

Закон Малюса в квантовой электродинамике

А.Н. Волобуев

Самарский государственный медицинский университет
443099, Российская Федерация, г. Самара
ул. Чапаевская, 89

Показано, что закон Малюса, основанный на принципах классической электродинамики, не полностью учитывает все эффекты, которые могут происходить при прохождении линейно поляризованного света через анализатор. На основе квантовых представлений о природе света найдена форма закона Малюса, учитывающая передачу части импульса фотона частице, на которой происходит переизлучение света вперед. Вычисления проведены в рамках теории возмущений с использованием диаграммной техники Фейнмана.

Ключевые слова: закон Малюса, анализатор, плоскость поляризации, изменение частоты света, сечение взаимодействия.

Закон Малюса экспериментально был установлен французским физиком Э.Л. Малюсом в 1810 году, который будучи сторонником корпускулярной теории света Ньютона, пытался объяснить его с помощью движущихся световых частиц. Однако состояние физической науки в то время не позволило это сделать. Закон Малюса связывает интенсивность I линейно поляризованного света, вышедшего из анализатора, с интенсивностью I_0 линейно поляризованного света, падающего на анализатор:

$$I = I_0 \cos^2 \Theta, \quad (1)$$

где Θ – угол между плоскостями поляризации падающего и вышедшего света.

Обычно запись закона (1) сопровождается замечанием, что поглощение света не учитывается, или в формулу (1) напрямую вводят некоторый коэффициент прозрачности вещества анализатора.

Вывод закона Малюса на основе волновой теории света абсолютно тривиален [1], и мы не будем на нем останавливаться. Однако результат этого вывода (1) обладает одним существенным недостатком. Дело в том, что давление света, т. е. создание продольного по направлению светового вектора импульса у рассеивающей частицы (атом, ион, молекула и т. д.), может быть объяснено как на основе волновой, так и корпускулярной теории света [2]. Под рассеиванием квантов мы будем иметь в виду их переизлучение частицей вперед. Однако в формуле (1) полностью отсутствуют какие-либо указания на

существование светового давления, несмотря на то, что эта формула отражает процесс взаимодействия световой волны с частицей.

В действительности свет обладает квантовой природой, а квант света – продольным импульсом, который может быть передан частице. Поэтому с точки зрения квантовой теории света формула (1) принципиально неточная.

Представляет интерес найти поправки к формуле (1), обусловленные квантовой природой света. Вычисления будем проводить в рамках теории возмущений.

При выводе формулы (1) предполагается, что световая волна, в частности ее вектор напряженности электрического поля, может разделяться на две составляющие, одна из которых проходит через анализатор, другая через него не проходит.

Квантовая природа света не предполагает возможности разделения кванта света на две части, но квант сначала может поглотиться частицей (которая не должна быть полностью свободной), а затем излучиться с другой частотой и другой плоскостью поляризации. Если плоскость поляризации переизлученного кванта совпадает с плоскостью анализатора, то квант пройдет через анализатор. В противном случае он поглотится анализатором. В процессе переизлучения кванта существенную роль играют вероятностные процессы, т. к. направление плоскости поляризации отдельного переизлученного кванта зависит от множества факторов, в частности от

состояния частицы в момент переизлучения, возбуждаемой квантом степени свободы (электронной, колебательной), уровня симметрии строения переизлучающей частицы и т. д.

1. Взаимодействие кванта света с частицей вещества

Рассмотрим модель взаимодействия кванта света с заряженной частицей, например ионом массой m , в результате которого квант света при переизлучении на частице, с одной стороны, изменяет направление своей поляризации на угол Θ , а с другой стороны, сохраняет направление своего движения (рис. 1).

Вероятность перехода системы «фотон-частица» в единицу времени из начального состояния (до взаимодействия) в конечное (после взаимодействия) пропорциональна квадрату соответствующего матричного элемента взаимодействия $\hat{H}_{вз}$ оператора Гамильтона, т. н. «золотое правило Ферми» [3; 4]:

$$dW = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \hat{H}_{вз} \right|^2 \rho_F d\Omega, \quad (2)$$

где ρ_F – число конечных состояний системы «фотон-частица», приходящихся на единичный интервал энергий конечного состояния [5]; $d\Omega$ – телесный угол, характеризующий направление вылета переизлученного фотона; \hbar – приведенная постоянная Планка.

Пусть до взаимодействия с частицей импульс фотона был

$$k_1 = |\mathbf{k}_1| = \frac{\hbar\omega_1}{c},$$

где ω_1 – частота фотона; c – скорость света в вакууме. Импульс частицы $\mathbf{p}_1 = |\mathbf{p}_1|$.

