

Разностная модель дробного осциллятора Ван дер Поля

В.В. Зайцев, Ар.В. Карлов, А.Н. Шилин, Э.Ю. Федюнин

Самарский университет
443086, Российская Федерация, г. Самара
Московское шоссе, 34

Предложен алгоритм численного моделирования автоколебательной системы, определяемой уравнением движения с производной дробного порядка – дробного осциллятора Ван дер Поля. Для дискретизации времени в уравнении движения использован метод инвариантности импульсных характеристик линейных резонаторов в сочетании с формулами дробных дифференциальных преобразований дискретных гармонических функций. Приведен пример моделирования процесса установления автоколебаний в дробном осцилляторе. Обсуждается трансформация конечно-разностного вычислительного алгоритма в объект нелинейной динамики в дискретном времени. Приведены спектрально-корреляционные характеристики хаотических автоколебаний дробного осциллятора Ван дер Поля в дискретном времени.

Ключевые слова: дробное дифференцирование, уравнение Ван дер Поля, численное моделирование, дискретное время, нелинейная динамика.

1. В теории нелинейных колебаний осциллятор Ван дер Поля (ВдП) как универсальная модель [1] множества автоколебательных систем различной физической природы занимает одно из центральных мест. При этом под осциллятором ВдП подразумевается в первую очередь дифференциальное уравнение второго порядка с неполной кубической нелинейностью при первой производной. С учетом возросшего в последнее время интереса к исследованиям интегродифференциальных моделей дробного порядка имеет смысл обобщение уравнения ВдП путем введения в него операции дробного дифференцирования. Такие обобщения проведены, например, в работах [3–6], где приближенными аналитическими методами исследованы различные аспекты динамики введенных в рассмотрение осцилляторов. В настоящей статье для моделирования дробного осциллятора ВдП применен численный метод, предложенный для автоколебательных систем томсоновского типа в работе [7].

2. В качестве дифференциальной модели осциллятора примем уравнение

$$D_t^2 x(t) + \omega_0 Q^{-1} D_t^1 x(t) + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^{2-\alpha} \gamma (1 - x^2(t)) D_t^\alpha (x(t)), \quad (1)$$

где ω_0 и Q – собственная частота и добротность резонансного контура; γ – безразмерный параметр глубины положительной обратной связи.

В записи уравнения (1) использованы обозначения D_t^1 и D_t^2 для классических первой и второй производных и D_t^α для левосторонней производной Лиувилля порядка $0 < \alpha \leq 1$, определяемой как

$$D_t^\alpha (x(t)) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t \frac{x(t')}{(t-t')^\alpha} dt', \quad (2)$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

Отметим, что при $\alpha = 1$ уравнение (1) переходит в классическое уравнение движения осциллятора ВдП, в котором выделена диссипативная составляющая (второе слагаемое в левой части).

Предполагая в дальнейшем переход к дискретному времени на равномерной сетке с интервалом дискретизации Δ , уравнение (1) запишем для безразмерной временной переменной $\tau = t\Delta^{-1}$ как

$$D_\tau^2 x(\tau) + 2\pi\Omega_0 Q^{-1} D_\tau^1 x(\tau) + 4\pi^2 \Omega_0^2 x(\tau) = (2\pi\Omega_0)^{2-\alpha} \gamma (1 - x^2(\tau)) y(\tau), \quad (3)$$

где $y(\tau) = D_\tau^\alpha (x(\tau))$, $\Omega_0 = \omega_0 / \omega_d = \Delta / T_0$ – собственная частота контура, нормированная на частоту дискретизации $\omega_d = 2\pi / \Delta$.

