

Метод продольных сечений для расчета собственных волн экранированных волноводов со сложным профилем поперечного сечения

Р.В. Бударрагин

Заволжский филиал Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева
606520, Российская Федерация, Нижегородская обл., г. Заволжье
ул. Павловского, 1а

Предложен метод, который может быть использован для расчета собственных волн экранированных волноводов с произвольным законом изменения параметров волновода от поперечной координаты. Получена однородная система линейных алгебраических уравнений, к которой сводится решение рассматриваемой задачи. Проведена апробация метода на примере частично заполненных экранированных волноводов.

Ключевые слова: собственные волны, ортогональный базис, экранированный волновод, диэлектрическая неоднородность.

Введение

Для волноводов с однородным или частичным диэлектрическим заполнением, вписываемым в ортогональную систему координат, полный спектр собственных волн определен и достаточно хорошо изучен [1–4]. Наибольшее распространение при решении задач такого типа получил метод частичных областей с ортогональностью собственных функций, образующих базис, по которому раскладываются компоненты электромагнитного поля собственных волн рассматриваемых волноводов. Но иногда не удается сформулировать в каждой частичной области краевую задачу Штурма – Лиувилля, а следовательно, невозможно определить базис собственных функций. Использование же в методе частичных областей представления полей в форме непрерывного спектра [5; 6] значительно осложняет задачу.

Для неоднородных волноводов со сложным, в общем случае плавным и многосвязным, профилем диэлектрического заполнения нахождение собственных волн является задачей еще более сложной. Подход, основанный на методе Галеркина [7], на практике легко реализуется в случае, если форма ограничивающей поверхности соответствует какой-либо канонической системе координат.

В предлагаемой статье в качестве базиса для собственных волн неоднородного по поперечно-

му сечению волновода используются поля собственных волн планарных диэлектрических волноводов, подробно исследованных в [2].

Метод не накладывает ограничений на закон изменения геометрических и диэлектрических параметров исследуемой структуры, а следовательно, его можно использовать для расчета как ступенчатой нерегулярности, так и плавных изменений профиля поперечного сечения волновода путем аппроксимации ступенчатой структурой.

Метод приводит к однородной СЛАУ, порядок которой определяется количеством учитываемых в разложениях собственных волн, а также количеством отдельных неоднородностей, которыми аппроксимируется рассматриваемое сложное сечение.

1. Определение базиса

Сложное, в общем случае многосвязное сечение рассматриваемого неоднородного волновода (рис. 1) разобьем на области, продольные по координате z . Каждая выделенная область (рис. 2), бесконечная по координате x и z , представляет собой плоскостойкий металлодиэлектрический волновод, собственными волнами которого являются ТЕ- и ТН-волны.

Введем систему координат $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ так, как показано на рис. 3. Рассмотрим произвольную волну, распространяющуюся вдоль

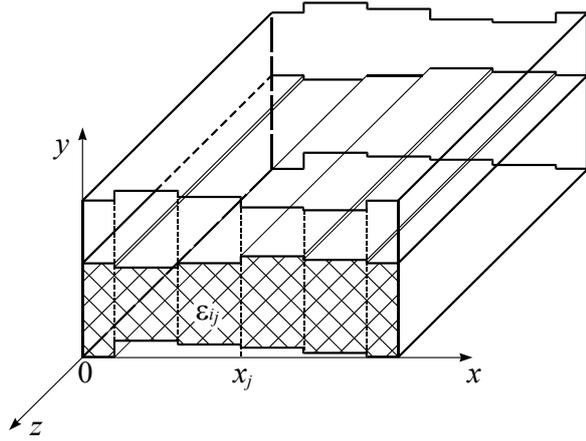


Рис. 1. Экранированных волноводов со сложным профилем поперечного сечения

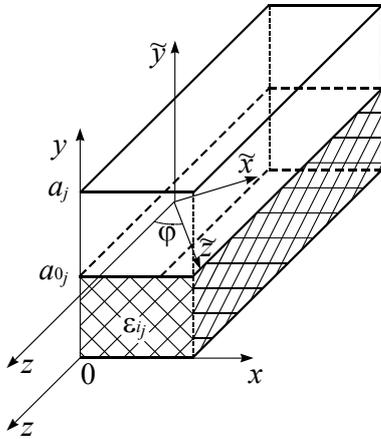


Рис. 2. Бесконечный плоскостойкий металлодиэлектрический волновод

оси \tilde{z} с продольным волновым числом $\tilde{\beta}$. Для ТЕ-волны, согласно [2], в каждой выделенной области j введем векторный потенциал

