

Интегралы Фейнмана как связующее звено между радиотехникой, фрактальной парадигмой и квантовой механикой

А.А. Потапов¹, А.Э. Рассадин²

¹ Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН
125009, Российская Федерация, г. Москва
ул. Моховая, 11, корп. 7

² Нижегородское региональное отделение Российского НТОРЭС им. А.С. Попова
603006, Российская Федерация, г. Нижний Новгород
ул. Ковалихинская, 28

Анализ интеграла Фейнмана для одномерного квантовомеханического гармонического осциллятора приводит к введению радиона – квазичастицы радиосистем, понимаемой как объект, распространяющийся в фазовом пространстве осциллятора по фрактальным траекториям. Эти же соображения приводят к выводу о естественной фрактальности всех радиосистем, оперирующих со спектром сигнала. При излучении электромагнитной волны в среду с произвольной диэлектрической проницаемостью радион продолжает свое фрактальное движение по фазовому пространству. Взаимоотношения радиона и квантов электромагнитного поля – фотонов – также обсуждены.

Ключевые слова: континуальный интеграл, фрактальная траектория, гармонический осциллятор, квазичастица, радиосистема, фотон, уравнение Шредингера, квазиоптика, функция Грина, кривая Пеано.

Отношение науки к мышлению лишь тогда истинно и плодотворно, когда становится видна пропасть, существующая между наукой и мышлением, притом такая пропасть, через которую невозможен мост. От науки в мышление нет мостов, возможен лишь прыжок.

Мартин Хайдеггер

Методы квантовой теории применяются при исследовании вопросов, связанных с радиотехникой, уже давно. В частности, уравнения Дайсона и Бете-Солпитера используются в статистической радиофизике с 60-х годов прошлого века [1]. Однако сама диаграммная техника Фейнмана появилась благодаря введению Р. Фейнманом в квантовую механику интегралов по траекториям [2]. В данной статье описаны радиотехнические величины, которые могут быть выражены интегралами Фейнмана, и проведен анализ следствий, к которым приводит квантовомеханическая интерпретация этих величин.

Рассмотрим одну из самых простых и одномерно наиболее значимых в физике квантовомеханических систем – одномерный гармонический осциллятор (КвГО) с частотой ω и массой m , т. е. систему с гамильтонианом [3]:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2 \cdot m} + \frac{m \cdot \omega^2 \cdot \hat{q}^2}{2}, \quad (1)$$

где $\hat{q} = x$ и $\hat{p} = -i \cdot \partial/\partial x$ – операторы координаты и импульса соответственно (здесь и далее используется система единиц, в которой постоянная Планка $\hbar = 1$).

Функция Грина (ФГ) КвГО имеет вид [4]:

$$G(x, \tilde{x}; t) = \sqrt{\frac{m \cdot \omega}{2 \cdot \pi \cdot i \cdot \sin(\omega \cdot t)}} \times \exp \left(i \cdot m \cdot \omega \cdot \frac{(x^2 + \tilde{x}^2) \cdot \cos(\omega \cdot t) - 2 \cdot x \cdot \tilde{x}}{2 \cdot \sin(\omega \cdot t)} \right). \quad (2)$$

Согласно общим правилам квантовой механики [3; 4], ФГ (2) – ядро унитарного оператора эволюции состояния КвГО в координатном представлении:

$$G(x, \tilde{x}; t) = \langle x | \exp(-i \cdot t \cdot \hat{H}) | \tilde{x} \rangle. \quad (3)$$

С другой стороны, ФГ (2) может быть вычислена как интеграл Фейнмана [2]:

$$G(x, \tilde{x}; t) = \int_{Q(0)=\tilde{x}}^{Q(t)=x} \exp \left[i \cdot \int_0^t \left(p(t) \cdot \dot{q}(t) - \frac{p^2(t)}{2 \cdot m} - \frac{m \cdot \omega^2 \cdot q^2(t)}{2} \right) \cdot dt \right] \cdot \prod_t \frac{dp(t) \cdot dq(t)}{2 \cdot \pi} \quad (4)$$

(мы взяли интеграл Фейнмана в гамильтоновой форме [5–7]).

