

О генераторах динамического хаоса на основе модифицированной модели Лоренца

В.В. Зайцев¹, Ар.В. Карлов¹, Д.Б. Нураев²

¹ Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева
443086, Российская Федерация, г. Самара,
Московское шоссе, 34

² Акционерное общество «Ракетно-космический центр «Прогресс»
443009, Российская Федерация, г. Самара
ул. Земеца, 18

Представлена математическая модель автоколебательной системы – модифицированного генератора Лоренца, полученной путем преобразования стандартной системы Лоренца. Показано, что в модифицированном генераторе Лоренца реализуются режимы как регулярных, так и хаотических автоколебаний. Получена дискретная модель генератора с инерционной нелинейностью. Проведено исследование на устойчивость состояний равновесия системы. Представлены графики амплитудных спектров хаотических и регулярных автоколебаний.

Ключевые слова: система Лоренца, хаотическая динамика, дискретное время, нелинейные ДВ-системы, автогенератор с инерционной нелинейностью, амплитудные спектры, хаотические автоколебания.

1. Модифицированная система Лоренца

Считается, что известная модель Лоренца [1]

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= -\sigma X + \sigma Y, \\ \frac{dY}{dt} &= -Y + rX - XZ, \\ \frac{dZ}{dt} &= -bZ + XY \end{aligned} \quad (1)$$

послужила отправным пунктом развития хаотической динамики [2]. Несмотря на весьма значительное число публикаций, посвященных исследованию модели, интерес к ней и в настоящее время поддерживается на высоком уровне [3].

Анализ системы уравнений (1) с позиций электронной схемотехники позволяет предложить схему генератора Лоренца, изображенную на рис. 1 (переключатель в положении П₁).

Схема содержит интегрирующие RC-цепи с системными функциями $H_i(p) = 1 / (p\tau_i + 1)$, операционные усилители с коэффициентами передачи k_i , перемножители и сумматор. Часть схемы, расположенная выше пунктирной линии, представляет собой аperiodический усилитель, нижняя часть – инерционную нелинейную цепь обратной связи с двумя входами. По классификации П.С. Ланды [4; 5] подобные системы относятся к генераторам с инерционным самовозбуждением.

Изменим схему цепи обратной связи, превратив ее в одноходовую, переведя переключатель в положение П₂. Преобразованную таким образом автоколебательную систему назовем *модифицированным генератором Лоренца (МГЛ)* [6].

Динамика МГЛ описывается следующими уравнениями состояния для нормированных напряжений $U_n(t)$

$$\begin{aligned} \frac{dU_1}{dt} &= -\frac{1}{\tau_1} U_1 + \frac{k_1}{\tau_1} U_2, \\ \frac{dU_2}{dt} &= -\frac{1}{\tau_2} U_2 + \frac{k_2}{\tau_2} (1 - U_3) U_1, \\ \frac{dU_3}{dt} &= -\frac{1}{\tau_3} U_3 + \frac{k_3}{\tau_3} U_1^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь напряжения нормированы так, что выходы перемножителей связаны с их входами соотношением $U_p = U_1 U_2$. Формально уравнения (2) содержат шесть параметров, но нормировка времени и двух напряжений позволяет сократить их число до четырех. В частности, в стандартной модели Лоренца используются обозначения $\sigma = \tau_2 / \tau_1$, $b = \tau_2 / \tau_3$, $r = k_1 k_2$, а $k_1 k_2 k_3 \sigma = 1$.

Результаты численного интегрирования уравнений (2) позволяют сделать вывод о том, что в МГЛ реализуются режимы как регулярных, так и хаотических автоколебаний. Для примера на рис. 2, а и рис. 2, б приведены усредненные амплитудные спектры $U_1(\omega)$ напряжения $U_1(t)$