$$\mathbf{F}_{\tilde{y}} = \left(\sum_{i=0}^{I-1} f_i \cos \kappa'_{y_i} \tilde{y} + f'_i \sin \kappa'_{y_i} \tilde{y} \right) e^{-i\tilde{\beta}\tilde{z}}. \quad \text{Для вол-}$$

новых чисел κ'_{y_i} и $\tilde{\beta}$ выполняется соотношение $k_0^2 \tilde{\epsilon}_{ij} = \kappa'_{y_i}{}^2 + \tilde{\beta}^2$, где $i = 0, 1, \dots, I-1$ – номер слоя плоскостойкого волновода j ; I – количество слоев в плоскостойком волноводе; $\tilde{\epsilon}_{ij}$ – относительная диэлектрическая проницаемость i -го слоя j -й частичной области ($\epsilon_{ij} = \tilde{\epsilon}_{ij}\epsilon_0$, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м). Поле ТЕ-волны имеет три компоненты $E_{\tilde{x}}$, $H_{\tilde{y}}$, $H_{\tilde{z}}$.

Выберем систему координат (x, y, z) так, как показано на рис. 2. Пусть угол φ – угол между направлениями осей z и \tilde{z} . Обозначим через $\beta = \tilde{\beta} \cos \varphi$, $\kappa'_x = \tilde{\beta} \sin \varphi$. Волновые числа в рассматриваемых системах координат связаны соотношениями: $\tilde{\beta}^2 = \beta^2 + \kappa'_x{}^2$, $\kappa'_y = \kappa'_{\tilde{y}}$. Компоненты поля ТЕ-волны в системе координат (x, y, z) запишутся:

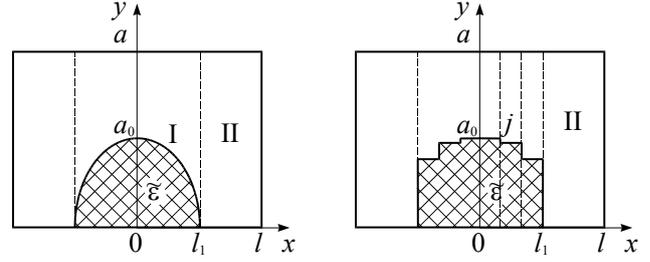


Рис. 3. Поперечное сечение экранированного эллиптического диэлектрического волновода и его ступенчатая аппроксимация

$$E_x = E_{\tilde{x}} \cos \varphi = -i\beta \times$$

$$\times \left(\sum_{i=0}^{I-1} f_i \cos \kappa'_{y_i} y + f'_i \sin \kappa'_{y_i} y \right) e^{-i\kappa'_x x} e^{-i\beta z},$$

$$E_z = -E_{\tilde{x}} \sin \varphi = i\kappa'_x \times$$

$$\times \left(\sum_{i=0}^{I-1} f_i \cos \kappa'_{y_i} y + f'_i \sin \kappa'_{y_i} y \right) e^{-i\kappa'_x x} e^{-i\beta z},$$

$$H_x = H_{\tilde{z}} \sin \varphi =$$

$$= \frac{\kappa'_x}{\omega\mu} \left(\sum_{i=0}^{I-1} \kappa'_{y_i} f_i \sin \kappa'_{y_i} y - \kappa'_{y_i} f'_i \cos \kappa'_{y_i} y \right) \times \quad (1)$$

$$\times e^{-i\kappa'_x x} e^{-i\beta z},$$

$$H_y = H_{\tilde{y}} = -i \frac{(\beta^2 + \kappa'_x{}^2)}{\omega\mu} \times$$

$$\times \left(\sum_{i=0}^{I-1} f_i \cos \kappa'_{y_i} y + f'_i \sin \kappa'_{y_i} y \right) e^{-i\kappa'_x x} e^{-i\beta z},$$

