2015 г. Том 18, № 3
Физика волновых процессов и радиотехнические системы

УДК 534.26

Щелевые электрозвуковые волны, направляемые поперечно движущейся трещиной пьезоэлектрического кристалла

С.Н. Марышев[1], *Н.С. Шевяхов*[2]

[1] Московский физико-технический институт (государственный университет)
141700, Российская Федерация, Московская обл., г. Долгопрудный
Институтский пер., 9
[2] Саровский физико-технический институт НИЯУ МИФИ
607186, Российская Федерация, Нижегородская обл., г. Саров
ул. Духова, 6

Обсуждаются спектральные свойства мод щелевых электрозвуковых воле на границах плоской трещины, равномерно движущейся в пьезоэлектрике класса 6mm(4mm, ∞m). Показано, что поперечное движение трещины обуславливает неколлинеарность удерживаемых ею электрозвуковых волн, приводит к параметрической связи симметричной и антисимметричной мод и оказывается источником частотной дисперсии.

Ключевые слова: пьезоэлектрический эффект, электрозвуковая волна, щелевая структура, дисперсия, движущаяся граница.

Введение

В серии работ [1–3] нами рассматривалось влияние относительного продольного перемещения (ОПП) пьезоэлектрических кристаллов на распространение электрозвуковых граничных волн в структуре с вакуумным зазором. Именуемые для краткости щелевыми электрозвуковыми волнами, они показали изменения дисперсионных характеристик мод под влиянием ОПП, доступные экспериментальному обнаружению даже при низких скоростях относительного перемещения пьезоэлектриков порядка 10^{-3} м/с [3].

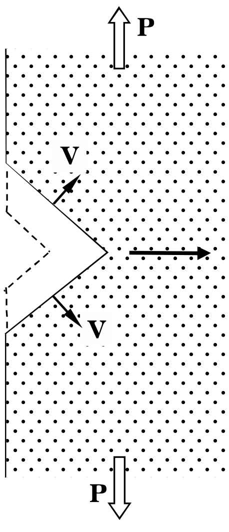

Рис. 1. Схематическая картина трещины, прорастающей с поверхности образца под нагрузкой **P**

Применительно к структурам со щелью интересно сопоставить результаты, полученные в работах [1–3], результатам, когда зазор (вакуумная щель) между кристаллами, поддерживая распространение электрозвуковых волн, подобно доменным границам сегнетоэлектрика [4; 5] испытывает поперечное перемещение. С чисто формальных позиций объектами такого рода в пьезоэлектрических кристаллах могут выступать плоскостные дефекты типа трещин.

Известно [6; 7], что в динамике движение трещины в твердых телах развивается обычно от ее вершины по касательной к берегам, т. е. трещины удлиняются (прорастают) без ощутимого поперечного перемещения границ. Впрочем, в отдельных ситуациях (прорастание с поверхности под растягивающей нагрузкой **P** – рис. 1; режим надкритической концентрации напряжений в вершине ветвящейся трещины [6; 7]) поперечная составляющая перемещения границ трещин становится заметной и задача об электрозвуковых волнах на поперечно движущейся трещине пьезоэлектрика обретает физический смысл. Ниже в геометрии, показанной на рис. 2, рассматривается распространение щелевых электрозвуковых волн вдоль поперечно перемещающегося по неподвижному кристаллу класса 6mm(4mm, ∞m) вакуумного зазора, который имитирует движущуюся трещину.