После взаимодействия число конечных состояний переизлученного фотона импульсом $k_2 = |\mathbf{k}_2| = \hbar\omega_2 / c$ в объеме $V = 1$, приходящихся на энергетический интервал фотонов, соответствующий импульсному интервалу dk_2 , равно ρdk_2 , где

$$\rho = \frac{\omega_2^2}{(2\pi c)^3 \hbar} = \frac{k_2^2}{(2\pi\hbar)^3 c}$$

– число состояний фотонов, приходящихся на единичный интервал их энергий [4]. Естественно, число состояний переизлученных фотонов определит число состояний всей системы [5]:

$$\rho_F dE_F = \rho dk_2, \quad (3)$$

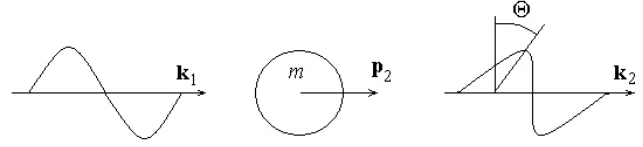


Рис. 1. Модель взаимодействия кванта света с переизлучающей частицей

где dE_F – энергетический интервал конечного состояния системы, соответствующий импульсному интервалу фотонов dk_2 . Следовательно:

$$\rho_F = \rho \frac{\partial k_2}{\partial E_F}. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (2), найдем вероятность перехода системы «фотон-частица» в единицу времени из начального состояния в конечное:

$$dW = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \hat{H}_{вз} \right|^2 \rho \frac{\partial k_2}{\partial E_F} d\Omega, \quad (5)$$

Используя (5), найдем дифференциальное эффективное сечение процесса. Квантово-механическое определение дифференциального эффективного сечения следующее [4; 6]: дифференциальное сечение рассеяния – это отношение числа рассеянных в единицу времени в элемент телесного угла квантов $dN_{рас}$ к плотности потока j_0 падающих квантов:

$$d\sigma = \frac{dN_{рас}}{j_0}. \quad (6)$$

Учитывая $j_0 = Nc$, где N – объемная концентрация фотонов, падающих на рассеивающую частицу в единицу времени, и полагая объем $V = 1$, найдем дифференциальное эффективное сечение процесса рассеяния квантов на частице:

$$d\sigma = \frac{dN_{рас}}{Nc} = \frac{dW}{c},$$

где учтено

$$dW = \frac{dN_{рас}}{N}.$$

Следовательно, дифференциальное эффективное сечение процесса с учетом

$$\rho = \frac{k_2^2}{(2\pi\hbar)^3 c}$$

равно:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{2\pi}{\hbar} \left| \hat{H}_{вз} \right|^2 \rho \frac{\partial k_2}{\partial E_F} d\Omega = \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} \left| \hat{H}_{вз} \right|^2 \frac{k_2^2}{(2\pi\hbar)^3 c} \frac{\partial k_2}{\partial E_F} d\Omega. \end{aligned} \quad (7)$$

Производную $\partial k_2 / \partial E_F$ по причинам, которые будут ясны в дальнейшем, найдем позже.

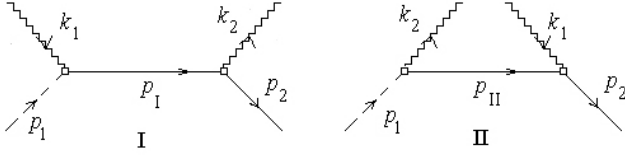


Рис. 2. Диаграммы Фейнмана для взаимодействия «фотон-частица». Модель взаимодействия кванта света с переизлучающей частицей

2. Нахождение матричного элемента оператора взаимодействия

Перейдем к нахождению матричного элемента $\hat{H}_{\text{вз}}$. Воспользуемся диаграммной техникой Фейнмана [3]. В [7] данная задача решалась без использования диаграммной техники Фейнмана. Для удобства вычислений дальнейшие преобразования проведем в 4-векторной форме. Используем также т. н. рациональную систему единиц, в которой скорость света и постоянная Планка равны единице $c = \hbar = 1$. В этой системе единиц энергия импульс и масса имеют одну и ту же размерность.

Возможны два пути, по которым может происходить рассеяние фотона на частице (рис. 2).

Путь I: частица, имеющая импульс p_1 в начальном состоянии с амплитудой волновой функции u_1 взаимодействует с фотоном, имеющим импульс k_1 , поглощая его, приобретает импульс $p_I = p_1 + k_1$. Затем частица излучает фотон импульсом k_2 и переходит в конечное состояние с амплитудой волновой функции u_2 и импульсом p_2 .

Путь II: частица, имеющая импульс p_1 в начальном состоянии с амплитудой волновой функции u_1 излучает фотон, имеющий импульс k_2 , приобретая импульс $p_{II} = p_1 - k_2$. Затем частица поглощает фотон импульсом k_1 и переходит в конечное состояние с амплитудой волновой функции u_2 и импульсом p_2 .