$$H_x = H_{\tilde{z}} \cos \varphi =$$

$$= \frac{\beta}{\omega\mu} \left(\sum_{i=0}^{I-1} \kappa'_{y_i} f_i \sin \kappa'_{y_i} y - \kappa'_{y_i} f'_i \cos \kappa'_{y_i} y \right) \times$$

$$\times e^{-i\kappa'_x x} e^{-i\beta z},$$

$$E_y = 0.$$

Так как в системе координат (x, y, z) волна имеет три компоненты магнитного поля и две компоненты электрического поля, то, согласно [2], такие волны можно классифицировать как продольно-электрические, или ЛЕ-волны, для которых справедливо следующее соотношение

$$k_0^2 \tilde{\epsilon}_{ij} = \kappa'_x{}^2 + \kappa'_{y_i}{}^2 + \beta^2. \quad (2)$$

Аналогично для ТН-волны, введя векторный потенциал

$$\mathbf{A}_{\tilde{y}} = \left(\sum_{i=0}^{I-1} a_i \cos \kappa_{y_i} \tilde{y} + a'_i \sin \kappa_{y_i} \tilde{y} \right) e^{-i\tilde{\beta}\tilde{z}},$$

в системе координат (x, y, z) получим:

$$E_x = E_{\tilde{z}} \sin \varphi = \frac{\kappa'_x}{\omega\epsilon_0} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\sum_{i=0}^{I-1} \kappa_{y_i} \frac{a_i}{\tilde{\epsilon}_{ij}} \sin \kappa_{y_i} y - \kappa_{y_i} \frac{a'_i}{\tilde{\epsilon}_{ij}} \cos \kappa_{y_i} y \right) \times \\
& \times e^{-i\kappa_x x} e^{-i\beta z}, \\
E_y = E_{\tilde{y}} = i \frac{(\beta^2 + \kappa_x^2)}{\omega \epsilon_0} \times \\
& \times \left(\sum_{i=0}^{I-1} \frac{a_i}{\tilde{\epsilon}_{ij}} \cos \kappa_{y_i} y + \frac{a'_i}{\tilde{\epsilon}_{ij}} \sin \kappa_{y_i} y \right) e^{-i\kappa_x x} e^{-i\beta z}, \\
E_z = E_{\tilde{z}} \cos \varphi = \frac{\beta}{\omega \epsilon_0} \times \\
& \times \left(\sum_{i=0}^{I-1} \kappa_{y_i} \frac{a_i}{\tilde{\epsilon}_{ij}} \sin \kappa_{y_i} y - \kappa_{y_i} \frac{a'_i}{\tilde{\epsilon}_{ij}} \cos \kappa_{y_i} y \right) \times \\
& \times e^{-i\kappa_x x} e^{-i\beta z}, \\
H_x = H_{\tilde{x}} \cos \varphi = \\
& = \beta \left(\sum_{i=0}^{I-1} a_i \cos \kappa_{y_i} y + a'_i \sin \kappa_{y_i} y \right) e^{-i\kappa_x x} e^{-i\beta z}, \\
H_x = -H_{\tilde{x}} \sin \varphi = -i\kappa_x \times \\
& \times \left(\sum_{i=0}^{I-1} a_i \cos \kappa_{y_i} y + a'_i \sin \kappa_{y_i} y \right) e^{-i\kappa_x x} e^{-i\beta z}, \\
H_y = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Такие волны можно классифицировать как продольно-магнитные, или **LM-волны**, для которых справедливо следующее соотношение

$$k_0^2 \tilde{\epsilon}_{ij} = \kappa_x^2 + \kappa_{y_i}^2 + \beta^2. \tag{4}$$

Амплитудные коэффициенты f_i , f'_i , a_i , a'_i и поперечные волновые числа κ'_{y_i} , κ_{y_i} определяются из равенства тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей волны номера n (или n -й волны) на границах диэлектрических слоев плоскостойкого волновода j , а также из равенства нулю тангенциальных составляющих электрического поля на металлических поверхностях экрана при $y = a_0^{(j)}$ и $y = a^{(j)}$ (рис. 3).