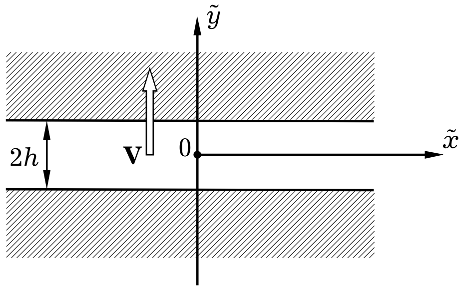

Рис. 2. Геометрия задачи: движущаяся трещина как вакуумный зазор, бегущий по кристаллу

1. Исходные уравнения и граничные условия

Примем, что в попутной системе отсчета $\tilde{x}0\tilde{y}\tilde{z}$, привязанной к трещине шириной $2h$, границы трещины $\tilde{y} = \pm h$ лежат в кристаллографических плоскостях (010) пьезоэлектрика класса $6mm(4mm, \infty m)$, а оси лабораторной системы отсчета $x0yz$ привязаны к кристаллу и соответствуют кристаллографической установке. Примем также, что трещина перемещается в поперечном направлении $[010] \parallel y$ с дозвуковой скоростью $\mathbf{V}$. Для сдвиговых волн со смещениями $\mathbf{u} \parallel z$, распространяющимися в плоскости $x0y$, имеем в лабораторной системе отсчета в качестве исходных уравнения [4; 5]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_t^2 \nabla^2 u, \quad \nabla^2 \Phi = 0\,. \tag{1}$$

Здесь t − время, ∇^2 − оператор Лапласа, $c_t = (c_{44}^* / \rho)^{1/2}$ − скорость сдвиговых волн с учетом пьезоэлектрического ужесточения модуля сдвига кристалла c_{44} до значения $c_{44}^* = c_{44} + 4\pi e^2 / \varepsilon$, e − пьезоэлектрический модуль, ε −диэлектрическая проницаемость, ρ − плотность. Величина Φ в (1) представляет собой ту часть полного электрического потенциала

$$\varphi = \frac{4\pi e}{\varepsilon} u + \Phi\,, \tag{2}$$

которая описывает приграничные электрические колебания, индуцированные под действием акустической волны с границ трещины в кристалл поверхностными пьезоэлектрическими зарядами.

Наряду с электрическими полями приграничных колебаний в пьезоэлектрике необходимо также учитывать электрическое поле потенциала Φ_0 в зазоре $|\tilde{y}| \le h$. Поэтому уравнения (1), (2) необходимо решать совместно с уравнением Лапласа

$$\nabla^2 \Phi_0 = 0\,. \tag{3}$$

Важным моментом решения граничных задач для электрозвуковых волн на движущихся границах [4; 5] является правильный отбор ветвей решения при определении зависимости полей смещений u и электрических потенциалов φ, Φ, Φ_0 от поперечной координаты. Из-за непрерывной смены положения границ сделать это возможно только в попутной системе отсчета $\tilde{x}0\tilde{y}\tilde{z}$. Данное обстоятельство предопределяет безусловную необходимость построения решения граничной задачи именно в этой системе координат даже в тех случаях, когда единственный интерес представляет поведение решения только в лабораторной системе отсчета.

Для перехода в попутную систему отсчета воспользуемся преобразованием Галилея

$$x = \tilde{x}\,, \quad y = \tilde{y} + V\tilde{t}\,, \quad z = \tilde{z}\,, \quad t = \tilde{t}, \tag{4}$$

которое адекватно согласуется с принятием квазистатического приближения при определении электрических полей. С учетом (4) уравнения (1), (3) примут вид

$$\begin{gathered} \left[\frac{1}{c_t^2} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} - V \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right)^2 - \tilde{\nabla}^2 \right] u = 0, \\ \tilde{\nabla}^2 \begin{pmatrix} \Phi \\ \Phi_0 \end{pmatrix} = 0, \quad \tilde{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2}. \end{gathered} \tag{5}$$

