

## Дискретная модель связанных нелинейных осцилляторов

Э.Ю. Федюнин, А.Н. Шилин

Самарский университет  
443086, Российская Федерация, г. Самара  
Московское шоссе, 34

Дискретизирующие последовательности отсчетов импульсных характеристик квазигармонических осцилляторов использованы для перехода к дискретному времени в уравнениях движения нелинейных колебательных систем со многими степенями свободы. В результате предложен конечно-разностный алгоритм моделирования нелинейной динамики осцилляторов. Разностная схема имеет второй порядок точности по дискретному времени, сохраняет форму импульсных характеристик осцилляторов и хорошо стыкуется с методами цифровой обработки сигналов. Приведен пример моделирования нелинейного резонанса в двух связанных осцилляторах Дюффинга.

*Ключевые слова:* связанные осцилляторы, дискретное время, осцилляторы Дюффинга, численный эксперимент, нелинейный резонанс.

1. В работе [1] предложен метод численного моделирования нелинейных колебательных систем, основанный на использовании импульсно-отклика линейного резонатора для дискретизации времени в уравнении движения системы. Метод ориентирован на нелинейные колебательные и автоколебательные системы с одной степенью свободы. На практике реальные радиотехнические системы могут содержать несколько резонаторов или описываться осцилляторными моделями высоких порядков. Это, например, многокаскадные резонансные усилители и автогенераторы [2], в том числе кольцевые [3], автогенераторы, стабилизированные дополнительными резонаторами [4], и другие радиосистемы.

В настоящей статье метод работы [1] обобщается на случай многоконтурных нелинейных колебательных и автоколебательных систем. Предлагаемый подход легко сочетается с методами цифровой обработки сигналов.

2. В качестве дифференциальной модели  $M$  связанных осцилляторов с вектором состояния  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_M)^T$  рассмотрим систему уравнений движения

$$\frac{d^2 u_m}{dt^2} + \frac{\omega_m}{Q_m} \frac{du_m}{dt} + \omega_m^2 u_m = \omega_m^2 f_m \left( \mathbf{u}, \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right), \quad (1)$$

где  $\omega_m$  – собственные частоты осцилляторов;  $Q_m$  – их добротности;  $f_m(\mathbf{u}, d\mathbf{u}/dt)$  – функции, описывающие связи и нелинейности в системе осцилляторов.

Альтернативной (1) формой описания колебательной системы является ее интегральная модель в виде системы уравнений Вольтерра второго рода:

$$u_m(t) = \int_0^t f_m(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) h_m(t - \tau) d\tau + U_m(t), \quad (2)$$

где функции времени  $U_m(t)$  описывают свободные колебания в резонаторе, а ядра  $h_m(t - \tau)$  – импульсные характеристики осцилляторов, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{d^2 h_m}{dt^2} + \frac{\omega_m}{Q_m} \frac{dh_m}{dt} + \omega_m^2 h_m = \omega_m^2 \delta(t) \quad (3)$$

с дельта-функцией в правой части и нулевыми начальными условиями. Решениями уравнений (3) при  $t \geq 0$  являются функции

$$h_m(t) = \omega_m \exp\left(-\frac{\omega_m}{2Q_m} t\right) \sin(\omega_m t). \quad (4)$$

При этом предполагается, что осцилляторы имеют высокие  $Q_m \geq 10$  добротности.

Нетрудно установить, что отсчеты импульсных характеристик (4) на равномерной временной сетке  $t_n = n\Delta t$  при  $n \geq 2$  удовлетворяют разностным уравнениям

$$\hat{D}_2\{h_m(t_n)\} \equiv h_m(t_n) - 2\alpha_m \cos(\omega_m \Delta t) h_m(t_{n-1}) + \alpha_m^2 h_m(t_{n-2}) = 0 \quad (5)$$

