

## Самосинхронизация томсоновских автоколебательных систем в дискретном времени

В.В. Зайцев, О.В. Зайцев, И.В. Стулов

Самарский государственный университет  
443011, Российская Федерация, г. Самара  
ул. Ак. Павлова, 1

Описан эффект, возникающий в дискретном времени при взаимодействии автоколебаний с подменными гармониками основной частоты. Показано, что он аналогичен эффекту захвата частоты (синхронизации) автоколебаний внешним гармоническим сигналом. Так как дискретный автогенератор формально является автономной системой, то эффект классифицирован как самозахват частоты или самосинхронизация. Самозахват проанализирован методом медленно меняющихся амплитуд. Указано на то, что через механизм самосинхронизации при определенных условиях осуществляется привязка частоты дискретных автоколебаний к частоте дискретизации.

*Ключевые слова:* нелинейная динамика, автоколебательная система, синхронизация, захват частоты, дискретное время.

### Введение

Известно, что в спектре дискретного во времени (ДВ) гармонического сигнала, частота которого превышает частоту Найквиста  $\omega_N$ , наблюдается эффект подмены частот [1]. При дискретизации аналоговых сигналов с целью их последующей цифровой обработки подмена частот устраняется путем применения противоположенных фильтров. Если же частоту  $\omega_N$  превышает частота гармоники, генерируемой в нелинейной дискретной системе, то такая гармоника должна рассматриваться как подменная. Влияние подменных гармоник на динамику нелинейных ДВ-осцилляторов особенно велико, если они попадают в полосы пропускания резонансных систем.

В настоящем сообщении анализируется эффект самосинхронизации томсоновской автоколебательной системы (АКС). Эффект наблюдается тогда, когда частота подменной гармоники близка к частоте свободных автоколебаний. Внешний сигнал в этих условиях может «навязать» свою частоту автоколебательной системе, т. е. имеет место синхронизация (захват частоты) АКС [2]. Стремление подменной гармоники захватить частоту основного сигнала приводит к тому, что в системе устанавливаются автоколебания с частотой  $\Omega_{ss}$ , удовлетворяющей условию  $\Omega_{ss} = F(N\Omega_{ss})$ , где  $N$  – номер гармоники, а  $F(\Omega)$  – пилообразная функция преобразования:

$$F(\Omega) = F_t(\Omega - \text{floor}(\Omega)),$$

$$F_t(\Omega) = \begin{cases} \Omega, & 0 \leq \Omega < 0.5 \\ 1 - \Omega, & 0.5 \leq \Omega < 1 \end{cases}.$$

В частности, при  $N = 3$   $\Omega_{ss} = 1/4$ , а при  $N = 5$   $\Omega_{ss} = 1/3$  или  $\Omega_{ss} = 1/6$ .

Предварительные результаты по теории самосинхронизации были опубликованы в [6]. Здесь дается детальный анализ эффекта.

### 1. Томсоновский автогенератор в дискретном времени

В качестве объекта исследований примем предложенное в [3] дискретное отображение томсоновской АКС:

$$y[n] - 2\alpha \cos(2\pi\Omega_0) y[n-1] + \alpha^2 y[n-2] = \gamma (\cos(2\pi\Omega_0) G(y[n-1]) - G(y[n-2])). \quad (1)$$

Здесь  $\Omega_0$  – нормированная на частоту дискретизации собственная частота контура;  $\gamma > 0$  – параметр глубины положительной обратной связи, а параметр диссипации определяется добротностью  $Q$  аналогового прототипа:

$$\alpha = \exp(-\pi\Omega_0 / Q).$$

Функция нелинейности активного элемента АКС  $G(y)$  в дальнейшем аппроксимируется неполным кубическим полиномом