2. Описание метода

В предлагаемом методе поперечное сечение неоднородного волновода (рис. 1) разбивается на области (регулярные вдоль оси z плоскостойкие волноводы). В каждом получаемом таким образом регулярном волноводе j электромагнитное поле представляется набором прямых и обратных по оси x собственных волн с неизвестными амплитудными коэффициентами:

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_{\pm n}^{(j)} \\ \bar{H}_{\pm n}^{(j)} \end{array} \right\} &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(j)} \left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_n^{(j)} \\ \bar{H}_n^{(j)} \end{array} \right\} e^{-i\kappa_{x_n}^{(j)} x} e^{-i\beta z} + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} F_n^{(j)} \left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_{-n}^{(j)} \\ \bar{H}_{-n}^{(j)} \end{array} \right\} e^{i\kappa_{x_n}^{(j)} x} e^{-i\beta z},
\end{aligned} \tag{5}$$

где $A_n^{(j)}$, $F_n^{(j)}$ – неизвестные амплитудные коэффициенты волн; $\kappa_{x_n}^{(j)}$ – поперечные постоянные распространения LM-волн и LE-волн для j -й выделенной области; β – продольная постоянная распространения этих волн и собственной волны волновода со сложным профилем. Неизвестные волновые числа $\kappa_{x_n}^{(j)}$ и β , связанные уравнениями (2) и (4), находятся из решения задачи. Векторные функции $\bar{E}_{\pm n}^{(j)}$, $\bar{H}_{\pm n}^{(j)}$, описывающие поперечные (к оси x) компоненты электрического и магнитного поля собственных волн плоскостойких областей, определяются как

$$\begin{aligned}
\bar{E}_{\pm n}^{(j)} &= \left\{ \begin{array}{l} E_{y_{\pm n}}^{LM(j)} \cdot \vec{j} + E_{z_{\pm n}}^{LM(j)} \cdot \vec{k} \\ E_{z_{\pm n}}^{LE(j)} \cdot \vec{k} \end{array} \right\}, \\
\bar{H}_{\pm n}^{(j)} &= \left\{ \begin{array}{l} H_{z_{\pm n}}^{LM(j)} \cdot \vec{k} \\ H_{y_{\pm n}}^{LE(j)} \cdot \vec{j} + H_{z_{\pm n}}^{LE(j)} \cdot \vec{k} \end{array} \right\}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Знак «-» при n в (5)–(6) означает, что соответствующая LM $_n$ -, LE $_n$ -волна распространяется против оси x .

Из условия непрерывности тангенциальных компонент поля на каждой границе раздела $x = x_j$ между волноводами j и $j' = j + 1$ получаем систему линейных функциональных уравнений:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^N A_n^{(j)} (E_{y_n}^{(j)} \cdot \vec{j} + E_{z_n}^{(j)} \cdot \vec{k}) e^{-i\kappa_{x_n}^{(j)} \Delta x} - \\
& - \sum_{n=1}^N F_n^{(j)} (E_{y_n}^{(j)} \cdot \vec{j} + E_{z_n}^{(j)} \cdot \vec{k}) e^{i\kappa_{x_n}^{(j)} \Delta x} \Big|_{S_j} = \\
& = \sum_{n=1}^N A_n^{(j+1)} (E_{y_n}^{(j+1)} \cdot \vec{j} + E_{z_n}^{(j+1)} \cdot \vec{k}) - \\
& - \sum_{n=1}^N F_n^{(j+1)} (E_{y_n}^{(j+1)} \cdot \vec{j} + E_{z_n}^{(j+1)} \cdot \vec{k}) \Big|_{S_j}; \\
& \sum_{n=1}^N A_n^{(j)} (H_{y_n}^{(j)} \cdot \vec{j} + H_{z_n}^{(j)} \cdot \vec{k}) e^{-i\kappa_{x_n}^{(j)} \Delta x} + \\
& + \sum_{n=1}^N F_n^{(j)} (H_{y_n}^{(j)} \cdot \vec{j} + H_{z_n}^{(j)} \cdot \vec{k}) e^{i\kappa_{x_n}^{(j)} \Delta x} \Big|_{S_j} = \\
& = \sum_{n=1}^N A_n^{(j+1)} (H_{y_n}^{(j+1)} \cdot \vec{j} + H_{z_n}^{(j+1)} \cdot \vec{k}) +
\end{aligned} \tag{7}$$