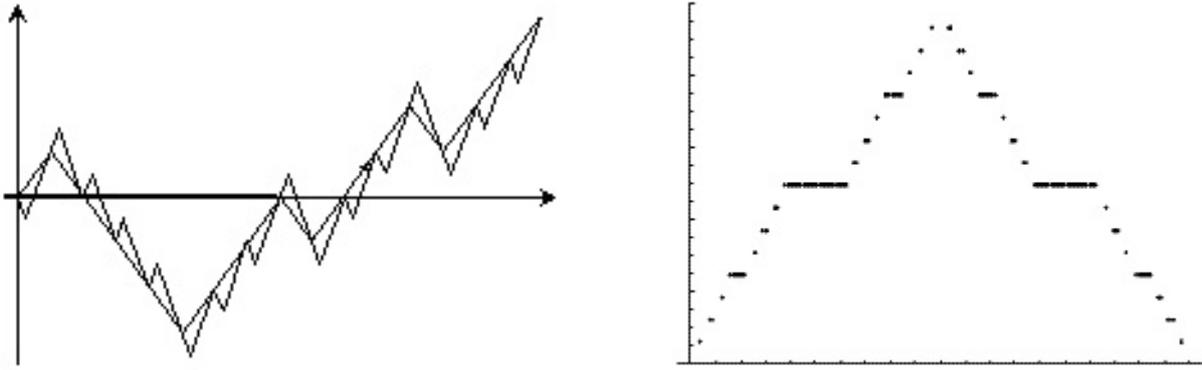


Рис. 1. Функция Больцано (слева) и функция Безиковича (справа)

Положим в формуле (2) $t = \pi/(2 \cdot \omega)$, тогда:

$$\begin{aligned} G\left(x, \tilde{x}; \frac{\pi}{2 \cdot \omega}\right) &= \\ &= \sqrt{\frac{m \cdot \omega}{2 \cdot \pi \cdot i}} \cdot \exp(-i \cdot m \cdot \omega \cdot x \cdot \tilde{x}). \end{aligned} \quad (5)$$

Сравнивая выражения (4) и (5) и переходя к системе единиц $m = \omega = 1$, делаем вывод, что плоская волна имеет следующее представление в виде интеграла Фейнмана:

$$\begin{aligned} \exp(-i \cdot p \cdot \xi) &= \\ &= \sqrt{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \int_{Q(0)=p/k_0}^{Q(\pi/2)=k_0 \cdot \xi} \exp\left[i \cdot \int_0^{\pi/2} \left(P(\tau) \cdot \dot{Q}(\tau) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{P^2(\tau) + Q^2(\tau)}{2} \right) \cdot d\tau\right] \cdot d\mu \end{aligned} \quad (6)$$

с мерой континуального интегрирования (k_0 – параметр с размерностью волнового числа, смысл введения которого выяснится в дальнейшем):

$$d\mu = \prod_{\tau} \frac{dP(\tau) \cdot dQ(\tau)}{2 \cdot \pi}, \quad (7)$$

в которой канонические переменные $P(\tau)$ и $Q(\tau)$ задают все возможные классические траектории в фазовом пространстве, соединяющие начальную и конечную точки [5–7].

Конструктивно запись континуального интеграла в форме (6) означает следующее: разделим временной интервал $[0, \pi/2]$ на N равных частей шириной $\Delta\tau = \pi/(2 \cdot N)$ и аппроксимируем на них координату $Q(\tau)$ кусочно-линейными функциями, а импульс $P(\tau)$ – кусочно-постоянными функциями:

$$\begin{aligned} Q(\tau) &= Q_j + (Q_{j+1} - Q_j) \cdot (\tau - \tau_j) / \Delta\tau, \\ P(\tau) &= P_j, \quad \tau \in [\tau_j, \tau_{j+1}], \end{aligned} \quad (8)$$

где $P_j = P(\tau_j)$ и $Q_j = Q(\tau_j)$ – значения канонических переменных в точках $\tau_j = j \cdot \Delta\tau$, $j = \overline{0, N}$,

тогда интеграл по путям (6) вычисляется как предел конечномерного интеграла:

$$\begin{aligned} \exp(-i \cdot p \cdot \xi) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{2 \cdot \pi \cdot i} \times \\ &\times \int_{R^{2N+1}} \exp[i \cdot S_N(P, Q)] \cdot \frac{d^N Q \cdot d^{N+1} P}{(2 \cdot \pi)^{N+1}}, \end{aligned} \quad (9)$$

причем функционал классического действия заменен следующей функцией $2 \cdot N + 1$ -й переменной:

$$\begin{aligned} S_N(P, Q) &= \sum_{j=0}^N \left[P_j \cdot (Q_{j+1} - Q_j) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Delta\tau}{2} \cdot \left(P_j^2 + \frac{Q_j^2 + Q_j \cdot Q_{j+1} + Q_{j+1}^2}{3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Приближение (8) для фазовых траекторий означает, что при стремлении N к бесконечности в множество функций, по которым ведется интегрирование по координатам в континуальном интеграле (6), попадает функция Больцано (см. рис. 1, слева), а в множество функций, по которым ведется интегрирование по импульсам, попадает функция Безиковича (см. рис. 1, справа). Обе эти функции непрерывны, но нигде не имеют производной – см. [8–11] и ссылки в них.