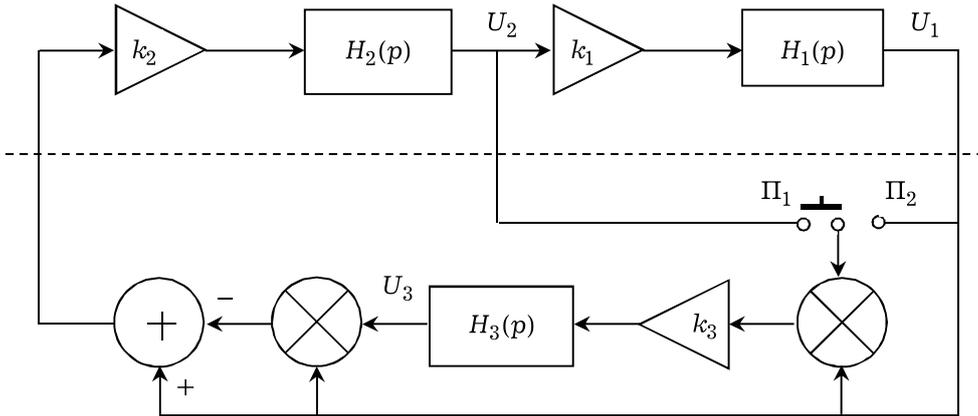


Рис. 1. Схема генератора Лоренца

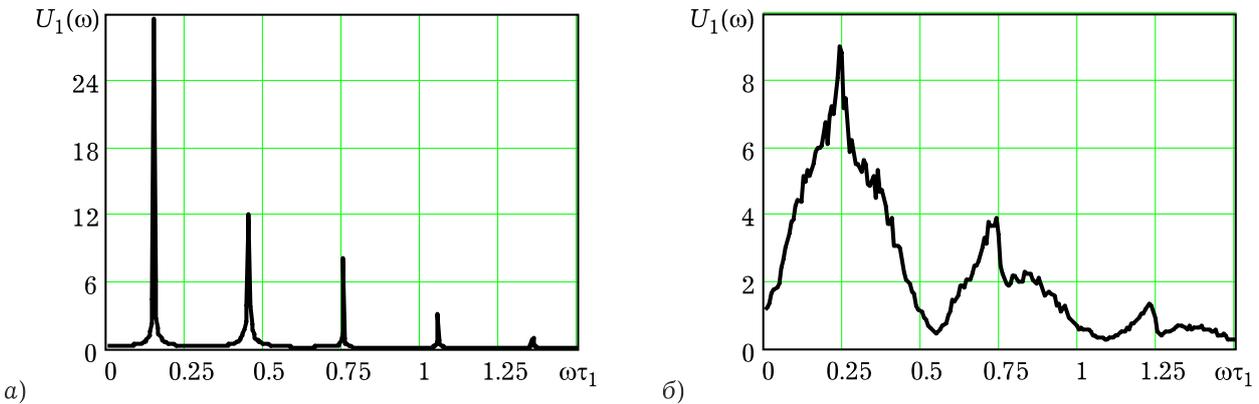


Рис. 2. Усредненный амплитудный спектр напряжения в МГЛ

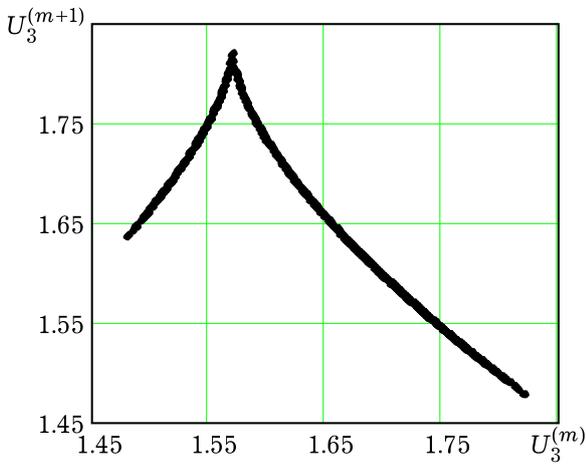


Рис. 3. Отображение первого возвращения

в генераторе с параметрами $k_1 = 0.45$, $k_2 = 22.73$, $k_3\tau_1\tau_3^{-1} = 1$, $\tau_2 = 9.1\tau_1$, а также $\tau_3 = 10\tau_1$ (рис. 2, а) или $\tau_3 = 3.33\tau_1$ (рис. 2, б).

Очевидно, что первый из спектров, состоящий из дискретных линий, отвечает режиму периодических автоколебаний. В то время как, спектр на рис. 2 б в соответствии с прагматическим определением хаоса указывает на режим хаотических автоколебаний.

Качественно характеристики динамического хаоса в МГЛ близки к характеристикам анало-

гичных процессов в стандартной системе Лоренца. Например, степень сжатия фазового объема аттрактора характеризует представленное на рис. 3 отображение первого возвращения. Оно получено на основе последовательности координат $U_3^{(m)}$ точек в сечении Пуанкаре поверхности $k_3U_1^2 - U_3 = 0$. Общий вид графика на рис. 3 полностью соответствует графику отображения первого возвращения в стандартной модели Лоренца [7].

