулю. Условие  $S_i < 0$  для какой-либо из квадратурных компонент будет означать нали-

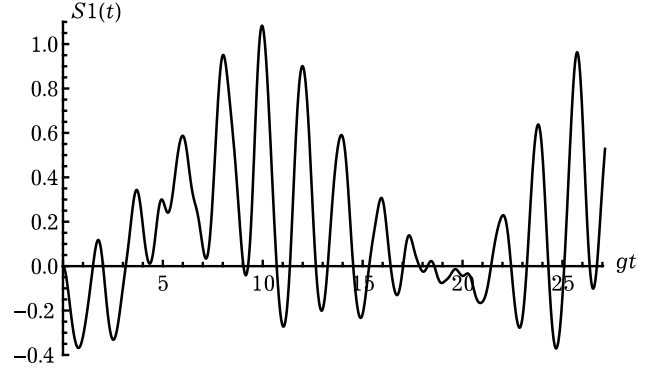


Рис. 1. Длинновременное поведение параметра сжатия  $S_1$  для модели с  $\bar{n} = 0,5$ . Атомы в начальный момент времени находятся в состоянии  $|-, -\rangle$

чие в ней сжатия или уменьшения флуктуаций поля ниже квантового предела. Значению  $S_i = -1$  соответствует полное отсутствие квантовых флуктуаций в соответствующей квадратурной компоненте. Часто в качестве критерия сжатия используют также величину  $|S_i| \times 100\%$ . Тогда  $100\%$ -ному сжатию соответствует нулевая неопределенность одной из компонент. В терминах операторов рождения и уничтожения фотонов параметры сжатия можно представить в виде

$$S_1 = 2\langle a^+a \rangle + 2\text{Re}\langle a^2 e^{2i\omega t} \rangle - 4(\text{Re}\langle a e^{i\omega t} \rangle)^2, \quad (3)$$

$$S_2 = 2\langle a^+a \rangle - 2\text{Re}\langle a^2 e^{2i\omega t} \rangle - 4(\text{Im}\langle a e^{i\omega t} \rangle)^2. \quad (4)$$

Используя явное выражение для волновой функции (2), нетрудно вычислить временные зависимости параметров сжатия, определяемые формулами (3) и (4). Указанные соотношения не приведены в настоящей статье из-за их слишком громоздкого вида.

Перейдем к обсуждению результатов численного моделирования временного поведения параметров сжатия для рассматриваемой модели. Временные зависимости параметра сжатия в первой квадратурной компоненте для различных значений среднего числа фотонов в резонаторной моде и атомов, приготовленных в начальный момент времени в основном состоянии  $|-, -\rangle$  представлены на рис. 1–4. На рис. 1 показано длинновременное поведение параметра сжатия в первой квадратурной компоненте для малых значений начальных интенсивностей резонаторного поля.

Из рисунка видно, что параметр сжатия  $S_1$  (аналогично и  $S_2$ ) осциллирует во времени, принимая как положительные, так и отрицательные значения. При этом максимальная степень сжатия почти в два раза превосходит максимальное значение степени сжатия в случае обычной

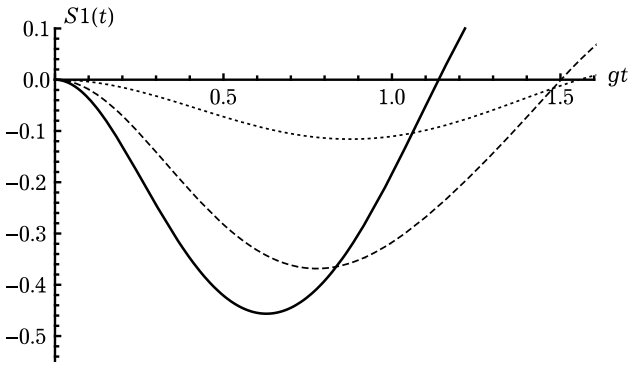


Рис. 2. Коротковременное поведение параметра сжатия  $S_1$  для модели с  $\bar{n} = 0,1$  (точечная линия),  $\bar{n} = 0,5$  (штриховая линия) и  $\bar{n} = 1$  (сплошная линия). Атомы в начальный момент времени находятся в состоянии  $|-,-\rangle$

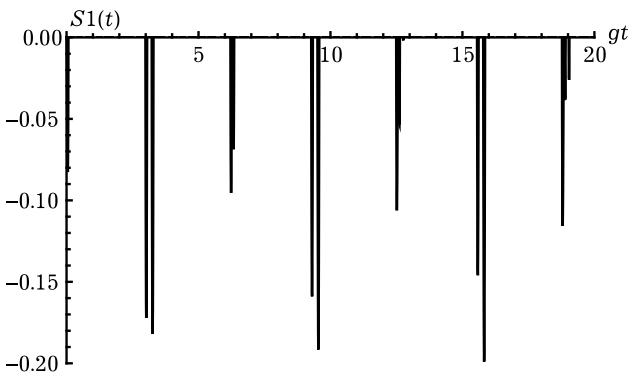


Рис. 3. Длинновременное поведение параметра сжатия  $S_1$  для модели с  $\bar{n} = 20$ . Атомы в начальный момент времени находятся в состоянии  $|-,-\rangle$