С учетом требования ограниченности потенциалов и смещений из уравнений (5) получим следующее представление решения в попутной системе отсчета

$$\begin{gathered} u_1 \equiv u(\tilde{y} > h) = U_1 \exp[i(\phi + k_\perp \tilde{y}) \exp(-s\tilde{y})], \\ \Phi_1 \equiv \Phi(\tilde{y} > h) = F_1 \exp(i\phi) \exp(-k\tilde{y}), \\ u_2 \equiv u(\tilde{y} < -h) = U_2 \exp[i(\phi + k_\perp \tilde{y}) \exp(s\tilde{y})], \\ \Phi_2 \equiv \Phi(\tilde{y} < -h) = F_2 \exp(i\phi) \exp(k\tilde{y}), \\ \Phi_0 = \exp(i\varphi)[C \exp(k\tilde{y}) + D \exp(-k\tilde{y})], \, |\, \tilde{y} \,| < h\,. \end{gathered} \tag{6}$$

В выражениях (6) $\phi = k\tilde{x} - \Omega\tilde{t}$ − фаза колебаний в волне, отсчитываемая вдоль границ трещины, k − продольная, а

$$k_\perp = \frac{\Omega}{c_t} \frac{\beta}{1 - \beta^2} \tag{7}$$

− поперечная компонента полного волнового вектора $\mathbf{k} = \mathbf{k} + \mathbf{k}_\perp$ волны, Ω − частота колебаний в попутной системе отсчета, $\beta = V / c_t$. Величина s, имеющая смысл постоянной амплитудного спадания сдвиговых смещений в пьезоэлектрик от границ трещины, как и в [4; 5] будет определяться равенством

$$s = \frac{1}{1 - \beta^2} \left[k^2 (1 - \beta^2) - \frac{\Omega^2}{c_t^2} \right]^{1/2}. \tag{8}$$

Граничные условия, выражающие при $\tilde{y} = \pm h$ отсутствие сдвиговых напряжений и непрерывность электрических потенциалов вместе с непрерывностью нормальных компонент электрической индукции, не содержат временных производных и, поэтому, как неоднократно указывалось [4; 5], остаются инвариантными при переходе в попутную систему отсчета. В данном случае, ввиду уравнений пьезоэффекта и с учетом (2), их можно представить в виде

$$\left(\frac{4\pi e}{\varepsilon}u_{1,2}+\Phi_{1,2}\right)\Big|_{\tilde y=\pm h}=\Phi_0\big|_{\tilde y=\pm h},$$
$$\varepsilon\frac{\partial\Phi_{1,2}}{\partial\tilde y}\Big|_{\tilde y=\pm h}=\frac{\partial\Phi_0}{\partial\tilde y}\Big|_{\tilde y=\pm h}, \qquad (9)$$
$$\left(\overset{*}{c}_{44}\frac{\partial u_{1,2}}{\partial\tilde y}+e\frac{\partial\Phi_{1,2}}{\partial\tilde y}\right)\Big|_{\tilde y=\pm h}=0.$$

В формулах (9) величинам u и Φ предписывается индекс «1», если соответствующее граничное условие формулируется на верхней границе $\tilde y = h$, и индекс «2» − для условий на нижней границе $\tilde y = -h$.

2. Дисперсионное соотношение и анализ спектра мод

Подстановка выражений (6) в граничные условия (9) приводит к системе однородных алгебраических уравнений, из требования разрешимости которой имеем, в форме равенства нулю детерминанта системы, дисперсионное соотношение для электрозвуковых волн на поперечно смещающейся трещине пьезоэлектрического кристалла

$$\begin{aligned}&\exp(-2kh)[k\mathcal{K}^2-s(1-\varepsilon)]^2+\\&+\exp(-2kh)k_\perp^2(1-\varepsilon)^2=\\&=\exp(2kh)[k\mathcal{K}^2-s(1+\varepsilon)]^2+\\&+\exp(2kh)k_\perp^2(1+\varepsilon)^2.\end{aligned} \qquad (10)$$

Здесь величина $\mathcal{K}^2 = 4\pi e^2/(\varepsilon \overset{*}{c}_{44})$ − квадрат коэффициента электромеханической связи пьезоэлектрика.