Фазовые кривые можно рассматривать и на фазовой плоскости (P, Q) , которую удобно задать комплексными координатами:

$$a = \frac{Q + i \cdot P}{\sqrt{2}}, \quad \bar{a} = \frac{Q - i \cdot P}{\sqrt{2}}, \quad (11)$$

служащими для определения континуального интеграла в голоморфном представлении [5; 7] и переходящими при квантовании осциллятора в операторы уничтожения и рождения [3; 4]. Тогда траектории (8) представляются на фазовой плоскости совокупностью прямых, параллельных оси Q . Пополним это множество прямых

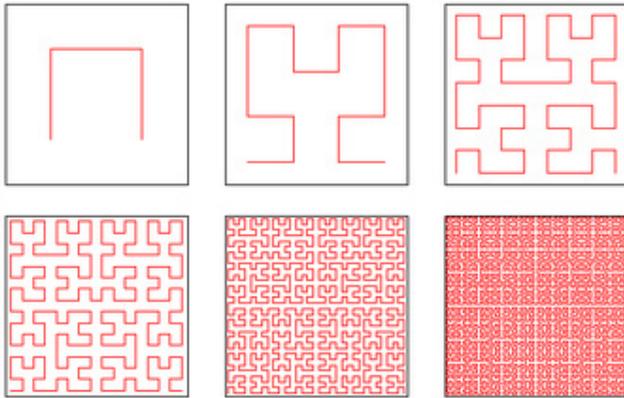


Рис. 2. Алгоритм построения кривой Пеано

теми прямыми, параллельными оси P , которые соединяют точки (Q_{j+1}, P_j) и (Q_{j+1}, P_{j+1}) и соответствуют мгновенному изменению импульса в момент времени τ_{j+1} . Таким образом, оказывается, что в числе фазовых траекторий на фазовой плоскости имеется и кривая Пеано с двумя концевыми точками (ее построение по алгоритму Гильберта см. на рис. 2.) – непрерывная кривая, заполняющая квадрат настолько плотно, что ее топологическая размерность равна двум [8].

Согласно теореме Банаха-Мазуркевича [8] множество дифференцируемых на отрезке функций является пренебрежимо малым в смысле категории Бэра по сравнению с множеством всех непрерывных функций на том же отрезке. Таким образом, интегрирование в континуальном интеграле (6) ведется в основном по недифференцируемым функциям, что отмечал и сам Р. Фейнман [2], и отечественные исследователи интегралов Фейнмана [6; 7]. Однако все они упускали из вида тот факт, впервые указанный авторами в докладе [12], что эти недифференцируемые функции обладают свойством фрактальности [8–11].

В качестве примера непрерывной, но нигде не дифференцируемой функции, задаваемой не правилом ее построения, а одной формулой, можно привести функцию:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cdot r(b^n \cdot x), \quad (12)$$

$$0 < a < 1, \quad a \cdot b > 1,$$

где $r(x)$ – квазипериодическая функция. При определенных ограничениях на $r(x)$ лакунарный ряд (12) нигде не имеет производной [8]. Функция (12) удовлетворяет следующему функциональному уравнению, отражающему свойство ее самоподобия:

$$f(x) - a \cdot f(b \cdot x) = a \cdot r(b \cdot x), \quad (13)$$

а ее график обладает фрактальной размерностью [8]:

$$D = 2 + \log_b a, \quad (14)$$

причем поскольку $1 < D < 2$, то график функции (12) – это уже не линия, но еще не поверхность.

Аналог кривой Пеано, задаваемый одной формулой, а не рекуррентной процедурой, также существует, а именно, в статье [13] был построен степенной ряд:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot z^n, \quad z = x + i \cdot y, \quad (15)$$

сходящийся в открытом круге $|z| < 1$ и непрерывный в замкнутом круге $|z| \leq 1$, такой, что образ отрезка $\tau \in [0, 2 \cdot \pi]$ при отображении $F(\exp(i \cdot \tau))$ содержит непустое открытое множество на плоскости.

Далее, хорошо известно, что для аддитивной группы вещественных чисел R неприводимыми унитарными представлениями являются плоские волны $\exp(-i \cdot p \cdot \xi)$ [14]. Они же являются собственными функциями известного из квантовой механики оператора $\hat{T}_a = \exp(i \cdot a \cdot \hat{P})$ сдвига на a [3; 4], который является ничем иным, как оператором регулярного представления группы R [14]. С другой стороны, тот факт, что плоская волна, а также собственные значения $\exp(-i \cdot p \cdot a)$ оператора сдвига \hat{T}_a выражаются континуальным интегралом (6), при учете того, что интегрирование в нем ведется по фрактальным функциям типа функций Больцано и Безиковича, означает, что формула (6) отражает связь непрерывного и дискретного.