Матричный элемент для первого пути процесса имеет вид [3]

$$\begin{aligned}
 & i \left\{ u_2^* \left(-i \sqrt{\frac{4\pi q^2}{2k_2}} \right) \hat{e}_2 \frac{1}{\hat{p}_1 + \hat{k}_1 - m} \times \right. \\
 & \times \left. \left(-i \sqrt{\frac{4\pi q^2}{2k_1}} \right) \hat{e}_1 u_1 \right\} = i \left\{ u_2^* \left(-i \sqrt{\frac{2\pi q^2}{k_2}} \right) \hat{e}_2 \times \right. \\
 & \times \frac{1}{\hat{p}_1 + \hat{k}_1 - m} \left. \left(-i \sqrt{\frac{2\pi q^2}{k_1}} \right) \hat{e}_1 u_1 \right\} = \\
 & = i \frac{2\pi q^2}{\sqrt{k_1 k_2}} \left\{ u_2^* \hat{e}_2 \frac{1}{\hat{p}_1 + \hat{k}_1 - m} \hat{e}_1 u_1 \right\},
 \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$-i \sqrt{\frac{2\pi q^2}{k_1}} \hat{e}_1$$

– амплитуда вероятности поглощения фотона k_1 с 4-вектором поляризации e_1 ,

$$-i \sqrt{\frac{2\pi q^2}{k_2}} \hat{e}_2$$

– амплитуда вероятности излучения фотона k_2 с 4-вектором поляризации e_2 , q – заряд частицы (частица может быть также электронейтральной, что будет учтено далее), u^* – амплитуда сопряженной волновой функции частицы. Использовано стандартное обозначение операторов $\hat{a} = a^0 \gamma_t - \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}$, так что оператор \hat{a} связан с γ -матрицами Дирака.

Матричный элемент для второго пути процесса имеет вид

$$i \frac{2\pi q^2}{\sqrt{k_1 k_2}} \left\{ u_2^* \hat{e}_1 \frac{1}{\hat{p}_1 - \hat{k}_2 - m} \hat{e}_2 u_1 \right\}. \quad (9)$$

Традиционно порядок сомножителей, отражающих стадии процесса в матричном элементе, записывается справа налево.

Суммарный матричный элемент процесса взаимодействия «фотон-частица» имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_{\text{вз}} &= i \frac{2\pi q^2}{\sqrt{k_1 k_2}} \left\{ u_2^* \hat{e}_2 \frac{1}{\hat{p}_1 + \hat{k}_1 - m} \hat{e}_1 u_1 + \right. \\
 & \left. + u_2^* \hat{e}_1 \frac{1}{\hat{p}_1 - \hat{k}_2 - m} \hat{e}_2 u_1 \right\} = \\
 &= i \frac{2\pi q^2}{\sqrt{k_1 k_2}} u_2^* \left\{ \hat{e}_2 \frac{1}{\hat{p}_1 + \hat{k}_1 - m} \hat{e}_1 + \right. \\
 & \left. + \hat{e}_1 \frac{1}{\hat{p}_1 - \hat{k}_2 - m} \hat{e}_2 \right\} u_1.
 \end{aligned} \quad (10)$$

Проведем в (10) некоторые преобразования.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\hat{p}_1 + \hat{k}_1 - m} &= \frac{(\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + m)}{(\hat{p}_1 + \hat{k}_1 - m)(\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + m)} = \\
 &= \frac{(\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + m)}{(\hat{p}_1 + \hat{k}_1)^2 - m^2} = \frac{(\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + m)}{2(p_1 k_1)},
 \end{aligned} \quad (11)$$

где использованы следующие соотношения для 4-векторов:

$$\begin{aligned}
 p^2 &= (pp) = EE - \mathbf{p}\mathbf{p} = E^2 - |\mathbf{p}|^2 = m^2, \text{ т. к.} \\
 E^2 &= |\mathbf{p}|^2 + m^2 \text{ и } (kk) = k^0 k^0 - \mathbf{k}\mathbf{k} = 0,
 \end{aligned} \quad (12)$$

где E – энергия частицы; \mathbf{p} – ее 3-вектор импульса; k^0 – энергия фотона; \mathbf{k} – его 3-вектор импульса. В рациональной системе единиц $E = |\mathbf{p}|$ и $k^0 = |\mathbf{k}|$. Таким образом:

$$\begin{aligned}
& (p_1 + k_1)^2 - m^2 = \\
& = (p_1 p_1) + 2(p_1 k_1) + (k_1 k_1) - m^2 = \\
& = m^2 + 2(p_1 k_1) + 0 - m^2 = 2(p_1 k_1).
\end{aligned} \tag{13}$$