с начальными условиями  $h_m(t_0) = h_m(0) = 0$ ,  $h_m(t_1) = h_m(\Delta t) = \alpha_m \omega_m \sin(\omega_m \Delta t)$ , где

$$\alpha_m = \exp\left(-\frac{\omega_m}{2Q_m} \Delta t\right).$$

Последовательности отсчетов применим  $h_m(t_n)$  при переходе к дискретному времени в интегральном уравнении (2). Для этого создадим совокупность дискретизирующих последовательностей

$$h_m(t) = \Delta t \sum_{k=0}^{\infty} h_m(t_k) \delta(t - t_k). \quad (6)$$

Импульсные характеристики  $h_m(t - \tau)$  в (2) заменим последовательностями (6). После интегрирования для значений решения на временной сетке  $t_n$  получим систему уравнений дискретной свертки

$$\begin{aligned} u_m(t_n) &= \\ &= \Delta t \sum_{k=0}^n f_m(\mathbf{u}(t_k), \dot{\mathbf{u}}(t_k)) h_m(t_n - t_k) + U_m(t_n). \end{aligned} \quad (7)$$

Теперь обе части уравнений (7) подвергнем воздействию разностных операторов  $\hat{D}_2\{\circ\}$ . При  $n \geq 2$  это приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \hat{D}_2\{u_m(t_n)\} &= \\ &= \Delta t h_m(\Delta t) f_m(\mathbf{u}(t_n - \Delta t), \dot{\mathbf{u}}(t_n - \Delta t)). \end{aligned} \quad (8)$$

Отметим, что в процессе преобразования правой части (8) использованы уравнения (5) и аналогичные им уравнения  $\hat{D}_2\{U_n(t_n)\} = 0$ , а также равенства  $h_m(0) = 0$ . Следует обратить внимание на то, что равенства  $h_m(0) = 0$  приводят к зависимости правой части (8) от момента времени  $t_n - \Delta t = t_{n-1}$  и позволяют получить явный алгоритм моделирования автоколебаний при аппроксимации производных  $\dot{\mathbf{u}}(t_{n-1})$  левыми разностями. Ограничиваясь трехточечной аппроксимацией, имеем

$$\dot{\mathbf{u}}(t_{n-1}) = \frac{3\mathbf{u}(t_{n-1}) - 4\mathbf{u}(t_{n-2}) + \mathbf{u}(t_{n-3})}{2\Delta t}.$$

Таким образом, алгоритм моделирования колебаний в системе связанных нелинейных осцилляторов задается системой рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} u_m(t_n) - 2\alpha_m \cos(\omega_m \Delta t) u_m(t_{n-1}) + \\ + \alpha_m^2 u_m(t_{n-2}) = \Delta t h_m(\Delta t) f_m(\mathbf{u}(t_{n-1}), \dot{\mathbf{u}}(t_{n-1})), \end{aligned} \quad (10)$$

где  $n = 3, 4, \dots$ , а значения  $u_m(t_1)$  и  $u_m(t_2)$  в соответствии с интегральными уравнениями (2) определяются по начальным условиям  $\mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}_0$  с помощью выражений

$$u_m(t_2) = \frac{1}{2} \Delta t h_m(\Delta t) f_m(\mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}_0) + U_m(t_1),$$

$$u_m(t_2) = \Delta t h_m(2\Delta t) f_m(\mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}_0) + U_m(t_2).$$

**3.** Рассмотрим пример – нелинейный резонанс в связанных осцилляторах Дюффинга. Осциллятор Дюффинга является базовым объектом классической теории колебаний [5] и, в то же время, может служить моделью реальных радиосистем, например, колебательного контура, перестраиваемого варикапом [6].

Исходная система уравнений движения идентичных реактивно связанных осцилляторов с собственными частотами  $\omega_0$  и  $Q$  имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dU}{dt} + \omega_0^2 U &= \\ &= -\mu \omega_0^2 U^3 + \kappa \omega_0^2 (V - U) + \omega_0^2 S(t), \\ \frac{d^2 V}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dV}{dt} + \omega_0^2 V &= \\ &= -\mu \omega_0^2 V^3 + \kappa \omega_0^2 (U - V). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь  $\mu$  и  $\kappa$  – параметры нелинейности и связи;  $S(t)$  – сигнал внешнего воздействия на один из осцилляторов.