Из определения преобразования Фурье произвольного сигнала $f(x) \in L^2(R)$:

$$\hat{F}[f](p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i \cdot p \cdot \xi) \cdot f(\xi) \cdot d\xi \quad (16)$$

в свете выражения (6) становится ясным, почему собственные функции гамильтониана КвГО (1) [3]:

$$|n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n \cdot n! \cdot \sqrt{\pi}}} \cdot H_n(\xi) \cdot \exp(-\xi^2/2), \quad (17)$$

где $H_n(\xi)$ – полиномы Чебышева-Эрмита [14], т. е.

$$\hat{H} |n \rangle = (n + 1/2) \cdot |n \rangle \quad (18)$$

являются также собственными функциями оператора преобразования Фурье [3; 14]:

$$\hat{F} |n \rangle = \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \exp(-i \cdot \pi \cdot n/2) \cdot |n \rangle. \quad (19)$$

Из формулы (6) также следует, что преобразование Фурье – это фрактальная операция. Что, в свою очередь, означает, что теория сигналов – фрактальна по своей сути. Поясним это на примере согласованных фильтров, оперирующих с сигналами известной формы и являющихся каноническими элементами многих радиосистем. На языке преобразований Фурье (15) это означает, что согласованный фильтр работает со спектром сигнала $f(x)$. Отсюда немедленно следует вывод о том, что фрактальны и все существующие радиосистемы.

Наконец, по аналогии с «локационом» – введенной в [12] квазичастицей радиолокации – для адекватного описания этой ситуации необходимо ввести также и квазичастицу радиосистем – «радион» [15]: объект,двигающийся в фазовом пространстве по фрактальным траекториям подобно квантовомеханической частице. Согласно той же формуле (6) радион в некоторой степени «статичен», т. е. находится как бы «внутри» радиосистемы, занимаясь обработкой информации. Однако для радиосистем важна не только обработка информации, но и ее передача.

Чтобы прояснить вопрос о роли радиона в процессах передачи информации, рассмотрим распространение электромагнитной волны в среде с постоянной диэлектрической проницаемостью ε :

$$\Delta \vec{E} = \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \text{div} \vec{E} = 0. \quad (20)$$

Подставим в уравнения Максвелла (20) электрическое поле с напряженностью:

$$\vec{E} = (0, A(x, z) \cdot \exp(i \cdot k_0 \cdot z - i \cdot \omega_0 \cdot t), 0), \quad (21)$$

где $k_0 = \omega_0 \cdot \sqrt{\varepsilon}/c$, тогда в приближении квазиоптики [16] получим в безразмерных переменных $\tau = k_0 z$ и $\xi = k_0 x$ для комплексной амплитуды поля $A(\xi, \tau)$ уравнение:

$$i \cdot \frac{\partial A}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2}. \quad (22)$$

Временная эволюция амплитуды поля $A(\xi, \tau)$ полностью определяется [16] ее распределением $A(\xi, 0)$ в начальный момент времени и известной ФГ уравнения (22):

$$A(\xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot i \cdot \tau}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[\frac{i \cdot (\xi - \eta)^2}{2 \cdot \tau} \right] \cdot A(\eta, 0) \cdot d\eta. \quad (23)$$

С другой стороны, уравнение (22) является уравнением Шредингера для свободной частицы единичной массы, поэтому его ФГ выражается следующим интегралом Фейнмана [2]:

$$\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot i \cdot \tau}} \exp \left[\frac{i \cdot (\xi - \eta)^2}{2 \cdot \tau} \right] = \int_{Q(0)=k_0 \cdot \eta}^{Q(k_0 \cdot z)=k_0 \cdot \xi} \exp \left[i \int_0^{k_0 \cdot z} \left(P(\tau) \cdot \dot{Q}(\tau) - \frac{P^2(\tau)}{2} \right) d\tau \right] \cdot d\mu \quad (24)$$

с той же структурой фазовых траекторий, по которым ведется интегрирование, которая была подробно описана выше.

Далее, начальное распределение амплитуды формируется интегралом Фурье:

$$A(\xi, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(p) \cdot \exp(i \cdot p \cdot \xi) \cdot \frac{dp}{2 \cdot \pi}, \quad (25)$$

в котором также фигурирует интеграл Фейнмана (6):

$$\frac{\exp(i \cdot p \cdot \xi)}{\sqrt{-2 \cdot \pi \cdot i}} = \int_{Q(-\pi/2)=p/k_0}^{Q(0)=k_0 \cdot \xi} \exp \left[-i \cdot \int_{-\pi/2}^0 \left(P(\tau) \cdot \dot{Q}(\tau) - \frac{P^2(\tau) + Q^2(\tau)}{2} \right) d\tau \right] \cdot d\mu. \quad (26)$$

Сравнивая континуальные интегралы (24) и (26), приходим к выводу о том, что при $\tau \in [-\pi/2, 0)$ радион готовится к его излучению радиосистемой, в которой его как бы «запирает» квадратичный потенциал. В момент времени $\tau = 0$ этот квадратичный потенциал пропадает, и затем свободный радион продолжает двигаться в безразмерном времени по фрактальной траектории в фазовом пространстве (P, Q) , что и соответствует его излучению радиосистемой в пространство. При этом комплексная амплитуда поля $A(\xi, \tau)$ соответствует амплитуде вероятности радиона, а функция $a(p)$ из интеграла Фурье (25) является для радиона его амплитудой вероятности по импульсам в начальный момент времени. Наконец, из формулы (21) следует связь $\tau = \omega_0 \cdot t$ безразмерного и размерного времен свободного радиона. Групповые свойства свободного радиона совпадают с аналогичными свойствами локациона, подробно описанными в докладе [17].