В работах [7; 8] для уравнения вида

$$D_\tau^2 x(\tau) + 2\pi\Omega_0 Q^{-1} D_\tau^1 x(\tau) + 4\pi^2 \Omega_0^2 x(\tau) = (2\pi\Omega_0)^2 F(x(\tau), y(\tau)) \quad (4)$$

была предложена конечно-разностная аппроксимация

$$\begin{aligned} x_n - 2\delta \cos(2\pi\Omega_0) x_{n-1} + \delta^2 x_{n-2} = \\ = 2\pi\Omega_0 \delta \sin(2\pi\Omega_0) F(x_{n-1}, y_{n-1}), \end{aligned} \quad (5)$$

где $x_n = x(\tau_n)$ и $y_n = y(\tau_n)$ – приближенные значения осцилляций на временной сетке $\tau_n = 0, 1, 2, \dots$. При этом какой-либо конкретный вид связи между x и y не предполагался. Добротность резонатора Q в исходном дифференциальном уравнении (4) определяет параметр диссипации $0 < \delta < 1$ в разностном уравнении (5)

$$\delta = \exp\left(-\pi \frac{\Omega_0}{Q}\right).$$

Уравнение (3) приводится к форме (4) с помощью функции

$$F(x(\tau), y(\tau)) = \frac{\gamma}{(2\pi\Omega_0)^\alpha} (1 - x^2(\tau)) y(\tau),$$

$$y(\tau) = D_\tau^\alpha(x(\tau)).$$

Тогда в соответствии с (5) разностная аппроксимация уравнения движения дробного осциллятора ВдП принимает вид

$$\begin{aligned} x_n - 2\delta \cos(2\pi\Omega_0) x_{n-1} + \delta^2 x_{n-2} = \\ = (2\pi\Omega_0)^{1-\alpha} \gamma \delta \sin(2\pi\Omega_0) (1 - x_{n-1}^2) y_{n-1}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $y_{n-1} = D_\tau^\alpha(x(\tau))\Big|_{n-1}$. Конечно-разностная аппроксимация этой производной дает многошаговый алгоритм моделирования автоколебаний в дробном осцилляторе ВдП.

3. Не прибегая к стандартной аппроксимации, воспользуемся точной для гармонических и приближенной для квазигармонических колебаний связью между $x(\tau)$ и $y(\tau)$. Ее нетрудно установить следующим образом.

Производную (2) можно определить соотношением

$$D_\tau^\alpha(x(\tau)) = \frac{d}{d\tau} I_L^{1-\alpha}(x(\tau))$$

через левосторонний интеграл Лиувилля

$$I_L^\beta(x(\tau)) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{x(\tau')}{(\tau - \tau')^{1-\beta}} d\tau'.$$

Учитывая, что (см. таблицы интегралов Лиувилля в [9])

$$I_L^\beta(\cos(2\pi\Omega_0\tau)) = \frac{1}{(2\pi\Omega_0)^\beta} \cos\left(2\pi\Omega_0\tau - \beta \frac{\pi}{2}\right),$$

при $x(\tau) = A \cos(2\pi\Omega_0\tau)$ имеем

$$\begin{aligned} y(\tau) = (2\pi\Omega_0)^\alpha (\cos(\theta) A \cos(2\pi\Omega_0\tau) - \\ - \sin(\theta) A \sin(2\pi\Omega_0\tau)), \end{aligned}$$

где обозначено $\theta = \alpha\pi/2$. На основании этого выражения можно записать:

$$\begin{aligned} y_n = \frac{(2\pi\Omega_0)^\alpha}{\sin(2\pi\Omega_0)} (\cos(\theta) \sin(2\pi\Omega_0) x_n + \\ + \sin(\theta) (\cos(2\pi\Omega_0) x_n - x_{n-1})). \end{aligned} \quad (7)$$

Равенство (7) является точным для гармонических колебаний. Примем его в качестве приближенного для автоколебаний в автогенераторах томсоновского типа. С учетом этого приближения разностное уравнение (6) принимает вид

$$\begin{aligned} x_n - 2\delta \cos(2\pi\Omega_0) x_{n-1} + \delta^2 x_{n-2} = \\ = 2\pi\Omega_0 \gamma \delta (1 - x_{n-1}^2) \times \\ \times (\sin(\theta) (\cos(2\pi\Omega_0) x_{n-1} - x_{n-2}) + \\ + \cos(\theta) \sin(2\pi\Omega_0) x_{n-1}), \end{aligned} \quad (8)$$

Отметим, что разностная аппроксимация (8) дробного уравнения ВдП (1), строго говоря, не предназначена для приближенного решения задачи Коши для этого уравнения. Рекурсивный алгоритм (8) позволяет генерировать в дискретном времени автоколебания со свойствами процессов, происходящих в осцилляторе (1) в непрерывном времени. Начальные условия x_0 и x_1 для запуска процесса генерации могут аппроксимировать начальные условия для уравнения (1) либо выбираться из физических соображений. Такой подход при моделировании автоколебательных систем допустим, т. к. зависимость автоколебаний от начальных условий имеет место лишь на стартовом, не представляющем практического интереса этапе процесса генерации.