Конфигурацией и принятым характером перемещения границ рассматриваемая задача о движущейся трещине пьезоэлектрика напоминает рассмотренную в [8; 9] задачу для электрозвуковых волн на движущемся полосовом домене сегнетоэлектрического кристалла. Именно этим объясняется идентичность выражения (10) дисперсионному соотношению работ [8; 9], если не обращать внимания на поле упругих смещений внутри полосового домена. Соответственно сразу можно заключить о принадлежности волн на трещине к разряду неколлинеарных электрозвуковых волн со всеми их особенностями, отмечавшимися в [4−9].

Сравниваемые задачи, тем не менее, не сводятся друг к другу из-за очевидных отличий в граничных условиях. Проистекающие отсюда различия в дисперсионных свойствах электрозвуковых волн, удерживаемых движущимся полосовым доменом и движущейся трещиной, составляют необходимый элемент новизны для последующего анализа.

Движение трещины сказывается в (10) присутствием вторых слагаемых, пропорциональных $k_\perp^2$. При $k_\perp = 0$ в частности имеем вместо (10)

$$\begin{aligned}&\exp(-2kh)[k\mathcal{K}^2-s(1-\varepsilon)]^2=\\&=\exp(2kh)[k\mathcal{K}^2-s(1+\varepsilon)]^2.\end{aligned}$$

Обе стороны этого равенства образуют полные квадраты, что позволяет сразу понизить порядок уравнения вдвое, прибегнув к процедуре извлечения корней:

$$\begin{aligned}&\exp(-kh)[k\mathcal{K}^2-s(1-\varepsilon)]=\\&=\pm\exp(kh)[k\mathcal{K}^2-s(1+\varepsilon)].\end{aligned} \qquad (11)$$

Наличие двух корней отражает существование двух независимых ветвей спектра мод электрозвуковых волн. Группируя в (11) члены при $\mathcal{K}^2$ и s получим соответственно

$$\xi\mathcal{K}^2=\sigma[1+\varepsilon\,\mathrm{cth}(\xi)],\qquad \xi\mathcal{K}^2=\sigma[1+\varepsilon\,\mathrm{th}(\xi)], \qquad (12)$$

где $\xi = kh$, $\sigma = sh$. В выражениях (12) нетрудно разглядеть дисперсионные соотношения симметричной и антисимметричной моды щелевой электрозвуковой волны для случая неподвижных кристаллов без поперечного пьезоэффекта и фиксированного зазора [3].

Если в (10) сгруппировать члены, пропорциональные $k_\perp^2$ в правой стороне равенства, то в условиях движения трещины получим

$$\begin{aligned}&\{\xi\mathcal{K}^2-\sigma[1+\varepsilon\,\mathrm{th}(\xi)]\}\{\xi\mathcal{K}^2-\sigma[1+\varepsilon\,\mathrm{cth}(\xi)]\}=\\&=-p^2[1+\varepsilon\,\mathrm{ctg}(\xi)][1+\varepsilon\,\mathrm{th}(\xi)].\end{aligned} \qquad (13)$$

Сравнение выражений (12) с выражением (13), где $p = k_\perp h$, показывает, что движение трещины обеспечивает параметрическую связь мод щелевых волн, меняющую вид спектров. Для предельно тонкой трещины $\xi \to 0$ на основании (13) имеем квадратное по s уравнение: $s^2 - sk\mathcal{K}^2 + k_\perp^2 = 0$. Оно предсказывает в результате движения трещины снижение коэффициента граничной локализации колебаний антисимметричной моды $s \approx k\mathcal{K}^2 - k_\perp^2/(k\mathcal{K}^2)$ и,