Аналогично:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\hat{p}_1 - \hat{k}_2 - m} &= \frac{(\hat{p}_1 - \hat{k}_2 + m)}{(\hat{p}_1 - \hat{k}_2 - m)(\hat{p}_1 - \hat{k}_2 + m)} = \\
&= \frac{(\hat{p}_1 - \hat{k}_2 + m)}{(\hat{p}_1 - \hat{k}_2)^2 - m^2} = -\frac{(\hat{p}_1 - \hat{k}_2 + m)}{2(p_1 k_2)},
\end{aligned} \tag{14}$$

поскольку

$$(p_1 - k_2)^2 - m^2 = -2(p_1 k_2). \tag{15}$$

Следовательно, формула (10) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{\text{вз}} &= i \frac{2\pi q^2}{\sqrt{k_1 k_2}} u_2^* \left\{ \hat{e}_2 \frac{(\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + m)}{2(p_1 k_1)} \hat{e}_1 - \right. \\
&\left. - \hat{e}_1 \frac{(\hat{p}_1 - \hat{k}_2 + m)}{2(p_1 k_2)} \hat{e}_2 \right\} u_1 = \\
&= i \frac{\pi q^2}{(p_1 k_1)(p_1 k_2) \sqrt{k_1 k_2}} u_2^* \times \\
&\times \left\{ (p_1 k_2) \hat{e}_2 (\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + m) \hat{e}_1 - \right. \\
&\left. - (p_1 k_1) \hat{e}_1 (\hat{p}_1 - \hat{k}_2 + m) \hat{e}_2 \right\} u_1 = \\
&= i \frac{\pi q^2}{(p_1 k_1)(p_1 k_2) \sqrt{k_1 k_2}} u_2^* M u_1,
\end{aligned} \tag{16}$$

где обозначено

$$\begin{aligned}
M &= (p_1 k_2) \hat{e}_2 (\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + m) \hat{e}_1 - \\
&- (p_1 k_1) \hat{e}_1 (\hat{p}_1 - \hat{k}_2 + m) \hat{e}_2.
\end{aligned} \tag{17}$$

Найдем квадрат модуля матричного элемента $|\hat{H}_{\text{вз}}|^2$.

Фотон при взаимодействии с частицей поворачивает плоскость своей поляризации. Но частица до взаимодействия может находиться в различных состояниях с амплитудой u , в том числе, согласно Дираку, в состоянии с отрицательной энергией [4]. Для того чтобы исключить состояния с отрицательной энергией, вводится т. н. проекционный оператор \hat{R} [4], или матрица плотности [8]. Проекционный оператор для частицы вводится по принципу

$$R = \frac{E + |E|}{2|E|} = \begin{cases} 1, & E > 0 \\ 0, & E < 0 \end{cases}$$

где E – энергия частицы. Переходя к операторам, найдем [9]:

$$\hat{R} = \frac{\hat{p} + m}{2E}, \tag{18}$$

так что

$$u(\hat{p} + m) = \begin{cases} 2mu, & E > 0 \\ 0, & E < 0 \end{cases} [3].$$

Используя проекционный оператор (18), мы можем при суммировании по состояниям частицы не обращать внимания на знак ее энергии.

Таким образом:

$$\begin{aligned}
|\hat{H}_{\text{вз}}|^2 &= \frac{\pi^2 q^4}{(p_1 k_1)^2 (p_1 k_2)^2 k_1 k_2} \sum_E (u_2^* M u_1)^2 = \\
&= \frac{\pi^2 q^4}{(p_1 k_1)^2 (p_1 k_2)^2 k_1 k_2} \times \\
&\times \sum_E (u_2^* \hat{R}_2 M u_1) (u_1^* \hat{R}_1 M^+ u_2) = \\
&= \frac{2\pi^2 q^4 m}{(p_1 k_1)^2 (p_1 k_2)^2 k_1 k_2} \sum_E (u_2^* \hat{R}_2 M \hat{R}_1 M^+ u_2).
\end{aligned} \tag{19}$$

Использовано условие нормировки амплитуд волновых функций частицы в виде $u u^* = 2m$ [3], M^+ – эрмитово сопряженный оператор [4].

Учитывая известную формулу $\sum u^* \hat{L} u = \text{Sp} L$ [5], а также проекционный оператор (18), найдем:

$$\begin{aligned}
|\hat{H}_{\text{вз}}|^2 &= \frac{2\pi^2 q^4 m}{(p_1 k_1)^2 (p_1 k_2)^2 k_1 k_2} \times \\
&\times \sum_E (u_2^* \hat{R}_2 M \hat{R}_1 M^+ u_2) = \\
&= \frac{\pi^2 q^4 m}{2(p_1 k_1)^2 (p_1 k_2)^2 E_1 E_2 k_1 k_2} \text{Sp} A,
\end{aligned} \tag{20}$$

где $A = (\hat{p}_2 + m) M (\hat{p}_1 + m) M^+$, E_1 и E_2 – энергии частицы до и после взаимодействия с фотоном.