$$G(y) = y - \frac{1}{3}y^3. \quad (2)$$

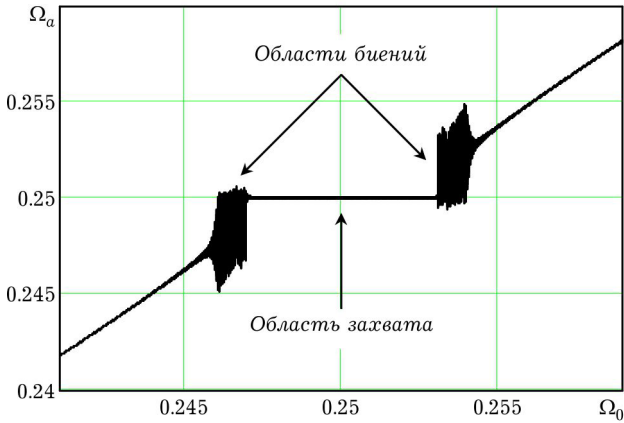


Рис. 1. Частото-частотная характеристика в окрестности  $\Omega_{ss} = 0.25$

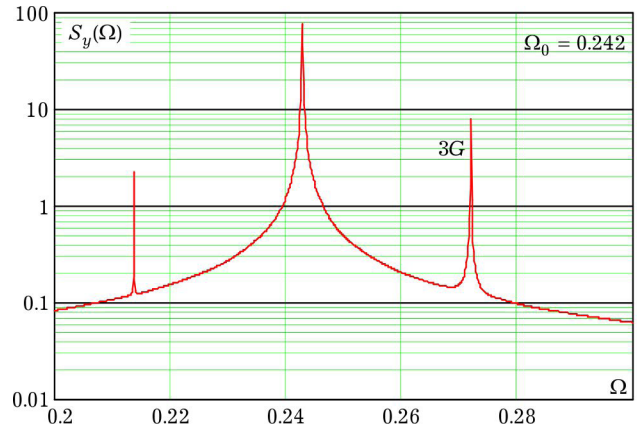


Рис. 2. Амплитудный спектр автоколебаний

Рассмотрим результаты имитационного эксперимента, в котором частота  $\Omega_0$  квазистатически меняется в окрестности  $\Omega_{ss} = 0.25$ . Параметры АКС  $Q = 20$  и  $\gamma = 0.15$ . На рис. 1 показана зависимость от  $\Omega_0$  мгновенной частоты автоколебаний

$$\Omega_a[n] = \frac{\psi[n] - \psi[n - 1]}{2\pi},$$

где фаза  $\psi[n]$  осцилляций  $y[n]$  выделяется методом аналитического сигнала. Зависимость типична для явления захвата частоты [2]: области с практически линейными связями  $\Omega_a = f(\Omega_0)$  при приближении к  $\Omega_{ss} = 0.25$  сменяются областями биений, а затем происходит захват на  $\Omega_a = \Omega_{ss}$ . Но так как исследуемый автогенератор автономен, то речь в данном случае может идти о самозахвате (самосинхронизации).

Амплитудный спектр  $S_y(\Omega)$  осцилляций  $y[n]$  на рис. 2 позволяет выявить механизм самосинхронизации – это взаимодействие основной гармоники с подменной третьей (3G). При смещении спектральной линии автоколебаний на частоте  $\Omega_a$  в направлении  $\Omega_{ss}$  линия 3G перемещается во встречном направлении. В итоге происходит самозахват частоты. Во втором порядке теории возмущений этот эффект с участием подменной пятой гармоники наблюдается в окрестностях частот  $\Omega_{ss} = 1/6$  и  $\Omega_{ss} = 1/3$ .

## 2. Анализ самосинхронизации методом ММА

Динамику процесса самосинхронизации на частоте  $\Omega_{ss} = 0.25$  проанализируем в приближении метода медленно меняющихся амплитуд (ММА). Метод широко используется в непрерывном времени. На ДВ-осцилляторы вида (1) он распространяется в статье [3].