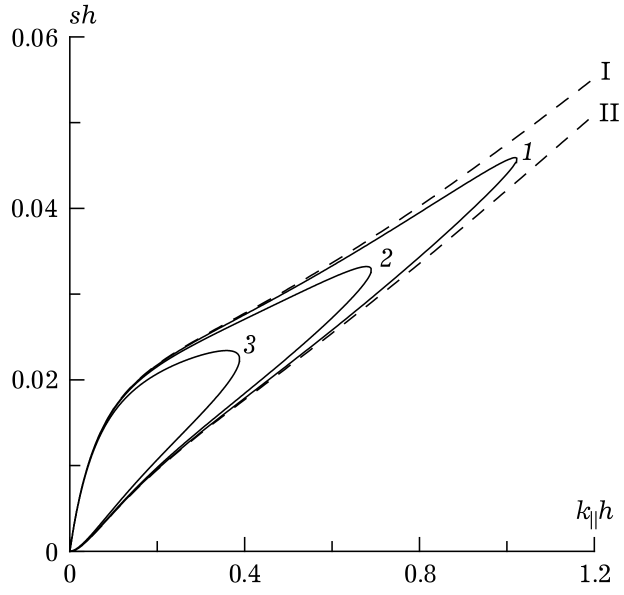

Рис. 3. Спектральные зависимости локализации щелевой электрозвуковой волны поперечно движущейся трещиной пьезоэлектрического кристалла: *1* – $\beta = 0.01$; *2* – $\beta = 0.02$; *3* – $\beta = 0.04$

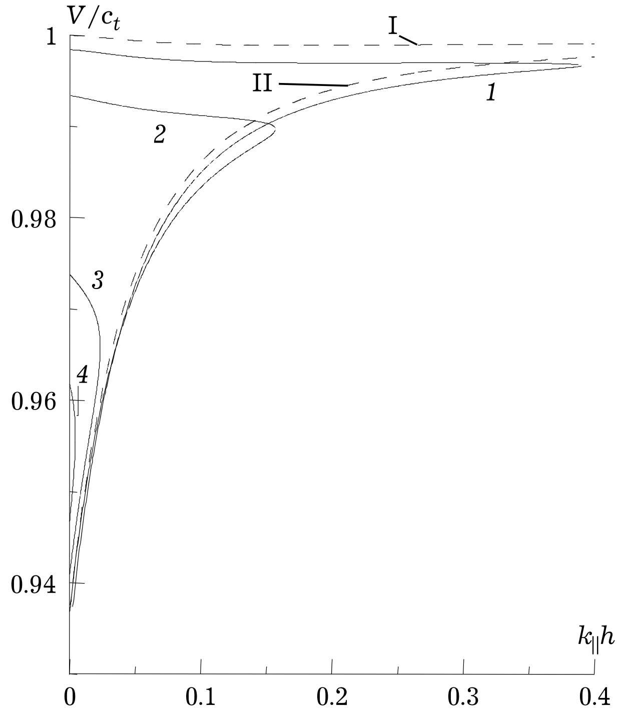

Рис. 4. Дисперсионные спектры щелевой электрозвуковой волны на поперечно смещающейся трещине: *1* – $\beta = 0.04$; *2* – $\beta = 0.08$; *3* – $\beta = 0.15$; *4* – $\beta = 0.17$

напротив, возникновение и пропорциональное повышение граничной локализации колебаний симметричной моды $s \approx k_\perp^2 / (k\mathcal{K}^2)$.

В другом предельном случае $\xi \to \infty$ уравнение (13) не имеет решения, если $p \neq 0$. Этот результат объясняется тем, что в условиях движения трещины для стационарного (вещественного, например, положительного $k > 0$) распространения неколлинеарной электрозвуковой волны необходимо, чтобы поток энергии в волне, подтекающий с одной стороны трещины ($\tilde{y} < -h$), уравновешивался потоком энергии, отводимой волной с другой ее стороны ($\tilde{y} > h$). Указанный баланс потоков регулируется сцеплением электрических полей через трещину и, естественно, возможен только при достаточной малости толщины трещины, что находит отражение в существовании верхней границы решения уравнения (13): $\xi < \xi_{\max}$.