Прежде чем находить $\text{Sp} A$, сделаем существенное упрощение задачи. Предположим, что первоначально рассеивающая частица находится в состоянии покоя, т. е. $\mathbf{p}_1 = 0$. Фактически мы выбираем систему отсчета, связанную с частицей до ее взаимодействия с квантом. В этом случае $(p_1 k) = p_1^0 k^0 - \mathbf{p}_1 \mathbf{k} = E_1 k = mk$, где $p_1^0 = E_1 = m$. В рациональной системе единиц энергия неподвижной частицы равна ее массе. Следовательно, $(p_1 k_1) = mk_1$ и $(p_1 k_2) = mk_2$.

Матрица (17) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
M &= m \left[k_2 \hat{e}_2 (\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + m) \hat{e}_1 - \right. \\
&\left. - k_1 \hat{e}_1 (\hat{p}_1 - \hat{k}_2 + m) \hat{e}_2 \right].
\end{aligned} \tag{21}$$

Формула (20) приобретает вид

$$\left| \widehat{H}_{\text{вз}} \right|^2 = \frac{\pi^2 q^4}{2m^3 k_1^3 k_2^3 E_2} \text{Sp} A. \quad (22)$$

В (22) использовано $E_1 = m$. Обозначение M сохраняем для величины

$$M = k_2 \widehat{e}_2 (\widehat{p}_1 + \widehat{k}_1 + m) \widehat{e}_1 - k_1 \widehat{e}_1 (\widehat{p}_1 - \widehat{k}_2 + m) \widehat{e}_2, \quad (23)$$

что не должно вызвать недоразумений.

Нахождение шпура $\text{Sp} A$ довольно громоздко, но носит технический характер. При вычислениях нужно помнить, что шпур от произведения нечетного числа операторов равен нулю, а от произведения четного числа операторов его можно вычислить по формуле

$$\begin{aligned} \text{Sp} \prod_{j=1}^{2k} \widehat{A}_j &= \sum_{n=2}^{2k} (-1)^n (A_1 A_n) \times \\ &\times \text{Sp} \left(\prod_{i=2}^{n-1} \widehat{A}_i \prod_{n+1}^{2k} \widehat{A}_i \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Результат вычислений $\text{Sp} A$ можно найти в [9]:

$$\begin{aligned} \text{Sp} A &= 32m^2 k_1^2 k_2^2 (e_1 e_2)^2 + \\ &+ 8mk_1 k_2 (k_1 k_2) (k_1 - k_2) = \\ &= 8m^2 k_1^2 k_2^2 \left[4(e_1 e_2)^2 + \frac{(k_1 k_2)(k_1 - k_2)}{mk_1 k_2} \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Найдем в (25) отношение

$$\begin{aligned} \frac{(k_1 k_2)}{k_1 k_2} &= \frac{(k_1^0 k_2^0 - \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2)}{k_1 k_2} = \\ &= \frac{(k_1^0 k_2^0 - k_1 k_2 \cos \alpha)}{k_1 k_2} = \\ &= \frac{k_1^0 k_2^0}{k_1 k_2} - \cos \alpha = 1 - \cos \alpha, \end{aligned} \quad (26)$$

где α – угол между начальным и переизлученным фотоном.

Явление взаимодействия «фотон-частица» в законе Малюса не связано с отклонением переизлученного фотона от первоначального направления, поэтому угол $\alpha = 0$. Следовательно, отношение

$$\frac{(k_1 k_2)}{k_1 k_2} = 0$$

и формула (25) приобретает вид

$$\text{Sp} A = 32m^2 k_1^2 k_2^2 (e_1 e_2)^2. \quad (27)$$

Подставляя (27) в (22), найдем:

$$\begin{aligned} \left| \widehat{H}_{\text{вз}} \right|^2 &= \frac{\pi^2 q^4}{2m^3 k_1^3 k_2^3 E_2} \text{Sp} A = \\ &= \frac{16\pi^2 q^4}{mk_1 k_2 E_2} (e_1 e_2)^2 = \frac{16\pi^2 (\hbar c)^4 q^4}{c^2 E_1 E_2 k_1 k_2} \cos^2 \Theta. \end{aligned} \quad (28)$$

В (28) использовано $(e_1 e_2) = \cos \Theta$, где Θ – угол поворота плоскости поляризации переизлученного фотона относительно плоскости поляризации фотона, падающего на частицу (рис. 1). Кроме того, осуществлен обратный переход от рациональной к абсолютной системе единиц измерения СГС.