Генерируемые осциллятором автоколебания представим в виде

$$y[n] = \frac{1}{2} A[n] Z^n + \frac{1}{2} A^*[n] Z^{-n} = \frac{1}{2} A[n] Z^n + \text{к.с.}, \tag{3}$$

где  $Z = \exp(j2\pi \Omega_{ss})$ ,  $A[n]$  – комплексная амплитуда – медленная функция дискретного времени, связанная с действительными амплитудой  $a[n]$  и фазой  $\phi[n]$  соотношением  $A[n] = a[n] \exp(j\phi[n])$ .

Нелинейная функция (2) с аргументом (3) разлагается в ряд Фурье

$$G(y[n]) = \frac{1}{2} G_1(A) Z^n + \frac{1}{2} G_3(A) Z^{3n} + \text{к.с.}$$

с комплексными амплитудами гармоник

$$G_1(A) = \left(1 - \frac{1}{4} |A|^2\right) A, \quad G_3(A) = -\frac{1}{12} A^3. \tag{4}$$

Считая условием медленности приближенное выполнение равенств

$$A[n - 1] - A[n - 2] = A[n] - A[n - 1],$$

для комплексной амплитуды автоколебаний (1) удается получить укороченное уравнение

$$A[n] = A[n - 1] - \frac{\pi \Omega_{ss}}{Q} (1 - j\eta) A[n - 1] + \frac{\gamma}{2} \left( G_1(A[n - 1]) + G_3(A^*[n - 1]) \right), \tag{5}$$

где  $\eta = 2Q(\Omega_0 - \Omega_{ss}) / \Omega_{ss}$  – обобщенная расстройка частот. Следует особо отметить, что при выводе (5) учитывается равенство  $Z^{-3n} = Z^n$ , отражающее эффект подмены частот и обеспечивающее появление слагаемого  $G_3(A^*)$  в укороченном уравнении.

На рис. 3 результат решения уравнения (5) для действительной амплитуды при квазистатическом возрастании частоты  $\Omega_0$  представлен непрерывной линией; пунктирная показывает результат выделения огибающей осцилляций в отображении (1) с параметрами  $Q = 20$ ,  $\gamma = 0.2$ .

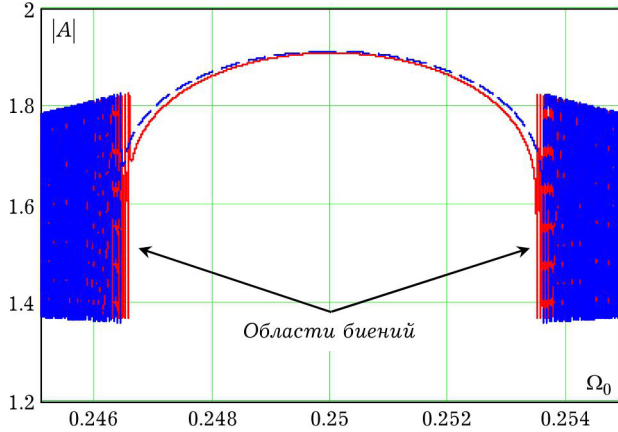


Рис. 3. Амплитудная характеристика захваченных автоколебаний

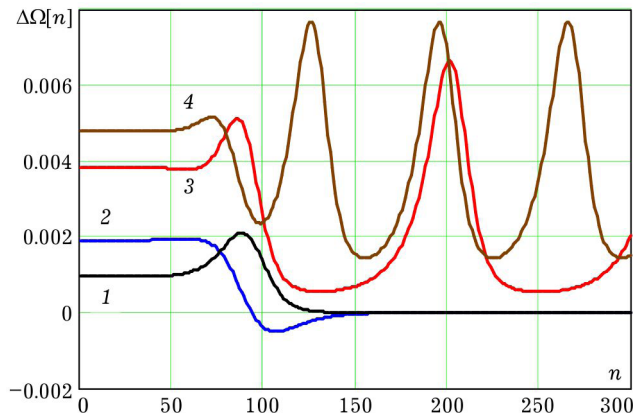


Рис. 4. Динамика поправки на частоту автоколебаний

Близость графиков является аргументом в пользу применимости метода ММА.