Поскольку для электромагнитного поля уже введены его кванты – фотоны, то принципиально важно исследовать вопрос о взаимоотношении радионов и фотонов.

Начнем с отношения фотонов к радионам: как известно, квантование электромагнитного поля основано на так называемом разложении поля

(в единичном объеме) на осцилляторы с частотами $\omega(\vec{k}) = c \cdot |\vec{k}|$ [18]. При этом оператор векторного потенциала поля имеет следующий вид [18]:

$$\hat{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}\alpha} (\hat{c}_{\vec{k}\alpha}^- \cdot \vec{A}_{\vec{k}\alpha}^-(\vec{r}, t) + \hat{c}_{\vec{k}\alpha}^+ \cdot \vec{A}_{\vec{k}\alpha}^*(\vec{r}, t)), \quad (27)$$

где взаимно ортогональные вектор-функции

$$\begin{aligned} \vec{A}_{\vec{k}\alpha}^-(\vec{r}, t) &= \\ &= \sqrt{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\vec{e}^{(\alpha)}(\vec{k})}{\sqrt{2 \cdot \omega(\vec{k})}} \cdot \exp(i \cdot \vec{k} \cdot \vec{r} - i \cdot \omega(\vec{k}) \cdot t) \end{aligned} \quad (28)$$

удовлетворяют условию поперечности поля $\vec{k} \cdot \vec{e}^{(\alpha)}(\vec{k}) = 0$, а операторы рождения и уничтожения фотонов подчиняются бозевским коммутационным соотношениям:

$$[\hat{c}_{\vec{k}\alpha}^-, \hat{c}_{\vec{k}'\alpha'}^+] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\alpha\alpha'}. \quad (29)$$

От операторного описания (27)–(29) электромагнитного поля можно перейти к классическому описанию электромагнитного поля с помощью уравнений Максвелла (20), если фотонов много, то есть если напряженность усредненно по промежуткам времени Δt поля [18]:

$$|\vec{E}\rangle \gg \frac{\sqrt{c}}{(c \cdot \Delta t)^2}, \quad (30)$$

что в силу представления поля (21) накладывает то же самое ограничение на величину амплитуды вероятности радиона $A(\xi, \tau)$.

Соотношение (6) легко обобщается на случай пространства R^n [15]:

$$\begin{aligned} &\frac{\exp\left(-i \cdot \sum_{j=1}^n p_j \cdot \xi_j\right)}{(2 \cdot \pi \cdot i)^{n/2}} = \\ &= \int_{\vec{Q}(0)=\vec{p}}^{\vec{Q}(\pi/2)=\vec{x}} \exp(i \cdot S[\vec{P}, \vec{Q}]) \times \\ &\times \prod_{j=1}^n \prod_{\tau} \frac{dP_j(\tau) \cdot dQ_j(\tau)}{2 \cdot \pi}, \end{aligned} \quad (31)$$

где действие

$$\begin{aligned} S[\vec{P}, \vec{Q}] &= \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{j=1}^n P_j(\tau) \cdot \dot{Q}_j(\tau) - \sum_{j=1}^n \frac{P_j^2(\tau) + Q_j^2(\tau)}{2} \right) \cdot d\tau. \end{aligned} \quad (32)$$

Отсюда следует, что плоская волна в вектор-функции (28) задается интегралом Фейнмана (31) при $n = 4$, который может быть проинтерпретирован как статический радион, распространяющийся по фрактальным траекториям в

восьмимерном фазовом пространстве. В частности, примером такой траектории является восьмимерная кривая Пеано, заполняющая восьмимерный куб [8]. Кроме того, выражение плоской волны (28) в виде континуального интеграла до некоторой степени поясняет невозможность введения волновой функции фотона в координатном представлении [18].