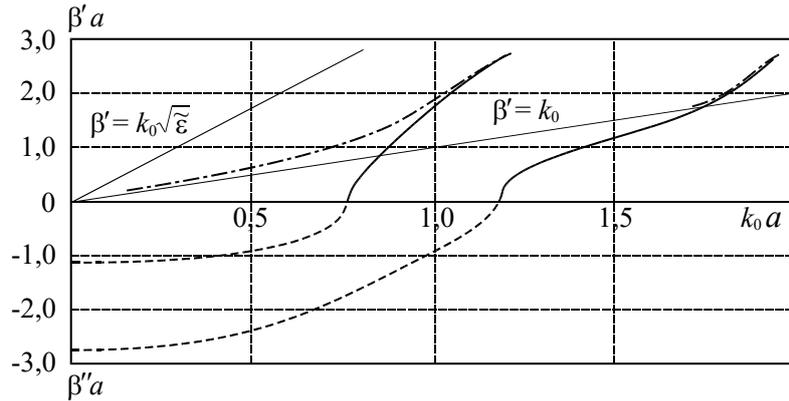


Рис. 4. Дисперсионные зависимости собственных волн экранированного эллиптического диэлектрического волновода с $\Delta l/a = 0,8$, $a_0/a = l_1/a = 0,6$

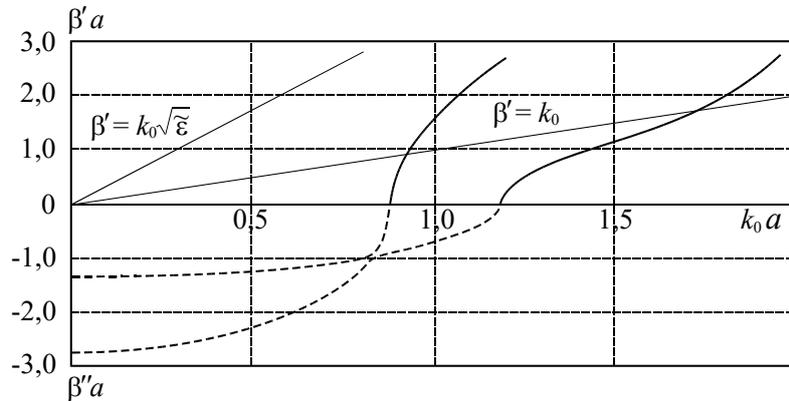


Рис. 5. Дисперсионные зависимости собственных волн экранированного эллиптического диэлектрического волновода с $\Delta l/a = 0,55$, $a_0/a = l_1/a = 0,6$

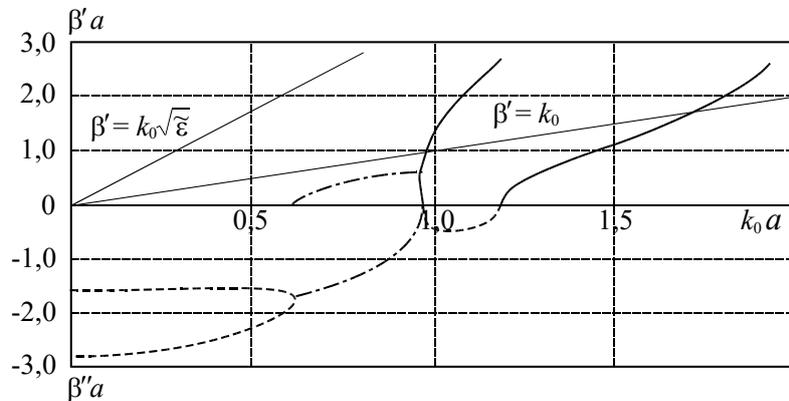


Рис. 6. Дисперсионные зависимости собственных волн экранированного эллиптического диэлектрического волновода с $\Delta l/a = 0,4$, $a_0/a = l_1/a = 0,6$

$$+ \sum_{n=1}^N F_n^{(j+1)} (H_{y_n}^{(j+1)} \cdot \vec{j} + H_{z_n}^{(j+1)} \cdot \vec{k}) \Big|_{S_j},$$

где N – количество учитываемых LM_n - и LE_n -волн в j и $j' = j + 1$ выделенных областях. Систему (7) необходимо решать при соответствующих граничных условиях в сечениях $x = 0$ и $x = l$.