Рис. 4 иллюстрирует изменение мгновенной частоты автоколебаний в переходном процессе. На нем линиями 1–4 изображены графики временных зависимостей поправки на частоту

$$\Delta\Omega[n] = \frac{\varphi[n] - \varphi[n-1]}{2\pi}$$

для значений  $\Omega_0 = 0.251; 0.252; 0.254$  и  $0.255$ . При этом мгновенная частота автоколебаний равна  $\Omega_a[n] = \Omega_{ss} + \Delta\Omega[n]$ .

Зависимости 1 и 2, для которых с течением времени  $\Delta\Omega[n] \rightarrow 0$ , имеют место в режиме самозахвата частоты, в то время как стремящиеся к периодическим зависимости 3 и 4 наблюдаются в области биений.

Комплексному уравнению (5) соответствует система из двух действительных уравнений для амплитуды  $a[n]$  и фазы  $\varphi[n]$  (с учетом (4)):

$$a[n] = a[n-1] - \frac{\pi\Omega_{ss}}{Q} a[n-1] + \frac{\gamma}{2} \left( G_1(a[n-1]) - \frac{1}{12} a^3[n-1] \cos(4\varphi[n-1]) \right),$$

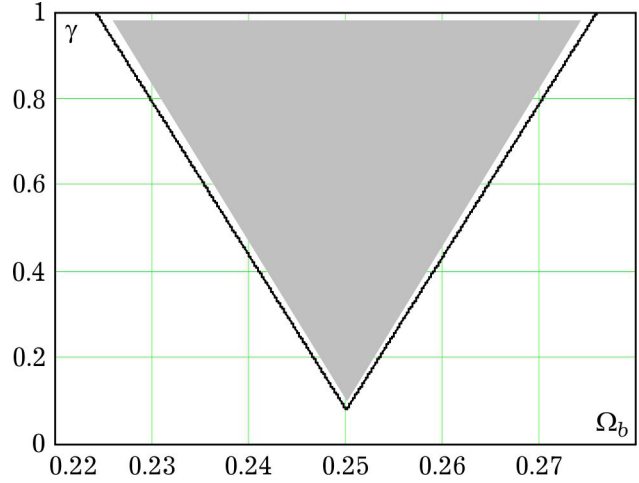


Рис. 5. Язык Арнольда для значений  $Q = 20$ ,  $\gamma = 0.2$  и  $\Omega_{ss} = 0.25$

$$\varphi[n] = \varphi[n-1] + \eta \frac{\pi\Omega_{ss}}{Q} \frac{a[n-1]}{a[n]} + \frac{\gamma}{24} \frac{a^3[n-1]}{a[n]} \sin(4\varphi[n-1]).$$

Ее удобно использовать для расчета значений амплитуды  $a_0$  и фазы  $\varphi_0$  захваченных автоколебаний. В частности, из второго уравнения системы следует соотношение для фазы

$$\sin(4\varphi_0) = -24\eta \frac{\pi\Omega_{ss}}{\gamma Q a_0^2}.$$

Устойчивым автоколебаниям соответствуют интервалы значений  $-3\pi/8 + \pi m/2 < \varphi_0 < -\pi/8 + \pi m/2$ , где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . При этом  $\cos(4\varphi_0) < 0$ .

Амплитуда  $a_0$  определяется из нелинейного алгебраического уравнения

$$-\frac{\pi\Omega_{ss}}{Q} + \frac{\gamma}{2a_0} G_1(a_0) + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{24} a_0^2\right)^2 - \left(\eta \frac{\pi\Omega_{ss}}{Q}\right)^2} = 0,$$

которое имеет устойчивое решение

$$a_0 = \frac{3}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{2\pi\Omega_{ss}}{\gamma Q} + \frac{1}{3} \sqrt{\left(1 - \frac{2\pi\Omega_{ss}}{\gamma Q}\right)^2 - 32 \left(\frac{\pi\eta}{\gamma Q}\right)^2}}. \quad (6)$$

Расчет по формуле (6) дает график зависимости  $a_0(\eta)$ , совпадающий с графиком амплитудной характеристики захваченных автоколебаний на рис. 3 (непрерывная линия;  $Q = 20$ ,  $\gamma = 0.2$ ).