Таким образом, генератор, определяемый уравнениями состояния (2), представляет собой простую радиофизическую систему с режимом хаотических автоколебаний, пригодную для практических применений в численных экспериментах по нелинейной динамике. Кроме того, он допускает переход к дискретному времени без введений в схему дополнительных временных задержек.

2. ДВ-генератор с инерционной нелинейностью

Систему уравнений состояния (2) удобно использовать при моделировании автоколебаний методами численного интегрирования задачи

Коши [8]. Но при переходе к дискретному времени ее целесообразно преобразовать, исключив из первых двух уравнений переменную $U_2(t)$. В результате получим систему

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + 2\omega_s \frac{dx}{dt} + \omega_p^2 x &= k_p \omega_p^2 (1-y)x, \\ \frac{dy}{dt} &= -\omega_c y + k_3 \omega_c x^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $x(t) = U_1(t)$, $y(t) = U_3(t)$ и введены обозначения

$$\begin{aligned} 2\omega_s &= \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}, \quad \omega_c = \frac{1}{\tau_3}, \\ \omega_p &= \sqrt{\frac{1}{\tau_1 \tau_2}} \text{ и } k_p = k_1 k_2. \end{aligned}$$

Первое из уравнений системы (3) запишем в форме интегрального Вольтера второго рода

$$x(t) = \int_0^t f(x(\tau), y(\tau)) h(t-\tau) d\tau + X(t). \quad (4)$$

где $f(x, y) = (1-y)x$, функция времени $X(t)$ описывает свободный процесс в линейной системе (при $k_p = 0$). Ядро уравнения (4) $h(t-\tau)$ — импульсная характеристика, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2h}{dt^2} + 2\omega_s \frac{dh}{dt} + \omega_p^2 h = k_p \omega_p^2 \delta(t) \quad (5)$$

с дельта-функцией в правой части и нулевыми начальными условиями. Отметим, что свободный процесс $X(t)$ удовлетворяет однородному уравнению (5) и зависит от начальных условий.

Решением (5) при $t \geq 0$ является функция

$$h(t) = k_p \frac{\omega_p^2}{\sqrt{\omega_s^2 - \omega_p^2}} \exp(-\omega_s t) \sinh\left(\sqrt{\omega_s^2 - \omega_p^2} t\right). \quad (6)$$

Нетрудно показать, что отсчеты характеристики (6) на равномерной временной сетке $t_n = n\Delta t$ при $n \geq 2$ удовлетворяют разностному уравнению

$$\hat{L}_2\{h(t_n)\} \equiv h(t_n) - 2\delta \cosh\left(\sqrt{\omega_s^2 - \omega_p^2} \Delta t\right) \times \quad (7)$$

$$\times h(t_{n-1}) + \delta^2 h(t_{n-2}) = 0,$$

где

$$\delta = \exp(-\omega_s \Delta t),$$

и начальным условиям

$$h(t_0) = h(0) = 0,$$

$$h(t_1) = h(\Delta t) = \frac{k_p \omega_p^2 \delta}{\sqrt{\omega_s^2 - \omega_p^2}} \sinh\left(\sqrt{\omega_s^2 - \omega_p^2} \Delta t\right).$$

С использованием отсчетов $h(t_n)$ создадим последовательность

$$h_d(t) = \Delta t \sum_{m=0}^{\infty} h(t_m) \delta(t - t_m). \quad (8)$$

С ее помощью проведем дискретизацию времени в уравнении (4), заменив импульсную характеристику $h(t)$ на последовательность (8). После интегрирования для значений решения на временной сетке t_n получим уравнение дискретной свертки

$$x(t_n) = \Delta t \sum_{k=0}^n f(x(t_k), y(t_k)) h(t_n - t_k) + X(t_n). \quad (9)$$

Теперь обе части уравнения (9) подвергнем воздействию разностного оператора $\hat{L}_2\{\circ\}$. При $n \geq 2$ это приводит к следующему результату:

$$\hat{L}_2\{x(t_n)\} = f(x(t_{n-1}), y(t_{n-1})) h(\Delta t) \Delta t. \quad (10)$$

Отметим, что в процессе преобразования правой части (10) использованы равенство $h(0) = 0$, уравнение (7) и аналогичное ему уравнение $\hat{L}_2\{X(t_n)\} = 0$.