Уравнение (13) должно рассматриваться совместно с равенствами (7), (8) из которых следует, что $k_\perp^2 = \beta^2[k^2(1-\beta^2)^{-1} - s^2]$. С учетом этого соотношения уравнение (13) можно представить как квадратное по σ уравнение

$$\sigma^2 - \frac{\xi\mathcal{K}^2}{1-\beta^2} f(\xi)\sigma + \left(\frac{\xi\mathcal{K}^2}{1-\beta^2}\right)^2 g(\xi) = 0 \qquad (14)$$

с функциями

$$f(\xi) = [1 + \varepsilon\,\mathrm{th}(\xi)]^{-1} + [1 + \varepsilon\,\mathrm{cth}(\xi)]^{-1},$$
$$g(\xi) = \frac{\beta^2}{\mathcal{K}^4} + \frac{1-\beta^2}{[1+\varepsilon\,\mathrm{th}(\xi)][1+\varepsilon\,\mathrm{cth}(\xi)]}. \qquad (15)$$

При выполнении условия $f^2(\xi) \geq 4g(\xi)$ оно парой своих корней $\sigma_{1,2} > 0$ задает аналитически зависимости $\sigma = \sigma(\xi)$ спектра коэффициентов граничной локализации мод щелевых электрозвуковых волн на берегах поперечно движущейся трещины. Процедура расчета сводится, таким образом, к подстановке найденных значений s для заданного $k_{\|}$ в формулы (7), (8) и поочередном вычислении величин Ω и $k_\perp$. Типичные результаты расчетов представлены на рис. 3 и 4 для случая, когда пьезоэлектрик характеризуется параметрами $\mathcal{K}^2 = 0.35$, $\varepsilon = 7$, а трещина имеет низкую скорость поперечного перемещения $\beta << 1$.

Штриховые кривые, обозначенные на рис. 3, 4 римскими цифрами I и II, представляют соответственно зависимости в случае неподвижной трещины ($\beta = 0$) для антисимметричной и симметричной мод электрозвуковой волны, спектры которых даются выражениями (12). Видно, что движение трещины становится причиной параметрической связи симметричной и антисимметричной мод, которые при $\beta \neq 0$ не существуют изолированно друг от друга.

Вследствие указанной гибридизации спектров электрозвуковая волна на движущейся трещине приобретает смешенные признаки симметрии/анти-симметрии распределения потенциала электрического поля поперек зазора. Аналогичную асимметрию в распределение упругих смещений граничной электрозвуковой волны поперек полосового домена в сегнетоэлектрике вносит, как было показано в [8; 9], движение полосового домена. Однако в этом случае изолированность мод движением полосового домена не нарушалась – спектры электрозвуковой волны трансформировались движением домена без гибридизации.

Геометрически гибридизация мод электрозвуковой волны выражается смыканием ветвей спектров ее локализации (рис. 3) в замкнутую петлю и образованием дисперсионных спектров (рис. 4) в форме полупетель. Подобные особенности преобразования поверхностных и граничных волн движением границ отмечались ранее для сред с подсистемами резонансного типа [10–12]. Применительно к движущейся трещине пьезоэлектрика резонансные качества в форме оптимизируемой связи кристаллов полями через зазор (трещину) демонстрирует уже не среды сами по себе, а слагаемые ими слоистая структура.

С ростом скорости поперечного движения трещины происходит заметное укорачивание петель спектра локализации электрозвуковой волны. Дисперсионные полупетли зависимостей фазовой скорости электрозвуковой волны в попутной системе отсчета $v(\Omega) = \Omega/(k^2 + k_\perp^2)^{1/2}$ от волновой толщины трещины $k_\parallel h$ (рис. 4) при этом выпрямляются и укорачиваются.