Проделаем теперь наш путь в обратном направлении – от радионов к фотонам. С помощью производящей функции для полиномов Чебышева-Эрмита [14] найдем следующее разложение ФГ (24):

$$\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot i \cdot \tau}} \cdot \exp\left[\frac{i \cdot (\xi - \eta)^2}{2 \cdot \tau}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} V_n^\tau(\eta) \cdot \frac{\xi^n}{\sqrt{n!}}, \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} V_n^\tau(\eta) &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot i \cdot \tau}} \cdot \frac{1}{2^n \cdot \sqrt{n!}} \times \\ &\times H_n\left(\frac{\eta}{\sqrt{2 \cdot i \cdot \tau}}\right) \cdot \exp\left[\frac{i \cdot \eta^2}{2 \cdot \tau}\right], \end{aligned} \quad (34)$$

а

$$\xi = \xi \cdot \sqrt{\frac{2}{i \cdot \tau}}. \quad (35)$$

Подставляя разложение (33) в формулу (23), получим:

$$A(\xi, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^\tau \cdot \frac{\xi^n}{\sqrt{n!}} \quad (36)$$

с коэффициентами

$$A_n^\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} V_n^\tau(\eta) \cdot A(\eta, 0) \cdot d\eta. \quad (37)$$

Разложение амплитуды вероятностей радиона $A(\xi, \tau)$ в степенной ряд (36) означает [5; 15; 19], что ему соответствует следующее состояние КвГО:

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^\tau \cdot |n\rangle. \quad (38)$$

Но стационарные состояния КвГО (17) могут быть получены с помощью оператора рождения фотона (29) с импульсом \vec{k} и поляризацией α следующим способом [18]:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \cdot (\hat{c}_{\vec{k}\alpha}^+)^n |0\rangle. \quad (39)$$

Таким образом, связь радионов с фотонами тоже установлена.

Очевидно, что развитая выше для радионов схема без изменений переносится на распространение волновых пакетов в диспергирующей

среде во втором приближении теории дисперсии – и для случая, когда начальный сигнал задан на границе среды с законом дисперсии $k(\omega)$ [16]:

$$i \cdot \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 k(\omega_0)}{d\omega^2} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2}, \quad \tau = t - \frac{dk(\omega_0)}{d\omega} \cdot z; \quad (40)$$

и для случая, когда начальный сигнал задан как возмущение в пространстве с законом дисперсии $\omega(k)$ [16]:

$$i \cdot \frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 \omega(k_0)}{dk^2} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2}, \quad (41)$$

$$\xi = z - \frac{d\omega(k_0)}{dk} \cdot t.$$

Если радион излучается радиосистемой в неоднородную изотропную среду с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega, x, z)$, то, выбрав напряженность электрического поля в прежнем виде (21), получим в приближении квазиоптики уравнение вида:

$$i \cdot \frac{\partial A}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + V(\xi, \tau) \cdot A, \quad (42)$$

отличающееся от уравнения (22) наличием потенциала

$$V(\xi, \tau) = \frac{1}{2} \cdot \left[1 - \frac{\omega_0^2}{k_0^2 \cdot c^2} \cdot \varepsilon \left(\omega_0, \frac{\xi}{k_0}, \frac{\tau}{k_0} \right) \right]. \quad (43)$$

ФГ уравнения (42) также выражается интегралом Фейнмана:

$$G(\xi_f, \tau_f; \xi_i, \tau_i) = \int_{Q(\tau_i)=\xi_i}^{Q(\tau_f)=\xi_f} \exp \left[i \cdot \int_{\tau_i}^{\tau_f} (P \cdot \dot{Q} - P^2/2 - V(Q, \tau)) \cdot d\tau \right] \cdot d\mu. \quad (44)$$

Если стационарный потенциал $V(\xi)$ в (42) – короткодействующий, то по ФГ (44) могут быть найдены коэффициент прохождения D и коэффициент отражения R радиона с импульсом p для этого потенциала [20], а именно, с точностью до нормировочного множителя:

$$D \sim \left| \lim_{\tau_f \rightarrow +\infty, \tau_i \rightarrow -\infty} G(p \cdot \tau_f, \tau_f; p \cdot \tau_i, \tau_i) \right|^2, \quad (45)$$

$$R \sim \left| \lim_{\tau_f \rightarrow +\infty, \tau_i \rightarrow -\infty} G(-p \cdot \tau_f, \tau_f; p \cdot \tau_i, \tau_i) \right|^2.$$

Если же потенциал $V(\xi)$ еще и мал, то в этом случае ФГ (44) может быть вычислена по теории возмущений следующим образом [20]:

$$G(\xi_f, \tau_f; \xi_i, \tau_i) =$$

$$= \exp \left\{ -i \cdot \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \cdot V \left[\frac{1}{i} \cdot \frac{\delta}{\delta F(\tau)} \right] \right\} \times \quad (46)$$

$$\times G_F(\xi_f, \tau_f; \xi_i, \tau_i) \Big|_{F=0},$$

где $G_F(\xi_f, \tau_f; \xi_i, \tau_i)$ – ФГ радиона в потенциале $V(Q, \tau) = -F(\tau) \cdot Q$. По формуле (44) она может быть вычислена аналитически [20]:

$$G_F(\xi_f, \tau_f; \xi_i, \tau_i) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot i \cdot (\tau_f - \tau_i)}} \times \quad (47)$$

$$\times \exp \left[\frac{i \cdot (\xi_f - \xi_i)^2}{2 \cdot (\tau_f - \tau_i)} + i \cdot \sigma_F(\xi_f, \tau_f; \xi_i, \tau_i) \right],$$