Аналогичным образом, с помощью отсчетов $h_y(t_n)$ импульсной характеристики

$$h_y(t) = k_3 \omega_c \exp(-\omega_c t)$$

проводится дискретизация времени во втором уравнении системы (3). Результат дискретизации

$$y(t_n) = \sigma y(t_{n-1}) + k_3 \omega_c x^2(t_n) \Delta t. \quad (11)$$

В динамике нелинейных ДВ-систем численный алгоритм вида (10)–(11) становится самостоятельным объектом исследований. Он задает динамическую систему, свойства которой могут существенно отличаться от свойств моделируемого аналогового прототипа.

Введя в рассмотрение частоту дискретизации $\omega_D = 2\pi / \Delta t$ и пересчитав в ее единицах все остальные частоты ($\Omega_s = \omega_s / \omega_D$, $\Omega_d = \omega_d / \omega_D$, $\Omega_c = \omega_c / \omega_D$) уравнения движения ДВ-системы для функций дискретного аргумента $x[n] = \sqrt{2\pi} \Omega_c k_3 x(t_n)$, $y[n] = y(t_n)$ запишем в виде

$$x[n] = \alpha_1 x[n-1] + \alpha_2 x[n-2] + \gamma (1 - y[n-1]) x[n-1], \quad (12)$$

$$y[n] = \sigma y[n-1] + x^2[n], \quad n = 2, 3, \dots$$

В уравнениях использованы обозначения

$$\alpha_1 = 2\delta \cosh\left(2\pi \sqrt{\Omega_s^2 - \Omega_p^2}\right), \quad \alpha_2 = -\delta^2,$$

$$\gamma = 2\pi \frac{k_p \Omega_p^2 \delta}{\sqrt{\Omega_s^2 - \Omega_p^2}} \sinh\left(\sqrt{\Omega_s^2 - \Omega_p^2}\right),$$

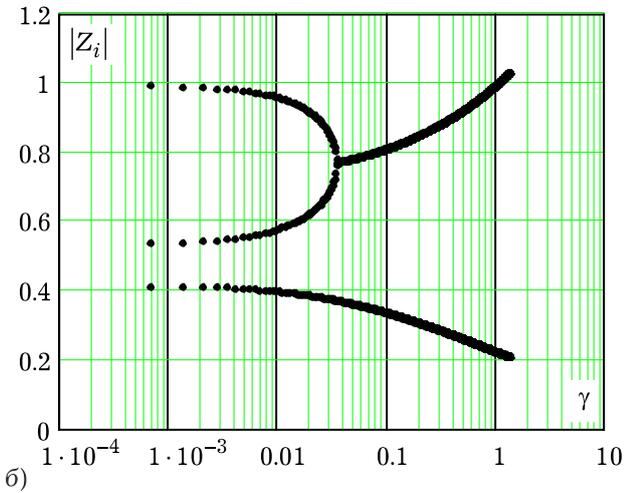
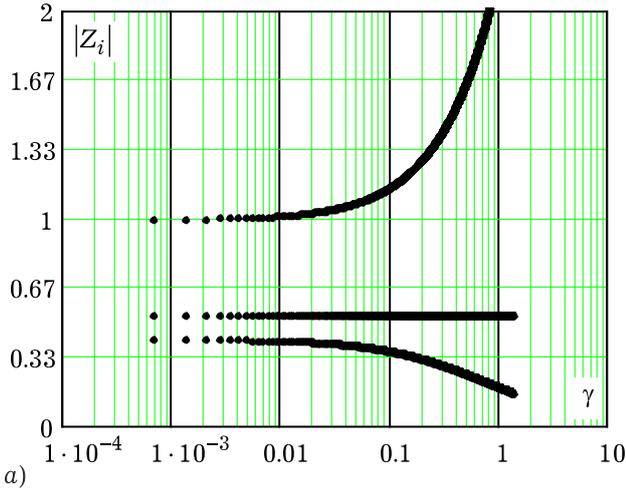