4. Один из выводов, который можно сделать уже по общему виду разностной модели (8), состоит в том, что динамика дробного осциллятора ВдП должна быть сходна с динамикой осциллятора ВдП с запаздыванием (ВдП-З). Последний имеет уравнение движения

$$\begin{aligned} D_\tau^2 x(\tau) + 2\pi\Omega_0 Q^{-1} D_\tau^1 x(\tau) + 4\pi^2 \Omega_0^2 x(\tau) = \\ = 2\pi\Omega_0 \gamma (1 - x^2(\tau)) D_\tau^1 x(\tau - \Delta_\tau), \end{aligned}$$

где Δ_τ – нормированное время запаздывания (с ним связан угол запаздывания $\theta_\Delta = 2\pi\Omega_0 \Delta_\tau = \omega_0 \Delta_d$). Для этого уравнения разностная аппроксимация (5) принимает вид

$$\begin{aligned} x_n - 2\delta \cos(2\pi\Omega_0) x_{n-1} + \delta^2 x_{n-2} = \\ = 2\pi\Omega_0 \gamma \delta (1 - x_{n-1}^2) \times \\ \times (\cos(\theta_\Delta) (\cos(2\pi\Omega_0) x_{n-1} - x_{n-2}) + \end{aligned} \quad (9)$$

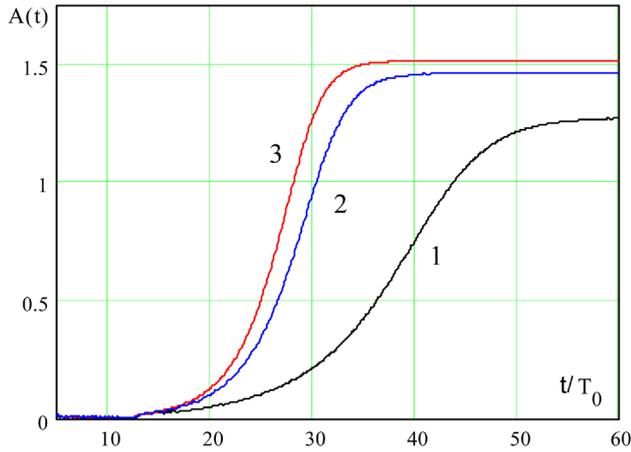


Рис. 1. Динамика амплитуды автоколебаний

$$+ \sin(\theta_\Delta) \sin(2\pi\Omega_0) x_{n-1}.$$

Из сопоставления разностных моделей (8) и (9) следует, что динамика дробного осциллятора ВдП при выполнении условия

$$\frac{\pi}{2}(1 - \alpha) = \omega_0 \Delta_d$$

идентична динамике осциллятора ВдП-З (в квазигармоническом приближении). Этот вывод совпадает со сделанным ранее в работе [3].

5. Приведем ряд результатов, полученных для дробного ВдП с помощью модели (8).

Процесс установления амплитуды $A(t)$ автоколебаний иллюстрирует рис. 1. Графики под номерами 1 и 2 соответствуют осцилляторам с дробными порядками $\alpha = 1/2$ и $\alpha = 3/4$, график под номером 3 – классическому осциллятору ВдП с $\alpha = 1$. Добротности и величины параметров обратной связи у всех осцилляторов одинаковы: $Q = 15$ и $\gamma = 0.16$. Шаг дискретизации Δ составляет десятую часть периода собственных колебаний контура: $\Delta / T_0 = 0.1$. Такому шагу соответствует значение $\Omega_0 = 0.1$. Графики подтверждают вывод работы [3] о том, что дробность обратной связи ухудшает энергетические характеристики автогенератора.