Умножаем первое уравнение (7) векторно на $(H_{y_q}^{(j)} \cdot \vec{j} + H_{z_q}^{(j)} \cdot \vec{k})$, а второе уравнение – на $(E_{y_q}^{(j+1)} \cdot \vec{j} + E_{z_q}^{(j+1)} \cdot \vec{k})$ и интегрируем полученные равенства по продольному сечению соответ-

ствующего волновода S_j . Используя условие ортогональности собственных волн плоскостных волнопроводов, получаем систему однородных алгебраических уравнений второго рода относительно неизвестных коэффициентов разложения $A_n^{(j)}$, $F_n^{(j)}$, которая в матричной записи имеет вид

$$S \cdot X = 0, \tag{8}$$

где

$$X^T = [A^{(0)} \quad D^{(1)} \quad F^{(1)} \quad \dots \quad D^{(j)} \quad F^{(j)} \quad \dots \quad F^{(j+1)}]$$

– вектор-столбец;

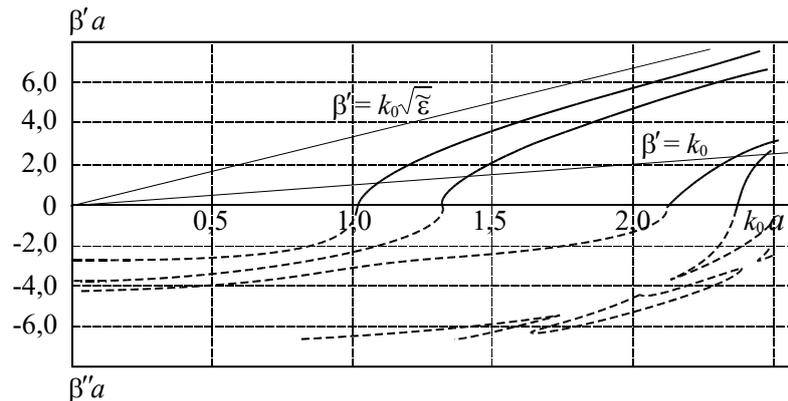


Рис. 7. Дисперсионные зависимости собственных волн экранированного эллиптического диэлектрического волновода с $\Delta l/a = 0,002$, $a_0/a = l_1/a = 0,6$

уравнений (8). Приравнивание к нулю определителя системы позволяет выявить направляющие свойства рассматриваемого волновода, представленные на рис. 4–6 в виде зависимостей нормированных постоянных распространения $\beta a = (\beta' + i\beta'')a$ от нормированной частоты $k_0 a = \frac{\omega}{c}a$, с – скорость света в вакууме.

На рис. 4 показаны дисперсионные зависимости первых двух волн рассматриваемой экранированной структуры (рис. 3). Также на этом рисунке штрих-пунктирными линиями изображены дисперсионные зависимости при отсутствующих боковых стенках экрана. Из рис. 4 видно, что все кривые поверхностных волн полуоткрытой структуры ограничены снизу прямой $\beta' = k_0$, ниже которой эти волны (начиная со второй) переходят в вытекающие. Из рисунка также видно, что сплошная и штрих-пунктирная зависимости для второй волны совпадают в области $\beta' > k_0$, что свидетельствует о слабом влиянии боковых стенок экрана на поле волны. Напротив, для первой волны это влияние значительно, так как при отсутствии боковых стенок эта волна не имеет отсечки.

На рис. 5, 6 показана трансформация дисперсионных зависимостей первых двух волн рассматриваемой экранированной структуры при уменьшении расстояния $\Delta l = l - l_1$ от границы диэлектрика до боковых стенок экрана. Особый интерес вызывает трансформация кривых β в области мнимых значений, проявляющаяся в появлении на этих кривых резких изломов (рис. 5) и в последующем переходе к комплексным решениям (рис. 6), которые изображены штрих-пунктиром.

В тех случаях, когда значения Δl становятся очень малыми (рис. 7), двузначные участки, равно как и комплексные волны низших типов,

исчезают. Следует отметить, что многие из описанных явлений происходят при таких значениях Δl , которые сравнимы с допусками изготовления диэлектрической вставки. Поэтому возникает вопрос о влиянии столь значительных трансформаций в дисперсионных кривых на интегральные характеристики устройств, которые могут изготавливаться на основе волноводов с такими вставками.