Рис. 4. Модули корней характеристических уравнений

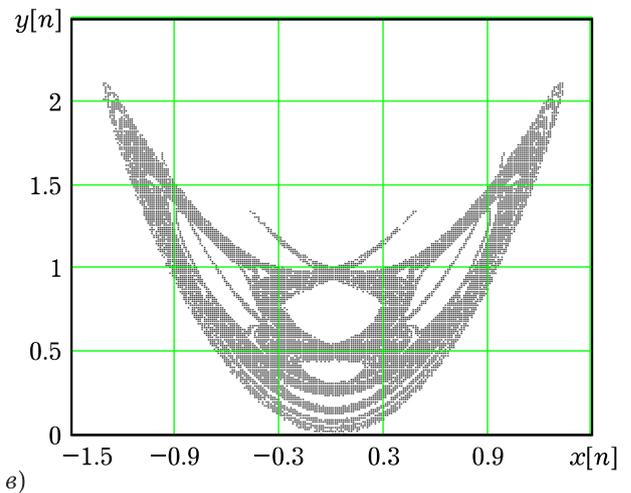
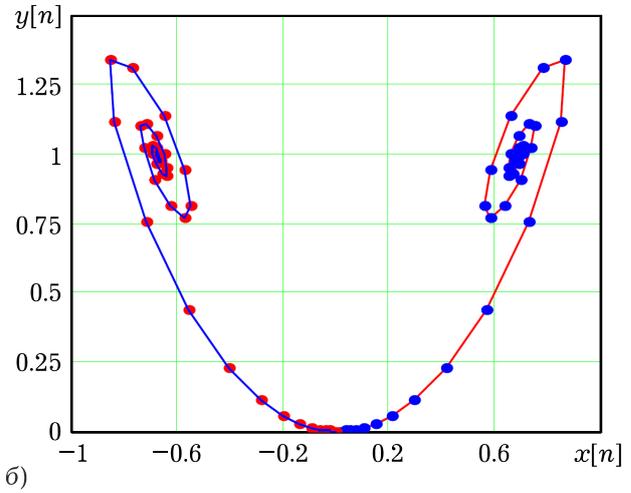
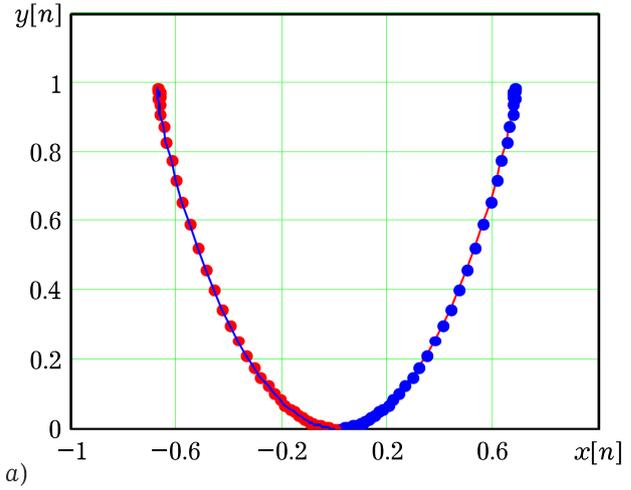


Рис. 5. Траектории ДВ-системы на плоскости (x, y)

$\delta = \exp(-2\pi\Omega_s)$, $\sigma = \exp(-2\pi\Omega_c)$.

Начальное состояние ДВ-системы задается значениями $x[0]$, $x[1]$, $y[0]$ и $y[1]$.

Уравнения (12) содержит четыре независимых параметра: частоты Ω_s , Ω_p , Ω_c и коэффициент глубины положительной обратной связи k_p . Впрочем, вместо k_p независимым можно считать параметр γ . При различных комбинациях их значений реализуются как регулярные, так и хаотические режимы автоколебаний.

Отметим также, что еще один алгоритм вида (12) для генерации автоколебаний в дискретном времени предложен в работе [9]. Общностью алгоритмов является управление коэффициентом передачи в кольце усилителя и обратной связи (первое из уравнений (12)) с помощью нелинейной инерционной цепи, функционирующей в соответствии со вторым уравнением (12). На основании такой общности ДВ-систему с уравнениями движения (12) будем обозначать как автогенератор с инерционной нелинейностью. Отметим при этом, что коэффициенты перво-

го из уравнений (12) определяются не колебательными процессами, как это имеет место в алгоритме работы [9], а процессами релаксации.