На рис. 2 пунктиром показан амплитудный спектр, а на рис. 3 линией 1 – предельный цикл установившихся автоколебаний осциллятора дробностью $\alpha = 1/2$, уровнем возбуждения $\gamma = 0.32$ (порог самовозбуждения $\gamma = 0.094$). Представленные характеристики указывают на то, что исходное предположение о квазигармоничности автоколебаний подтверждается.

6. С ростом глубины обратной связи увеличиваются амплитуды гармоник основного сигнала,

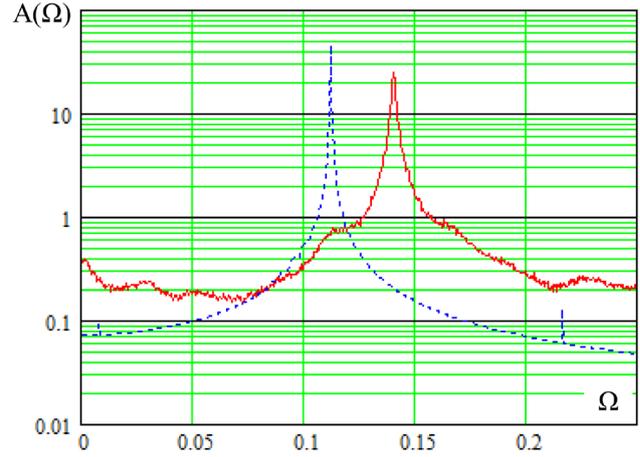


Рис. 2. Амплитудные спектры автоколебаний

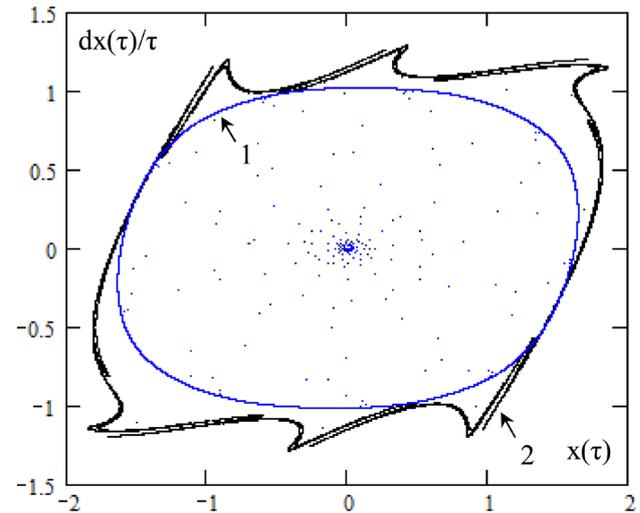


Рис. 3. Аттракторы автоколебаний

генерируемых нелинейностью системы. Этим нарушается предположение о квазигармоничности автоколебаний, лежащее в основе преобразования (7), использованного при построении разностной модели (8). Таким образом, модель (8) перестает адекватно отражать процессы в дробном осцилляторе ВдП (1), но ее предлагается использовать как самостоятельный объект нелинейной динамики в дискретном времени.

На рис. 2 сплошной линией показан усредненный амплитудный спектр автоколебаний в осцилляторе (8) с параметрами $\Omega_0 = 0.1$, $Q = 15$, $\gamma = 0.67$ и $\theta = \pi/4$. Уширенная спектральная линия со сплошным амплитудно-частотным пьедесталом является одним из эвристических признаков [10] хаотизации автоколебаний. Множество 2 на рис. 3 отображает хаотический аттрактор автоколебаний.

Механизмом возникновения динамического хаоса в рассматриваемом режиме является автомодуляция огибающей и мгновенной частоты