Связь фазовых скоростей $v(\Omega)$ и $v(\omega)$ электрозвуковой волны, а также других ее характеристик в попутной и лабораторной системе отсчета, вытекает из общих уравнений пьезоакустики (1). По этой причине относительность спектрального представления электрозвуковой волны для движущейся трещины будет такой же, как и в случае движущихся доменных границ [4; 5; 8; 9]. В частности, имеем $v(\omega) = v(\Omega)(1-\beta^2)$, откуда следует, что полная делокализации колебаний в пределе $\beta \to 1$, когда петли спектра локализации электрозвуковой волны на рис. 3 стягиваются в начало ($sh \to 0$, $kh \to 0$), сопровождается «остановкой» электрозвуковой волны: $v(\omega) \to 0$. Детальное объяснение этого феномена было дано в [9] для случая полосового домена и может быть целиком перенесено на рассматриваемый случай движущейся трещины. Именно, замечая, что в пределе $\beta \to 1$ трещина приобретает нулевую толщину, а волновая нормаль полностью ориентируется по направлению движения трещины, этот результат объясняется расцеплением волны с трещиной.

Работа выполнена по гранту РФФИ в рамках проекта № 14-07-00621.

Список литературы

1. Гуляев Ю.В., Марышев С.Н., Шевяхов Н.С. Электрозвуковая волна в зазоре пьезоэлектрической пары с относительным продольным перемещением // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32. № 20. С. 18–26.
2. Марышев С.Н., Шевяхов Н.С. Щелевые волны на границах пьезоэлектриков в условиях относительного продольного перемещения / Сб. трудов XVIII сессии Российского акустического общества. Т. 1. М.: Геос, 2006. С. 23–26.
3. Вилков Е.А., Марышев С.Н., Шевяхов Н.С. Электрозвуковые волны щелевого типа в слоистой структуре относительно перемещающихся пьезоэлектриков // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2011. Т. 14. № 2. С. 84–92.
4. Шевяхов Н.С. Об электрозвуковой волне на движущейся доменной границе // Акустический. журнал. 1999. Т. 45. № 4. С. 570–571.
5. Гуляев Ю.В., Ельмешкин О.Ю., Шевяхов Н.С. Электрозвуковые поверхностные волны на движущихся границах // Радиотехника и электроника. 2000. Т. 45. № 3. С. 351–356.
6. Freund L.B. Dynamic fracture mechanics. N.-Y.: Cambr. Univ. Press, 1998. 563 p.
7. Левин В.М., Морозов Е.М., Матвиенко Ю.Г. Избранные нелинейные задачи механики разрушения. М.: Физматлит. 2004. 408 с.
8. Ельмешкин О.Ю, Шевяхов Н.С. О трансляционном переносе электрозвуковых волн в сегнетоэлектрике движущимся полосовым доменом // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. № 9. С. 14–19.
9. Ельмешкин О.Ю., Шевяхов Н.С. Спектр мод неколлинеарных электрозвуковых граничных волн в сегнетоэлектрике с движущимся полосовым доменом // Акустический журнал. 2001. Т. 47. № 1. С. 69–75.
10. Вилков Е.А., Шавров В.Г, Шевяхов Н.С. Сдвиговая поверхностная волна на движущейся блоховской стенке // Известия вузов. Радиофизика. 2001. Т. 44. № 8. С. 712–724.
11. Шевяхов Н.С. О поверхностной ТМ-волне неколлинеарного типа на движущейся границе плазма–вакуум // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. № 12. С. 40–47.
12. Колчина Г.А., Неганов В.А., Шевяхов Н.С. Поверхностные ТМ-волны на движущихся границах слоя плазмы // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2004. Т. 7. № 2. С. 13–28.

Electroacoustic gap waves guided by cross moving crack of piezoelectric crystal

S.N. Maryshev, N.S. Shevyakhov

The mode properties of electroacoustic gap waves on plane boundaries of a crack, uniformly moving in a piezoelectric crystal of 6mm (4mm) class symmetry are discussed. It is shown that transverse motion of a crack causes noncollinearity of the electroacoustic waves attached by its, leads to parametrical connection of symmetric and antisymmetric modes and is a source of frequency dispersion.

Keywords: piezoelectric effect, electroacoustic wave, gap structure, dispersion, moving boundary.