3. Режимы ДВ-генератора с инерционной нелинейностью

Система (12) при $\gamma > 0$ имеет три состояния равновесия:

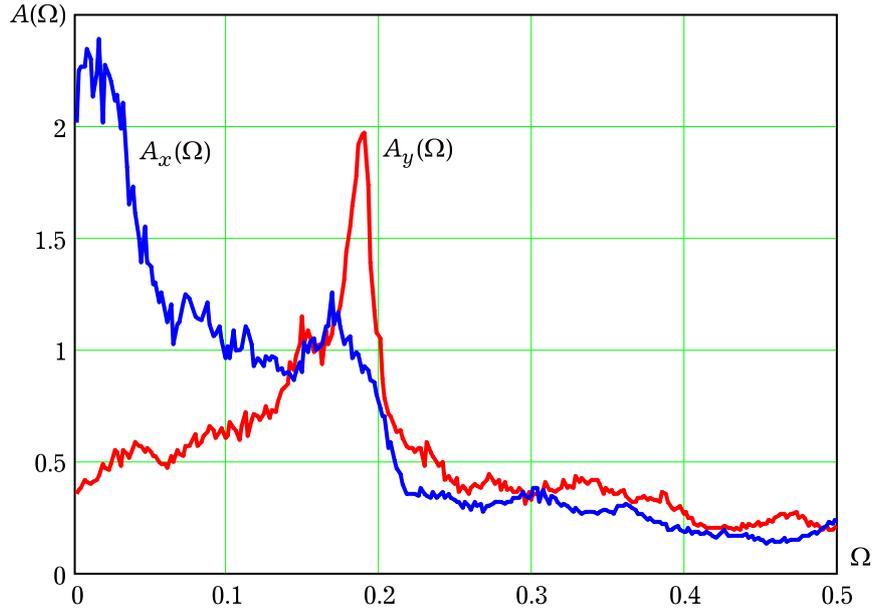


Рис. 6. Усредненные амплитудные спектры процессов $x[n]$ и $y[n]$

$$\begin{aligned} (x_0, y_0)_0 &= (0, 0), \\ (x_0, y_0)_1 &= \left(\sqrt{(1-\sigma)(1-\gamma^{-1}(1-\alpha_1-\alpha_2))}, \right. \\ &\quad \left. 1-\gamma^{-1}(1-\alpha_1-\alpha_2) \right), \\ (x_0, y_0)_2 &= \left(-\sqrt{(1-\sigma)(1-\gamma^{-1}(1-\alpha_1-\alpha_2))}, \right. \\ &\quad \left. 1-\gamma^{-1}(1-\alpha_1-\alpha_2) \right). \end{aligned}$$

Об их устойчивости можно судить по величине корней характеристических уравнений линеаризованных систем.

Для состояния $(x_0, y_0)_0$ линеаризованная система имеет вид

$$\begin{aligned} x[n] &= \alpha_1 x[n-1] + \alpha_2 x[n-2] + \gamma x[n-1], \\ y[n] &= \sigma y[n-1], \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Ей соответствуют характеристические уравнения

$$Z_{1,2}^2 - (\alpha_1 + \gamma)Z_{1,2} - \alpha_2 = 0 \text{ и } Z_3 = \sigma. \quad (13)$$

При выполнении условия

$$0 < \gamma < 1 - \alpha_1 - \alpha_2$$

все три корня таковы, что $|Z_i| < 1$. Следовательно, состояние $(x_0, y_0)_0$ устойчиво.

При $\gamma > 1 - \alpha_1 - \alpha_2$ в зависимости от начальных условий система (12) переходит в одно из состояний $(x_0, y_0)_1$ или $(x_0, y_0)_2$, которые с ростом γ сохраняют устойчивость до тех пор, пока модуль одного из корней характеристического уравнения

$$\begin{aligned} Z^3 - (\sigma + \alpha_1 + \gamma(1 - y_0 - 2x_0^2))Z^2 + \\ + (\sigma\alpha_1 + \sigma\gamma(1 - y_0) - \alpha_2)Z + \sigma\alpha_2 = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

не превысит единицу. После этого система переходит в автоколебательный режим, образованный переходами между состояниями $(x_0, y_0)_1$ и $(x_0, y_0)_2$.