Заключение

В описываемом в статье методе расчета волноводов со сложным поперечным сечением предлагается рассматривать поле волн, распространяющихся в таких волноводах, как результат дифракции собственных волн планарных частично заполненных волноводов на поперечных неоднородностях. В случае однородно заполненных волноводов этот метод совпадает с методом частичных областей, когда поле в каждой частичной области представляется суперпозицией собственных функций краевой задачи Штурма – Лиувилля.

Предлагаемый в статье метод может стать основой машинного проектирования функциональных узлов миллиметрового и субмиллиметрового диапазона длин волн. Метод не накладывает ограничения на закон изменения профиля поперечного сечения, что позволяет значительно увеличить номенклатуру линий передачи рассматриваемых диапазонов.

Список литературы

1. Веселов Г.И., Раевский С.Б. Слоистые металло-диэлектрические волноводы. М.: Радио и связь, 1988. 248 с.
2. Егоров Ю.В. Частично заполненные прямоугольные волноводы. М.: Советское радио, 1967. 216 с.
3. Волноводы с поперечным сечением сложной формы / под ред. В.М. Седых. Харьков: Вища школа, 1979. 128 с.

4. Волноводы сложных сечений / Г.Ф. Заргано [и др.]. М.: Радио и связь, 1986. 124 с.
5. Раевский С.Б. Решение внутренних задач электродинамики с использованием непрерывного спектра в одной из частичных областей // Изв. вузов СССР. Сер.: Радиоэлектроника. 1980. Т. 23. № 9. С. 27–32.
6. Новоселова Н.А., Раевский С.Б., Седаков А.Ю. Использование непрерывного спектра в методе частичных областей // Антенны. 2014. № 9 (208). С. 70–74.
7. Титаренко А.А. Применение спектрального метода к расчету дисперсии волн регулярных волноводов с произвольным диэлектрическим заполнением // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2013. Т. 16. № 3. С. 86–91.

The method longitudinal sections for the calculation the own waves of shielded waveguides with a complex form of cross-section

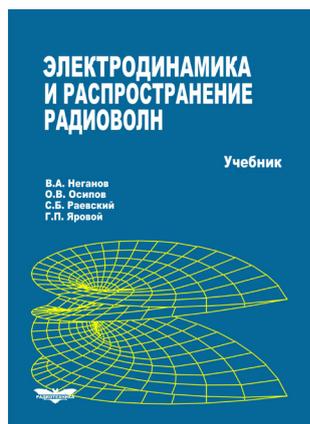
R.V. Budaragin

The method which can be used for calculation of own waves shielded waveguides with any law of change of parameters of a waveguide from cross-section co-ordinate is offered. The homogeneous system of linear algebraic equations to which the decision of a considered problem is reduced is received. Method approbation on an example partially filled shielded waveguides is spent.

Keywords: own waves, orthogonal basis, shielded waveguides, dielectric inhomogeneity.

Неганов, В.А.

Электродинамика и распространение радиоволн: учебник / В.А. Неганов [и др.]; под ред. В.А. Неганова и С.Б. Раевского. – Изд. 4-е, доп. и перераб. – М.: Радиотехника, 2009. – 744 с.



ISBN 978-5-88070-154-4

УДК 537.87(075.3)
ББК 22.3
Н 41

Книга написана активно работающими в области электродинамики учеными. Излагаются теория электромагнитного поля с акцентом на радиотехническую электродинамику и анализ волновых процессов; рассматриваются отражение и преломление волн, излучение и дифракция; описываются основные закономерности распространения электромагнитных волн в различных безграничных средах (изотропных, анизотропных, диспергирующих, неоднородных), в направляющих и резонансных структурах, в природных условиях. Обсуждаются методы математического моделирования в электродинамике, опирающегося на применение ЭВМ.

Отличительной особенностью книги является обсуждение современных проблем электродинамики: расчет электромагнитных волн в ближних зонах излучающих структур (самосогласованный метод расчета), комплексных волн в волноведущих структурах и др.

Предназначается для студентов радиотехнических и радиофизических специальностей вузов, а также инженеров-радиотехников и радиофизиков.