где добавка к действию свободного радиона за счет переменной внешней силы равна:

$$\sigma_F(\xi_f, \tau_f; \xi_i, \tau_i) =$$

$$= \int_{\tau_i}^{\tau_f} F(\tau) \cdot \left(\xi_f \cdot \frac{\tau - \tau_i}{\tau_f - \tau_i} + \xi_i \cdot \frac{\tau_f - \tau}{\tau_f - \tau_i} \right) \cdot d\tau + \quad (48)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\tau_i}^{\tau_f} \int_{\tau_i}^{\tau_f} \left[\frac{(\tau' - \tau_i) \cdot (\tau'' - \tau_i)}{\tau_f - \tau_i} - \min(\tau' - \tau_i, \tau'' - \tau_i) \right] \times$$

$$\times F(\tau') \cdot F(\tau'') \cdot d\tau' \cdot d\tau''.$$

Свойства радиона в постоянном однородном поле описаны в докладе [21], а для случая

$$V(\xi, \tau) = V_1(\tau) \cdot \xi^2 + V_2(\tau) \cdot \xi, \quad (49)$$

где $V_{1,2}(\tau)$ – произвольные функции, свойства радиона совпадают с свойствами оптического пучка в планарном световоде с показателем преломления среды (49), исследованными в [22; 23].

Если же диэлектрическая проницаемость изотропной среды является гауссовским случайным полем вида:

$$\varepsilon(x, z) = \varepsilon \cdot [1 + \varepsilon_1(x, z)], \quad (50)$$

то при предположении о дельта-коррелированности поля $\varepsilon_1(x, z)$ вдоль направления распространения волны:

$$\langle \varepsilon_1(x, z) \cdot \varepsilon_1(x', z') \rangle = \delta(z - z') \cdot a(x - x') \quad (51)$$

средняя по статистическому ансамблю амплитуда $\langle A \rangle$ электромагнитной волны вида (21) удовлетворяет уравнению [1]:

$$i \cdot \frac{\partial \langle A \rangle}{\partial \tau} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \langle A \rangle}{\partial \xi^2} - \frac{i \cdot k_0^2 \cdot a(0)}{8} \cdot \langle A \rangle, \quad (52)$$

которое сводится к уравнению (22) для свободного радиона подстановкой:



Рис. 3. Концепция А.А. Потапова фрактальных радиосистем и устройств

$$\langle A(\xi, \tau) \rangle = \exp \left[-\frac{k_0^2 \cdot a(0)}{8} \cdot \tau \right] \cdot A(\xi, \tau). \quad (53)$$

Таким образом, случайный характер диэлектрической проницаемости даже упрощает картину по сравнению с детерминированным случаем (46)–(48), приводя только к затуханию свободного радиона. Впрочем, квантовую теорию затухающего радиона на основе подходов Калдиры [24] и Канаи [25] тоже можно построить.

Заключение

1. С помощью интегралов Фейнмана выявлена связь радиотехники, фрактальной парадигмы и квантовой механики. Это привело к введению квазичастицы радиосистем – радиона, свойства которого в одномерном случае выяснены. Перспективой данного исследования является описание свойств двумерных радионов, которые имеют свои характерные особенности по сравнению с одномерными.

2. Подчеркнем качественное отличие нашего тезиса «все радиосистемы – фрактальны» от введенной ранее одним из авторов доклада (А.А. Потаповым) концепции фрактальных радиосистем и устройств – рис. 3 (см. [8–11] и ссылки в них). В рамках этой концепции фрактальные радиосистемы включают в себя фрактальные антенны и цифровые фрактальные обнаружители, основаны на фрактальных методах обработки информации, могут использовать фрактальные методы модуляции и демодуляции радиосигна-

лов. Другими словами, это – «искусственная», а не «естественная» фрактальность радиосистем. Но, в отличие от «естественно фрактальных» радиосистем фрактальные по Потапову радиосистемы дают весьма существенные преимущества при работе в условиях негауссовых и немарковских шумов и помех при сверхнизких отношениях сигнал/шум [8–11].

3. Математическая подготовка радиоинженеров и радиофизиков отстает от требований времени [26; 27]. Поэтому необходимо вводить в преподавание профильных вузов дополнительные главы функционального анализа, отражающие его современное состояние, в том числе его связи с теорией представлений групп и топологией.

Список литературы

1. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. Случайные поля. М.: Наука, 1978. 463 с.
2. Фейнман Р., Хиббс А. Квантовая механика и интегралы по путям. М.: Мир, 1968. 383 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. М.: Наука, 1989. 768 с.
4. Гольдман И.И., Кривченков В.Д. Сборник задач по квантовой механике. М.: ГИТТЛ, 1957. 276 с.
5. Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1988. 272 с.
6. Блохинцев Д.И., Барбашов Б.М. Применение функциональных интегралов в квантовой механике и теории поля // УФН. 1972. Т. 106. Вып. 4. С. 593–616.