При проведении расчетов собственную частоту  $\omega_0$  будем измерять в единицах частоты дискретизации  $\omega_d = 2\pi / \Delta t$ :  $\Omega_0 = \omega_0 / \omega_d$ , а также введем обозначения

$$\lambda = h(\Delta t) \Delta t = \pi \Omega_0 \exp\left(-\frac{\Omega_0}{2Q}\right)$$

и  $U_n = U(t_n)$ ,  $V_n = V(t_n)$ . Тогда алгоритм моделирования (10) для системы уравнений (11) примет вид

$$\begin{aligned} U_n - 2\alpha \cos(2\pi \Omega_0) U_{n-1} + \alpha^2 U_{n-2} &= \\ &= 2\lambda \sin(2\pi \Omega_0) \times \\ &\times \left(-\mu U_{n-1}^3 + \kappa (V_{n-1} - U_{n-1}) + S_{n-1}\right), \\ V_n - 2\alpha \cos(2\pi \Omega_0) V_{n-1} + \alpha^2 V_{n-2} &= \\ &= 2\lambda \sin(2\pi \Omega_0) \left(-\mu V_{n-1}^3 + \kappa (U_{n-1} - V_{n-1})\right). \end{aligned} \quad (12)$$

Для оценки достоверности результатов моделирования колебаний в связанных осцилляторах Дюффинга применим разностную схему (12) к расчету амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) линеаризованной системы, положив в (11) и (12)  $\mu = 0$ . Эта задача имеет точное решение – на рис. 1 АЧХ  $K_1(\Omega)$  и  $K_2(\Omega)$  первого и второго осцилляторов показаны непрерывными линиями (параметры системы:  $\Omega_0 = 0.1$ ,  $Q = 20$ ,  $\kappa = 0.06$ ).

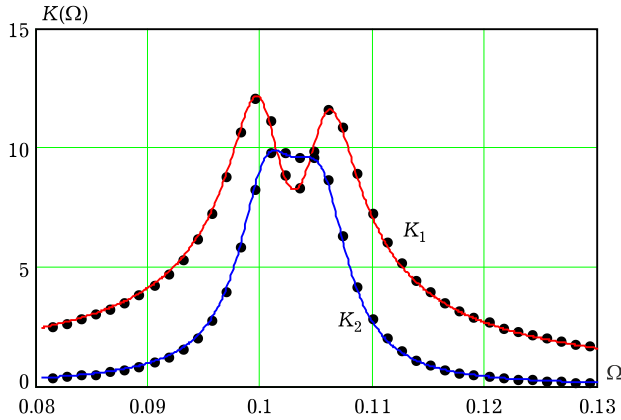


Рис. 1. АЧХ связанных линейных осцилляторов

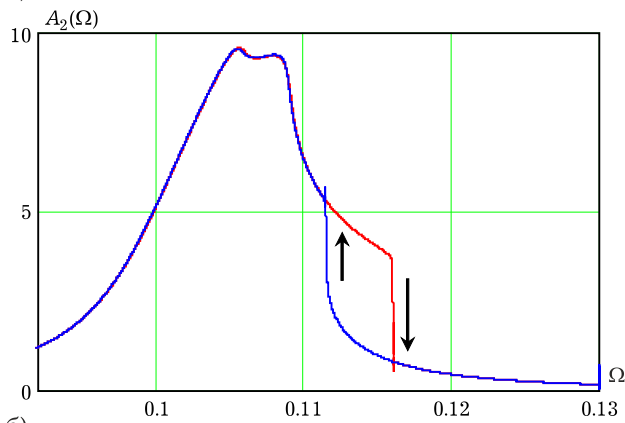
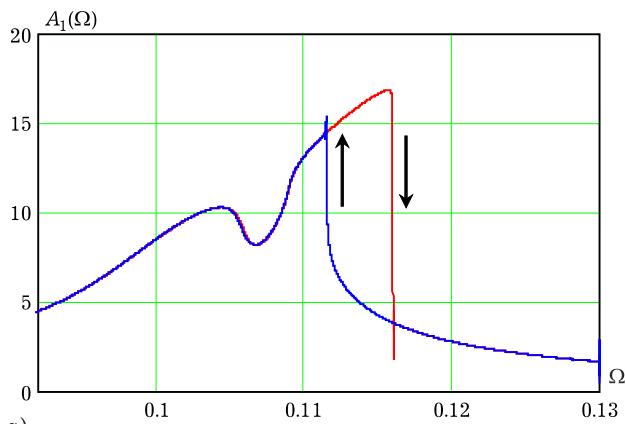


Рис. 2. Частотные зависимости амплитуд колебаний связанных осцилляторов Дюффинга

Точками на рис. 1 показаны результаты расчетов АЧХ с помощью разностной схемы (12). При этом амплитуды оценивались путем квадратичного усреднения установившихся реализаций вынужденных колебаний:

$$A_U = 2\sqrt{\langle U_n^2 \rangle_N}, \quad A_V = 2\sqrt{\langle V_n^2 \rangle_N}.$$

Графики демонстрируют хорошее согласование численных и точных аналитических результатов.