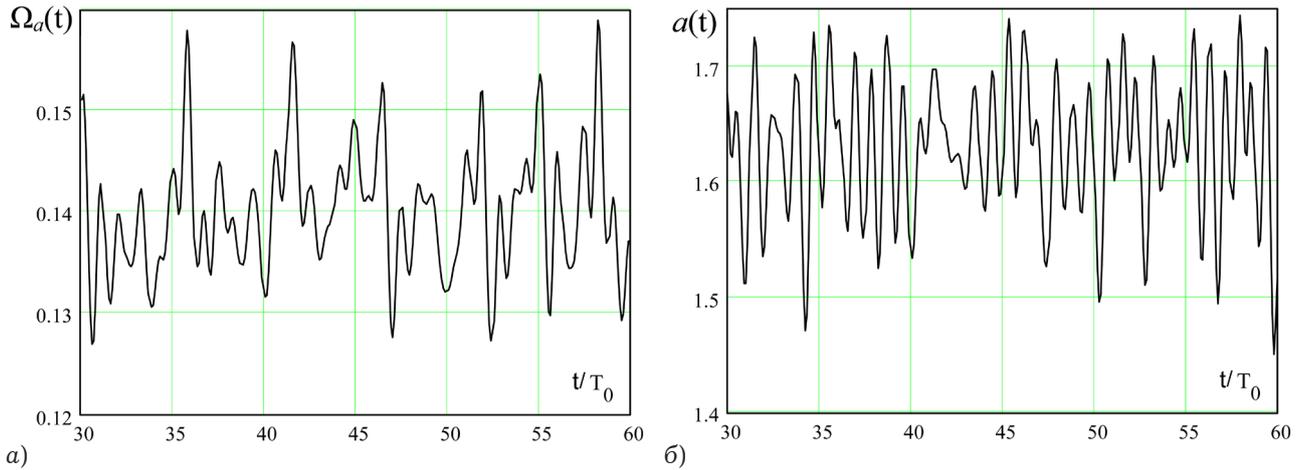


Рис. 4. Хаотическая автомодуляция частоты (а) и амплитуды (б)

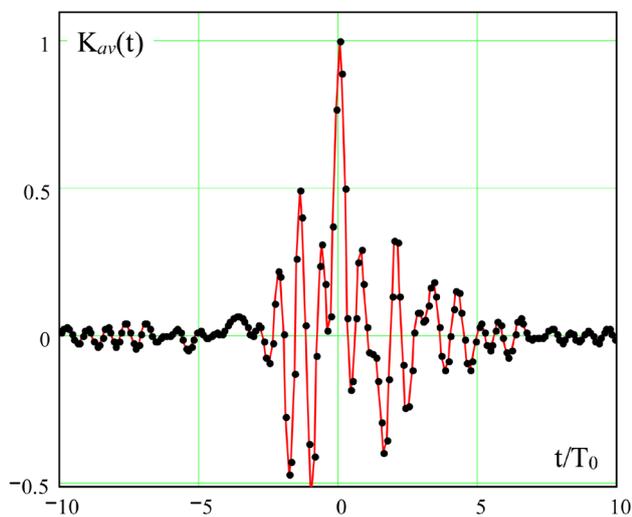


Рис. 5. Совместная функция корреляции амплитуды и частоты автоколебаний

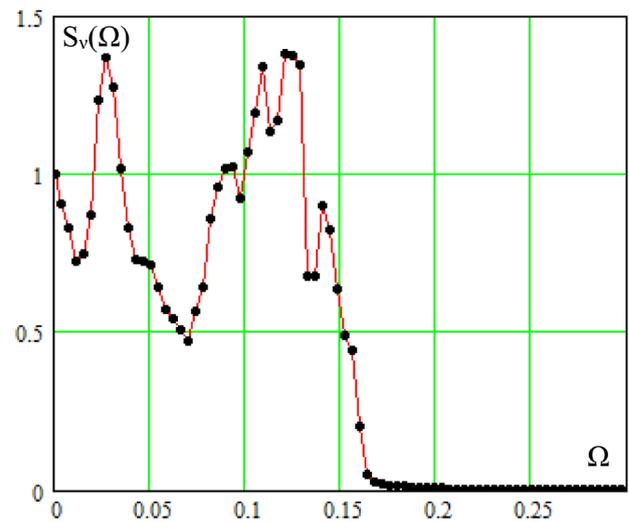


Рис. 6. Спектральная плотность мощности флуктуаций частоты автоколебаний

автоколебаний, что подтверждается спектрально-корреляционным анализом этих процессов. На рис. 4, а показан типичный фрагмент временной зависимости мгновенной частоты автоколебаний $\Omega_a(t)$, а на рис. 4, б – соответствующий ему фрагмент временной зависимости отклонения $a(t)$ огибающей от среднего по времени значения $\overline{A(t)}$: $a(t) = A(t) - \overline{A(t)}$. При этом огибающая и фаза хаотических автоколебаний выделялись в полосе частот $0 \leq \Omega \leq 0.3$ методом аналитического сигнала. Огибающая и частота – коррелированные хаотические процессы, что следует из графика совместной корреляционной функции (рис. 5)