3. Интенсивность света после взаимодействия с веществом

Подставляя (28) в (7), найдем дифференциальное эффективное сечение взаимодействия «фотон-частица»:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{2\pi}{\hbar} \left| \widehat{H}_{\text{вз}} \right|^2 \frac{k_2^2}{(2\pi\hbar)^3 c} \frac{\partial k_2}{\partial E_F} d\Omega = \\ &= \frac{4q^4 k_2}{E_1 E_2 k_1} \cos^2 \Theta \frac{\partial}{\partial E_F} d\Omega. \end{aligned} \quad (29)$$

Возвращаясь к 3-векторам и их модулям, найдем производную $\partial k_2 / \partial E_F$ при отсутствии углового рассеяния фотона. Энергия системы «фотон-частица» в конечном состоянии равна:

$$\begin{aligned} E_F &= ck_2 + E_2 = ck_2 + \sqrt{p_2^2 c^2 + m^2 c^4} = \\ &= ck_2 + \sqrt{(k_1 - k_2)^2 c^2 + E_1^2}. \end{aligned} \quad (30)$$

Использован закон сохранения 3-импульса в виде $p_2 = k_1 - k_2$. Все импульсы направлены по одной прямой (рис. 1), поэтому в законе сохранения используем алгебраические значения 3-импульсов.

Производная выражения (30) равна

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_F}{\partial k_2} &= c + \frac{\partial E_2}{\partial k_2} = c - \frac{c^2}{E_2} (k_1 - k_2) = \\ &= c \left[\frac{E_2 - cp_2}{E_2} \right] = c \frac{E_1}{E_2}. \end{aligned} \quad (31)$$

Использован закон сохранения энергии в виде $E_2 - E_1 = c(k_1 - k_2) = cp_2$.

Подставляя $c\partial k_2 / \partial E_F = E_2 / E_1$ в (29), найдем:

$$d\sigma = \frac{4q^4 k_2}{E_1^2 k_1} \cos^2 \Theta d\Omega. \quad (32)$$

Отметим, что величина $c\partial k_2 / \partial E_F$ зависит от вида процесса взаимодействия «фотон-частица». Например, найдем производную $\partial k_2 / \partial E_F$ при

возможности углового рассеивания фотона. Такая ситуация имеет место при анализе эффекта Комптона. Энергия системы «фотон-частица» в конечном состоянии в этом случае равна:

$$\begin{aligned} E_F &= ck_2 + E_2 = ck_2 + \sqrt{p_2^2 c^2 + m^2 c^4} = \\ &= ck_2 + \sqrt{(k_1 - k_2)^2 c^2 + E_1^2} = \\ &= ck_2 + \sqrt{k_1^2 c^2 - 2k_1 k_2 c^2 \cos \alpha + k_2^2 c^2 + E_1^2}. \end{aligned} \quad (33)$$

Производная этого выражения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_F}{\partial k_2} &= c + \frac{\partial E_2}{\partial k_2} = c - \frac{c^2}{E_2} (k_1 \cos \alpha - k_2) = \\ &= c \left[\frac{E_2 k_2 - c (k_1 k_2 \cos \alpha - k_2^2)}{E_2 k_2} \right] = \\ &= c \left[\frac{E_2 k_2 - c (-mc (k_1 - k_2) + k_1 k_2 - k_2^2)}{E_2 k_2} \right] = \\ &= \frac{ck_1 E_1}{E_2 k_2}. \end{aligned} \quad (34)$$

При выводе использована формула эффекта Комптона $k_1 k_2 (1 - \cos \alpha) = mc (k_1 - k_2)$ [11], $E_1 = mc^2$ и закон сохранения энергии $E_1 + k_1 c = E_2 + k_2 c$.

Перейдем в (32) от дифференциального эффективного сечения взаимодействия «фотон-частица» к интенсивностям излучения до и после взаимодействия.

По определению дифференциальное эффективное сечение процесса рассеяния волны в классической электродинамике $d\sigma_{\text{кл}} = dP / I_0$ [12], где dP – поток энергии рассеянного в телесный угол $d\Omega$ излучения; I_0 – интенсивность падающего излучения.

Свяжем данное определение дифференциального эффективного сечения взаимодействия с его квантовым аналогом (6). Учитывая

$$dN_{\text{рас}} = \frac{dP}{\hbar\omega_2} \text{ и } j_0 = \frac{I_0}{\hbar\omega_1},$$

найдем

$$d\sigma_{\text{кл}} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{dN_{\text{рас}}}{j_0} = \frac{k_2}{k_1} d\sigma \quad [6].$$

Следовательно, учитывая (32), найдем:

$$d\sigma_{\text{кл}} = \frac{k_2}{k_1} d\sigma = \frac{4q^4 k_2^2}{E_1^2 k_1^2} \cos^2 \Theta d\Omega. \quad (35)$$

Интенсивность излучения после взаимодействия

$$I = \frac{dP}{dS} = \frac{I_0 d\sigma_{\text{кл}}}{R^2 d\Omega},$$

где R – произвольный радиус сферы, описанной вокруг частицы. Не уменьшая общности вывода, примем (по аналогии с классическим радиусом электрона) $R = 2q^2 / E_1$. В результате получаем закон Малюса в виде

$$I = I_0 \frac{k_2^2}{k_1^2} \cos^2 \Theta = I_0 \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} \cos^2 \Theta. \quad (36)$$

При $\omega_1 = \omega_2$ формула (36) переходит в классический закон Малюса (1). Этим объясняется выбор $R = 2q^2 / E_1$.