двухатомной модели Тависа – Каммингса для малых начальных средних чисел фотонов в резонаторной моде. На рис. 2 показано коротковременное поведение параметра сжатия  $S_1$  в области первого пика для различных малых значений среднего числа фотонов моде. Максимальное значение параметра сжатия в области первого пика достигается для начального среднего числа фотонов  $\bar{n} = 1$  и составляет примерно 45 %, что более чем в два раза превосходит соответствующую величину в случае обычной модели Джейнса – Каммингса. При дальнейшем увеличении среднего числа фотонов моде  $\bar{n}$  максимальная степень сжатия в области первого пика вначале уменьшается, а затем вновь начинает расти, достигая второго локального максимума для  $\bar{n} = 10$  (примерно 15 %). При этом для модели с зависящей от интенсивности константой взаимодействия сжатие имеет место и для интенсивных начальных когерентных полей. Заметим, что для стандартной модели сжатие имеет место только для малых значений среднего числа фотонов в моде  $\bar{n} < 1$  [12; 13]. На рис. 3 показано длинновременное поведение параметра сжатия

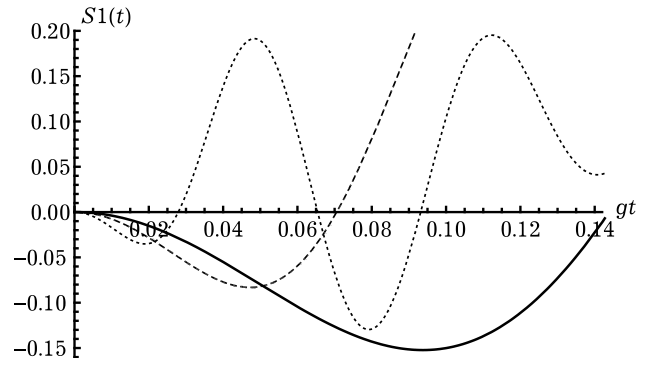


Рис. 4. Коротковременное поведение параметра сжатия  $S_1$  для модели с  $\bar{n} = 10$  (сплошная линия),  $\bar{n} = 20$  (штриховая линия) и  $\bar{n} = 50$  (точечная линия). Атомы в начальный момент времени находятся в состоянии  $|-,-\rangle$

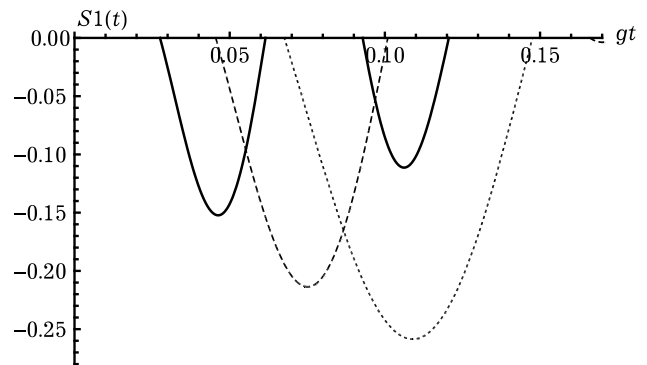


Рис. 5. Коротковременное поведение параметра сжатия  $S_1$  для модели с  $\bar{n} = 20$  (точечная линия),  $\bar{n} = 30$  (штриховая линия) и  $\bar{n} = 50$  (сплошная линия). Атомы в начальный момент времени находятся в состоянии  $|+,+\rangle$

в первой квадратурной компоненте для  $\bar{n} = 20$ , а на рис. 4 – коротковременное поведение  $S_1$  в области первого пика для модели с  $\bar{n} = 10$  (сплошная линия),  $\bar{n} = 20$  (штриховая линия) и  $\bar{n} = 50$  (точечная линия).

Для стандартной одно- и двухфотонной модели Джейнса – Каммингса сжатие света имеет место только для начальных атомов, приготовленных в основном состоянии [12; 13]. Численные расчеты показывают, что для модели с зависящей от интенсивности константой взаимодействия сжатие имеет место для любых начальных состояний атомов. На рис. 5 показано коротковременное поведение параметра сжатия  $S_1$  в случае возбужденного начального состояния атомов  $|+,+\rangle$  для начального среднего числа фотонов  $\bar{n} = 20$  (точечная линия),  $\bar{n} = 30$  (штриховая линия) и  $\bar{n} = 50$  (сплошная линия). Максимальная степень сжатия в первой квадратурной компоненте составляет около 30 % и достигается для модели с  $\bar{n} = 15$ . При этом сжатие в первой квадратурной компоненте возникает с запаздыванием во времени и имеет место для больших интенсивностей резонаторного поля.