7. Березин Ф.А. Континуальный интеграл по траекториям в фазовом пространстве // УФН. 1980. Т. 132. Вып. 3. С. 497–548.
8. Новейшие методы обработки изображений / А.А. Потапов [и др.]; под ред. А.А. Потапова. М.: Физматлит, 2008. 496 с.
9. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации. М.: Логос, 2002. 664 с.
10. Потапов А.А. Фракталы и хаос как основа новых прорывных технологий в современных радиосистемах / дополнение к кн.: Кроновер Р. Фракталы и хаос в динамических системах; пер. с англ. под ред. Т.Э. Кренкеля. М.: Техносфера, 2006. С. 374–479.
11. Потапов А.А. Фрактальный метод и фрактальная парадигма в современном естествознании. Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2012. 108 с.
12. Потапов А.А., Рассадин А.Э. О некоторых новых аналогиях между радиолокацией и квантовой механикой // Радиолокация, навигация, связь: сб. докл. XX МНТК. Воронеж, 2014. В 3 т., т. 3. С. 1799–1808.
13. Salem R., Zygmund A. Lacunary power series and Peano curves // Duke Math. J. 1945. V. 12. № 4. P. 559–578.
14. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965. 596 с.
15. Потапов А.А., Рассадин А.Э. Фейнмановские интегралы, фрактальные радиосистемы, или понимаем ли мы, что такое радиотехника? // Цифровая обработка сигналов и ее применение: сб. научн. трудов 17-й Международной конференции. М.: 2015. В 2 т., т. 1. С. 103–109.
16. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1990. 432 с.
17. Потапов А.А., Рассадин А.Э. О связи между радиолокацией, фрактальной парадигмой и симметрией сильных взаимодействий // Радиолокация, навигация, связь: сб. докл. XXI МНТК. Воронеж, 2015. В 3 т., т. 2. С. 582–593.
18. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1989. 728 с.
19. Фаддеев Л.Д., Якубовский О.А. Лекции по квантовой механике для студентов-математиков. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. 200 с.
20. Ициксон К., Зюбер Ж.-Б. Квантовая теория поля. Т. 2. М.: Мир, 1984. 400 с.
21. Потапов А.А., Рассадин А.Э. О новых свойствах квазичастицы радиосистем // 25-я Международная Крымская конференция «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии» (в печати).
22. Dodonov V.V., Man'ko V.I. Universal invariants of quantum systems and generalized uncertainty relations // in: Group Theoretical Methods in Physics, Proceedings of the Second International Seminar [Zvenigorod, 24-26 Nov. 1982], (M.A. Markov, V.I. Man'ko, A.E. Shabad, eds.). Chur-London-Paris-New York: Harwood Academic Publ., 1985. 591 p.
23. Додонов В.В., Манько О.В. Универсальные инварианты параксиальных оптических пучков // Труды III Международного семинара по теоретико-групповым методам в физике (Юрмала, 1985) / под ред. В.В. Додонова, М.А. Маркова, В.И. Манько. М.: Наука, 1986. С. 432.
24. Caldirola P. Forze non conservative nella meccanica quantistica // Nuovo Cimento. 1941. V. 18. P. 393.
25. Kanai E. On the quantization of the dissipative systems // Progr. Theor. Phys. 1945. V. 3. P. 440.
26. Использование физических аналогий между радиолокацией и квантовой механикой в экспресс-подготовке кадров для предприятий УРЭП и СУ ФАП РФ / А.Э. Рассадин [и др.] // Сборник научных трудов X Всероссийской научно-технической конференции «Современные проблемы радиоэлектроники». Красноярск: ИПК СФУ, 2008. С. 453–456.
27. Потапов А.А., Рассадин А.Э. 39-е Научно-футурологические чтения памяти А.С. Попова, посвященные Дню рождения Нижегородской радиолоборатории // Нелинейный мир. 2014. Т. 12. № 12. С. 66–69.

Feynman integrals as connecting component between radio engineering, fractal paradigm and quantum mechanics

A.A. Potapov, A.E. Rassadin

Analysing Feynman integral for one-dimensional harmonic oscillator we have found that it is possible to introduce quasiparticle of radio systems. This quasiparticle we have called «radion». One can understand «radion» as object moving along fractal trajectories in phase space of oscillator. The same arguments have led us to the conclusion about 'natural' fractality of all radio systems working with spectrum of signal. Under radiation of electromagnetic wave into medium with arbitrary dielectric permeability radion continues its fractal movement. Interrelations of radion and photon also have been discussed.

Keywords: path integral, fractal trajectory, harmonic oscillator, quasiparticle, radio system, photon, Schrödinger equation, quasiotics, Green's function, Peano curve.