Условие неотрицательности второго подкоренного выражения в формуле (6) позволяет определить границы  $\pm\eta_b$  области самозахвата:

$$\eta_b = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \frac{\gamma Q}{2\pi\Omega_{ss}} - 1 \right). \quad (7)$$

Область самозахвата (язык Арнольда) выделена на рис. 5 темным цветом.

Следует отметить, что полученные аналитические результаты справедливы в условиях применимости метода ММА. При значительных превышениях порога генерации (при  $\gamma \sim 1$ ) эти условия нарушаются и, следовательно, зависимости (6) и (7) имеют лишь качественный характер.

### Заключение

Рассмотренный здесь эффект самосинхронизации ДВ-автогенератора является спецификой нелинейной динамики в дискретном времени и не наблюдается во времени непрерывном. Дело в том, что в нелинейной ДВ-системе всегда присутствует сигнал тактовой частоты. Привязка частоты автоколебаний к субгармоникам тактовой частоты реализуется через механизм взаимодействия основной и подменных гармоник автоколебаний. Это же взаимодействие при высоких уровнях возбуждения в неизохронных системах может приводить к хаотизации ДВ-автоколебаний [4].

Заметим также, что проведенный анализ полностью согласуется с выводами качественной теории динамических систем. Действительно, в режиме самозахвата предельный цикл дискретного отображения (1) представляет собой совокупность неподвижных точек с рациональным числом вращения  $\Omega_{ss}$ . По теореме о струк-

турно устойчивых диффеоморфизмах окружности (см., например, [5]) такой предельный цикл устойчив по отношению к малым вариациям параметров отображения, в частности к вариациям частоты  $\Omega_0$ . Зависимость  $\Omega_{ss} = f(\Omega_0)$  имеет вид так называемой чертовой лестницы. При этом горизонтальная часть графика на рис. 1 отображает одну ступеньку лестницы.

### Список литературы

1. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера, 2006. 856 с.
2. Пиковский А., Розенблюм М., Крутс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
3. Зайцев В.В. О дискретных отображениях осциллятора Ван дер Поля // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2014. Т. 17. № 1. С. 35–40.
4. Зайцев В.В., Зайцев О.В., Яровой Г.П. Статистические оценки хаотических автоколебаний дискретного осциллятора Ван дер Поля // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2001. Т. 4. № 1. С. 18–21.
5. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
6. Зайцев В.В., Зайцев О.В., Никулин А.В. Исследование эффекта самосинхронизации дискретного осциллятора Ван дер Поля методом усреднения // Физика и технические приложения волновых процессов: сб. трудов 2-й международной научно-технической конференции. Самара: Изд. СамГУ, 2003. С. 114–115.

---

## Self-synchronization of Thomson self-oscillatory systems in discrete time

*V.V. Zaitsev, O.V. Zaitsev, I.V. Stulov*

The effect arising in discrete time at interaction of self-oscillations with higher harmonics of the main frequency is described. It is shown that it is similar to effect of capture of the frequency (synchronization) of self-oscillations by an external harmonic signal. As the discrete oscillator formally is autonomous system, the effect is classified as self-capture of frequency or self-synchronization. Self-capture is analysed by method of slow-changing amplitudes. It is specified that via the mechanism of self-synchronization the binding of frequency of discrete self-oscillations to sampling frequency is carried out.

*Keywords:* nonlinear dynamics, self-oscillatory system, synchronization, capture of frequency, discrete time.

---