$$K_{av}(\tau) = \overline{a(t)v(t+\tau)} / \overline{a(t)v(t)},$$

где $v(t) = \Omega_a(t) - \overline{\Omega_a(t)}$ – отклонения частоты автоколебаний от среднего значения $\overline{\Omega_a(t)} = 0.141$. Коэффициент корреляции для представленных реализаций $\rho_{av} = 0.55$.

Спектр мощности $S_v(\Omega)$ отклонений $v(t)$ приведен на рис. 6. Ненулевое значение $S_v(0)$ при широкой полосе хаотических «флуктуаций» частоты в соответствии с классической теорией формы спектральной линии указывает на наличие ее уширения, что непосредственно наблюдается по спектру автоколебаний.

7. Таким образом, предложенный здесь способ (7) дискретизации дробной производной квазигармонических функций позволил сформировать простую дискретную модель (8) дробного (фрактального) осциллятора Ван дер Поля в форме рекурсивного двухточечного алгоритма. Расширение пределов применимости алгоритма на дискретные колебания произвольной формы вводит в рассмотрение новый объект нелинейной динамики в дискретном времени. Спроектированная таким способом дискретная автоколебательная система демонстрирует как регулярную, так и хаотическую динамику.

Список литературы

1. Феномен уравнения Ван дер Поля / А.П. Кузнецов [и др.] // Изв. вузов. Сер.: Прикладная нелинейная динамика. 2014. № 4. С. 3–42.
2. Тарасов В.Е. Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка. М.; Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2011. 568 с.
3. Зайцев В.В., Карлов Ар.В., Яровой Г.П. Динамика автоколебаний дробного томсоновского осциллятора // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2012. Т. 15. № 1. С. 64–68.
4. Shen Y.J., Wei P., Yang S.P. Primary resonance of fractional-order van der Pol oscillator // Nonlinear Dynamics. 2014. V. 77. № 4, P. 1629–1642.
5. Liu Q.X., Liu J.K., Chen Y.M. Initial conditions-independent limit cycles of a fractional-order van der Pol oscillator // Journal of Vibration and Control. 2015 July 15. 0: 1077546315588031v1.
6. Зайцев В.В., Карлов Ар.В. Динамика автогенераторов с дробными связями // Радиотехника. 2015. № 4. С. 38–43.
7. Зайцев В.В., Карлов А.В., Шилин А.Н., Федюнин Э.Ю. О дискретных моделях колебательных систем // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2015. Т. 18. № 1. С. 38–43.
8. Зайцев В.В., Карлов А.В., Карлов Ар.В. О численном моделировании томсоновских автоколебательных систем // Вестник Самарского государственного университета. 2015. № 6(128). С. 141–150.
9. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
10. Многоликий хаос / Е.Ф. Мищенко [и др.]. М.: Физматлит, 2013. 432 с.
11. Малахов А.Н. Флуктуации в автоколебательных системах. М.: Наука, 1968. 660 с.

Finite-difference model of the fractional oscillator of Van der Pol

V.V. Zaitsev, Ar.V. Karlov, A.N. Shilin, E.Yu. Fedyunin

The algorithm of numerical modeling of self-oscillating system, defined by the equation of motion with fractional order derivative is offered. To discretize in time the equation of motion method is used the invariance of impulse response of linear resonators in combination with the formulas of the fractional differential transforms of discrete harmonic functions. The example of modeling of process of establishing self-oscillations in the fractional oscillator is given. Discusses the transformation of the finite-difference computational algorithm in the object of nonlinear dynamics in discrete time. Are provided spectral and correlation characteristics of chaotic self-oscillations of the fractional oscillator of Van der Pol in discrete time.

Keywords: fractional differentiation, van der Pol equation, numerical modeling, discrete time nonlinear dynamics.