Перейдем теперь к моделированию с помощью (12) связанных осцилляторов Дюффинга. Ряд ре-

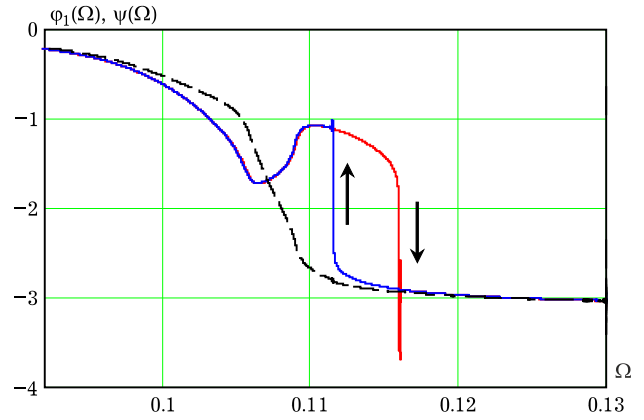


Рис. 3. Частотные зависимости фаз колебаний связанных осцилляторов Дюффинга

зультатов для системы с параметрами  $\Omega_0 = 0.1$ ,  $Q = 20$ ,  $\kappa = 0.06$ ,  $\mu = 0.0012$  при единичной амплитуде внешнего воздействия  $S(t)$  представлен ниже в виде графиков.

На рис. 2 показаны графики зависимостей амплитуд первых гармоник вынужденных колебаний в первом (а) и втором (б) осцилляторах от частоты внешнего воздействия. Оценки амплитуд проводились методом аналитического сигнала в численных экспериментах с квазистатической перестройкой частоты в диапазоне  $0.09 \leq \Omega \leq 0.13$ . При этом третья гармоника колебаний удалялась с помощью фурье-фильтрации. Как следует из графиков, частотные зависимости амплитуд характеризуются скачками и гистерезисом. Стрелки на графиках указывают направления скачков при изменениях частоты в сторону повышения или понижения. Выбросы в конечных точках скачков обусловлены затухающими свободными колебаниями.

Фазовые соотношения в связанных осцилляторах Дюффинга иллюстрируют графики, приведенные на рис. 3. Сплошной линией показан график частотной зависимости  $\phi_1(\Omega)$  разности фаз колебаний в первом осцилляторе и вынуждающих колебаний. Зависимость характеризуется скачками и гистерезисом. В то же время, частотная зависимость  $\psi(\Omega)$  разности фаз колебаний во втором и в первом осцилляторах – гладкая функция без скачков.

4. Представленный здесь численный метод предназначен для моделирования нелинейных осцилляторных систем. Метод имеет второй порядок точности по дискретному времени, сохраняет форму импульсных характеристик осцилляторов и хорошо стыкуется с алгоритмами цифровой обработки сигналов.

### Список литературы

1. О дискретных моделях колебательных систем / В.В. Зайцев [и др.] // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2015. Т. 18. № 1. С. 38–43.
2. Уткин Г.М. Автоколебательные системы и волновые усилителя. М.: Сов. радио, 1978. 272 с.
3. Зайцев В.В. К анализу флуктуаций в кольцевом автогенераторе // Известия вузов. Радиофизика. 1981. Т. 24. № 2. С. 207–212.
4. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 360 с.
5. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. М.: Мир, 1968. 432 с.
6. Капранов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М. Теория колебаний в радиотехнике. М.: Наука, 1984. 320 с.

---

## Discrete model of the coupled nonlinear oscillators

*E.Yu. Fedyunin, A.N. Shilin*

The sampling sequences of counting of pulse characteristics of quasi-harmonics oscillators are used for transition to discrete time in the equations of the movement of nonlinear oscillatory systems with many degrees of freedom. The finite-difference algorithm of modeling of nonlinear dynamics of oscillators is as a result offered. The differential scheme has the second order of accuracy on discrete time, keeps a form of pulse characteristics of oscillators and is well joined to methods of digital processing of signals. The example of modeling of a nonlinear resonance in two coupled Duffing oscillators is given.

*Keywords:* coupled oscillators, discrete time, Duffings oscillators, numerical experiment, nonlinear resonance.

---