Заметим, что формулу (36) нельзя получить ни при каких условиях из формулы Клейна – Нишины [9] для эффекта Комптона. Формула (36) относится к переизлучению фотонов строго вперед после взаимодействия с частицей. В эффекте Комптона при переизлучении фотона вперед изменения его частоты не происходит.

Согласно формуле (35) переизлучение фотона вперед с поворотом его плоскости поляризации происходит только при взаимодействии с заряженной частицей. Однако установлено, что поворачивают плоскость поляризации света либо асимметричные, в том числе нейтральные, молекулы, либо асимметричные кристаллы, обладающие асимметрией поля сил, связывающих частицы в кристаллической решетке [13]. Поэтому под величиной q нужно понимать не полный заряд частицы, а ту часть заряда, которая определяет асимметричную часть электрического поля вокруг молекулы, создающего силы взаимодействия Ван-дер-Ваальса, либо вокруг частицы в кристаллической решетке. В целом же частица может быть электрически нейтральной. Если электронейтральная частица создает вокруг себя полностью симметричное электрическое поле (при $q = 0$, величина $d\sigma_{\text{кл}} = 0$), интенсивность $I \sim d\sigma_{\text{кл}} / q^4$ становится неопределенной. С этой точки зрения формула (36) имеет более общий характер, чем (35).

Полученная формула (36) показывает, что при переизлучении на частице частоты излученного и поглощенного света могут не совпадать. Частица может переизлучать в стоксовском $\omega_2 < \omega_1$ или антистоксовском $\omega_2 > \omega_1$ режимах.

В используемой теории возмущений разложение волновой функции в ряд по собственным функциям невозмущенного гамильтониана осуществляется вблизи резонансной энергии до членов первого порядка малости. Поэтому интенсивность переизлучения оказалась пропорциональной ω_2^2 [12]. Вдали от резонанса необхо-

димо вводить поправку, связанную с шириной энергетических уровней электронов γ в переизлучающей частице [4; 5; 8]. Отметим также, что учет ширины энергетического уровня не меняет поляризационных свойств излучения [8].

При низких частотах можно использовать поправку к формуле (36) для классической дипольной переизлучающей частицы [12] в виде

$$\frac{\omega_i^2 \gamma^2}{(\omega_0^2 - \omega_i^2)^2 + \omega_i^2 \gamma^2},$$

где $i = 1, 2$, ω_0 – резонансная частота переизлучающей частицы. Этот вид поправки следует из электромагнитной теории света. В этом случае формула (36) принимает вид

$$I = I_0 \frac{\omega_2^4 (\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + \omega_1^2 \gamma^2}{\omega_1^4 (\omega_0^2 - \omega_2^2)^2 + \omega_2^2 \gamma^2} \cos^2 \Theta. \quad (37)$$

Вблизи резонанса, учитывая $\omega_i \approx \omega_0$, приходим к формуле (36). При относительно малых частотах $\omega_i \ll \omega_0$ из (37) находим:

$$I = I_0 \frac{\omega_2^4}{\omega_1^4} \cos^2 \Theta.$$

При очень больших частотах $\omega_i \gg \omega_0$ получаем классическую формулу (1) или, точнее, формулу с сохраненной частотой переизлучения $\omega_1 = \omega_2$. Во всех случаях предполагается $\omega_1 \approx \omega_2$ и $\omega_i \gg \gamma$.

При высоких частотах (следовательно, в квантовой области) формула (36) должна быть преобразована с использованием квантовой поправки [14] в виде сомножителя:

$$\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \frac{1}{(\omega_0 - \omega_i)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}:$$

$$I = I_0 \frac{\omega_2^2 (\omega_0 - \omega_1)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}{\omega_1^2 (\omega_0 - \omega_2)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} \cos^2 \Theta. \quad (38)$$

Отметим, что вблизи резонанса при $\omega_i \approx \omega_0$ обе поправки (классическая и квантовая) идентичны:

$$\frac{\omega_i^2 \gamma^2}{(\omega_0^2 - \omega_i^2)^2 + \omega_i^2 \gamma^2} =$$

$$= \frac{\omega_i^2 \gamma^2}{(\omega_0 - \omega_i)^2 (\omega_0 + \omega_i)^2 + \omega_i^2 \gamma^2} =$$

$$\approx \frac{\omega_i^2 \gamma^2}{(\omega_0 - \omega_i)^2 4\omega_i^2 + \omega_i^2 \gamma^2} =$$

$$= \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \frac{1}{(\omega_0 - \omega_i)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}.$$

Вблизи резонанса аналогично формуле (37) формула (38) переходит в формулу (36). Так же как и формула (37), при высоких частотах формула (38) переходит в классическую формулу (1). При низких частотах в области классической электродинамики нужно пользоваться формулой (37).