Таким образом, в настоящей работе мы детально исследовали особенности сжатия света в системе двух атомов, взаимодействующих с модой квантового электромагнитного поля в идеальном резонаторе, с учетом зависимости параметра диполь-фотонного взаимодействия от интенсивности резонаторной моды. При этом было показано, что такая нелинейная среда является значительно более выгодной для генерации сжатого света в сравнении с системой атомов с однофотонными переходами, поскольку в рассматриваемой среде сжатие возможно для интенсивного начального когерентного поля, которое может быть получено без использования уникального оборудования, и различных начальных состояний атомов. Рассмотрение более реалистичной модели сжатия электромагнитного излучения атомов в неидеальном резонаторе, учитывающей спонтанное излучение и потери фотонов из резонатора на основе подходов, развитых в наших работах [17–19], будет являться предметом нашей следующей работы.

### Список литературы

1. Bachor H.-A., Ralph T. A Guide to Experiments in Quantum Optics. Weinheim: Wiley – VCH, 2004. 420 p.
2. Walls D.F., Milburn G. Quantum Optics. Berlin: Springer, 2008. 651 p.
3. Aasi J. Enhanced sensitivity of the LIGO gravitational wave detector by using squeezed states of light // Nature Photonics. 2013. № 7. P. 613–619.
4. Cerf N., Leuchs G., Polzik E. Quantum Information with Continuous Variables of Atoms and Light. Singapore: World Scientific, 2007. 632 p.
5. Observation of squeezed states generated by four-wave mixing in an optical cavity / R.E. Slusher [et al.] // Phys. Rev. Lett. 1985. V. 55. P. 2409–2416.
6. Squeezed-state generation in optical bistability / L.A. Orozco [et al.] // J. Opt. Soc. Am. 1987. V. B4. № 11. P. 1490–1500.
7. The atom-cavity system as a generator of quadrature squeezed states / D.M. Hope [et al.] // Appl. Phys. 1992. V. B55. № 3. P. 210–215.
8. Shore B.W., Knight P.L. On the Jaynes – Cummings model // J. Mod. Opt. 1993. V. 40. P. 1195–1238.
9. Haroche S., Raimond J.-M. Exploring the Quantum. Atoms, Cavities and Photons. N.Y.: Oxford University Press, 2006. 606 p.
10. Cavity quantum electrodynamics / H. Walther [et al.] // Rep. Prog. Phys. 2006. V. 69. P. 1325–1382.
11. Buluta I., Ashhab S., Nori F. Natural and artificial atoms for quantum computation // Rep. Prog. Phys. 2011. V. 74. P. 104401.
12. Meystre P., Zubairy M.S. Squeezed states in the Jaynes – Cummings model // Phys. Lett. 1982. V. A89. № 8. P. 390–392.
13. Kadantseva E.P., Fam le Kien, Shumovsky A.S. Light squeezing in the two-atom one-mode model with multiphoton transitions // Physica. 1988. V. C150. P. 445–456.
14. Bashkirov E.K., Shumovsky A.S. Squeezing of the square of the field amplitude in the two-atom one-mode model with multiphoton transitions // Intern. Journ. Mod. Phys. 1990. V. B4. № 9. P. 1579–1587.
15. Bashkirov E.K. Squeezing and amplitude-squared squeezing in the model of two nonidentical two-level atoms // Int. J. Mod. Phys. 2007. V. 21. № 2. P. 145–157.
16. Singh S., Ooi C.H.R., Singh A. Dynamics for two atoms interacting with intensity-dependent two-mode quantized cavity fields in the ladder configuration // Phys. Rev. 2012. V. A86. P. 023810.
17. Башкиров Е.К., Мангулова Е.Г. Динамика двух двухуровневых атомов в неидеальном резонаторе // Известия РАН. Серия физическая. 2000. Т. 64. № 10. С. 2075–2079.
18. Башкиров Е.К. Спонтанное излучение двух трехуровневых атомов в неидеальном резонаторе // Известия РАН. Серия физическая. 2004. Т. 68. № 9. С. 1292–1295.
19. Bashkirov E.K. Dynamics of phonon mode in superradiance regime of laser cooling of crystals // Physics Letters A. 2005. V. 341. P. 345–351.

---

## Light squeezing in two-atom Jaynes – Cummings model with intensity-dependent atom-field coupling

*E.K. Bashkirov*

The features of light squeezing for two two-level atoms interacting with a coherent field in finite-Q cavity taking into account dependence of atom-field coupling from intensity of a field are explored. The computer modeling of the squeezing parameter revealed that the maximum degree of squeezing for considered model considerably surpasses corresponding quantity for one-photon case.

*Keywords:* two-level atoms, light squeezing, intensity-dependent atom-field coupling.

---