В заключение оценим численное значение частотного коэффициента в формуле (36). В [15] приведены спектры поглощения и излучения кристалла $\text{CaSiO}_3 \cdot \text{Pb}$ и спектр излучения кристалла $\text{CaWO}_4 \cdot \text{Pb}$, облученного линией $\lambda_1 = 2537 \text{ \AA}$. Для $\text{CaSiO}_3 \cdot \text{Pb}$ используем спектральную линию максимальной интенсивности поглощения $\lambda_1 = 2527 \text{ \AA}$. Спектральные линии максимальной интенсивности излучения равны: для $\text{CaSiO}_3 \cdot \text{Pb}$ – $\lambda_2 = 2534 \text{ \AA}$, для $\text{CaWO}_4 \cdot \text{Pb}$ – $\lambda_2 = 2544 \text{ \AA}$. Следовательно, для $\text{CaSiO}_3 \cdot \text{Pb}$ коэффициент $\omega_2^2 / \omega_1^2 = \lambda_1^2 / \lambda_2^2 = 0,994$ и для $\text{CaWO}_4 \cdot \text{Pb}$ – $\omega_2^2 / \omega_1^2 = 0,995$. При практическом использовании закона Малюса в виде (1) мы делаем ошибку, не превышающую для данных кристаллов 0,5 %.

Заключение

Используя метод расчета на основе диаграммной техники Фейнмана, можно найти форму закона Малюса, учитывающую квантовый характер излучения. Эта форма закона Малюса не связана с формулой Клейна – Нишины для эффекта Комптона и не может быть получена из этой формулы.

Квантово-механическая форма закона Малюса, в отличие от классической, позволяет учесть ту часть импульса при взаимодействии «фотон-частица», которая передается частице. За счет этого направленное вперед излучение после взаимодействия имеет меньшую интенсивность, чем рассчитанное на основе классического закона Малюса.

В квантовом объяснении закона Малюса важное значение имеет несимметричность электрического поля, создаваемого молекулами в веществе или частицами в узлах кристаллической решетки. Несимметричность электрического

поля связана с геометрической несимметричностью структур, создающих поле.

Проведен анализ связи закона Малюса с конечной шириной энергетических уровней переизлучающих частиц.

Список литературы

1. Волобуев А.Н. Основы медицинской и биологической физики: учебное пособие. Самара: Самарский дом печати, 2011. С. 521.
2. Ландсберг Г.С. Оптика. М.: Наука, 1976. С. 660.
3. Фейнман Р. Квантовая электродинамика. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. С. 12, 84, 120, 124, 125, 147.
4. Левич В.Г., Вдовин Ю.А., Мямлин В.А. Курс теоретической физики. Т. 2. М.: Физматлит, 1962. С. 291, 564, 649, 667, 791, 795.
5. Гайтлер В. Квантовая теория излучения. М.: Иностранная литература, 1956. С. 131, 234, 247, 250.
6. Давыдов А.С. Квантовая механика. М.: Физматлит, 1963. С. 418.
7. Volobuev A.N., Petrov E.S., Ovchinnicov E.L. Features of Malus law in the region of x-ray radiation // Journal of Modern Physics. 2012. V. 3. P. 585–596.
8. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Квантовая электродинамика. Т. 4. М.: Наука, 1989. С. 106, 132, 280.
9. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантовых полей. М.: Наука, 1976. С. 59, 202, 203.
10. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968. С. 350.
11. Матвеев А.Н. Атомная физика. М.: Высшая школа, 1989. С. 27.
12. Левич В.Г. Курс теоретической физики. Т. 1. М.: Физматлит, 1962. С. 143, 146.
13. Физический энциклопедический словарь / под ред. А.М. Прохорова. М.: Советская энциклопедия, 1983. С. 497.
14. Ельяшевич М.А. Общие вопросы спектроскопии. М.: Ком-Книга, 2007. С. 192.
15. Левшин В.Л. Свечение активированных кристаллов // УФН. Т. 43. № 3. 1951. С. 426–484.

The Malus law in the quantum electrodynamics

A.N. Volobuev

It is shown that the Malus law based on the principles of classical electrodynamics not completely takes into account all effects which can occur at passage of a linearly polarized light through the analyzer. On the basis of the quantum representations about the nature of light the form of Malus law which is taking into account transfer of a part of a photon impulse to particle on which occurs reradiation of light forward is found. Calculations are carried out within the framework of the perturbations theory with use of the Feynman diagram technics.

Keywords: Malus law, analyzer, plane of polarization, change of light frequency, cross-section of interaction.