Граница режима автоколебаний в пространстве параметров системы может быть определена путем численного решения уравнения

$$\max(|Z_i(\gamma, \Omega_s, \Omega_p, \Omega_c)|) = 1.$$

На рис. 4 приведены зависимости модулей корней характеристических уравнений от параметра глубины обратной связи γ при фиксированных значениях $\Omega_s = 0.07$, $\Omega_p = 0.01$ и $\Omega_c = 0.1$. Рис. 4, а отвечает корням уравнения (13), а рис. 4, б – уравнения (14).

Для указанных значений параметров Ω_s , Ω_p и Ω_c верхняя граница устойчивости состояния $(x_0, y_0)_0$ приблизительно соответствует величине $\gamma = 2.562 \cdot 10^{-3}$, а верхняя граница устойчивости состояний $(x_0, y_0)_1$ или $(x_0, y_0)_2$ – величине $\gamma = 1.032$.

Рис. 5 на плоскости $(x[n], y[n])$ отображает траектории перехода от неустойчивого состояния $(x_0, y_0)_0$ в окрестности состояний $(x_0, y_0)_1$ и $(x_0, y_0)_2$. Плоскость $(x[n], y[n])$ на рис. 5, а характерна для значений $2.562 \cdot 10^{-3} < \gamma < 0.038$, при которых особые точки $(x_0, y_0)_1$ и $(x_0, y_0)_2$ являются устойчивыми узлами. Траектории на рис. 5, б типичны для $0.038 < \gamma < 1.032$, когда особые точки $(x_0, y_0)_1$ и $(x_0, y_0)_2$ – устойчивые фокусы.

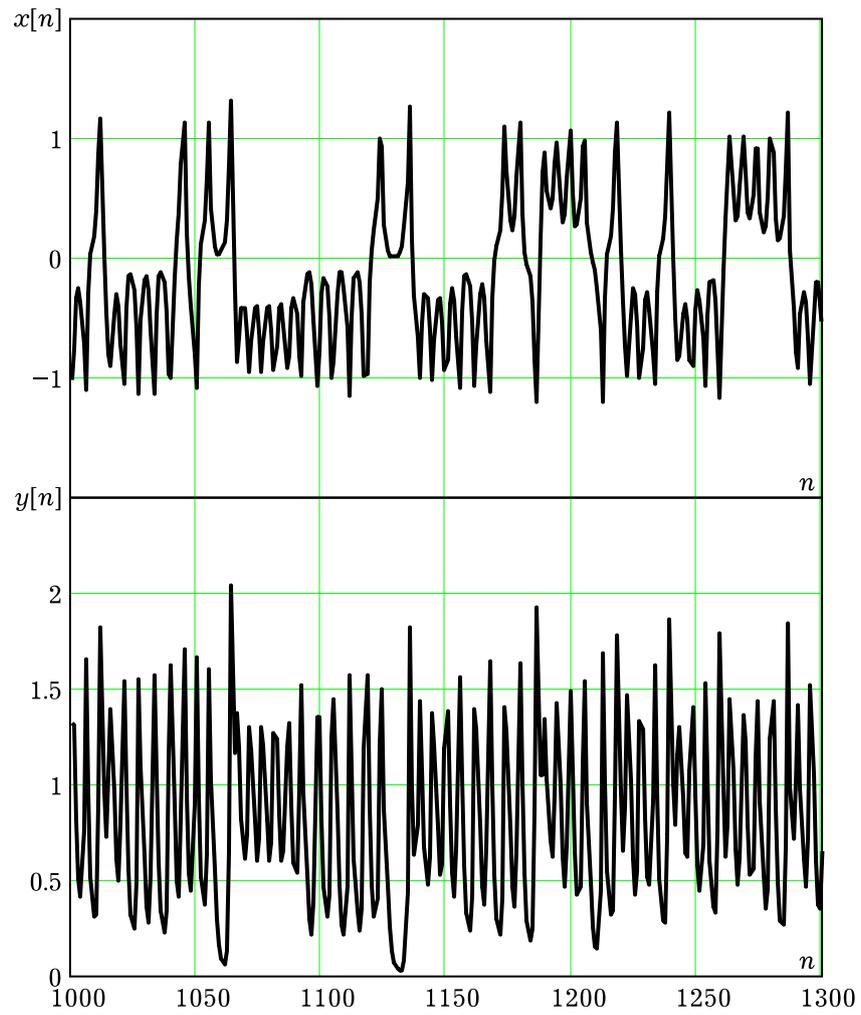


Рис. 7. Отрезки реализаций процессов $x[n]$ (вверху) и $y[n]$ (внизу)

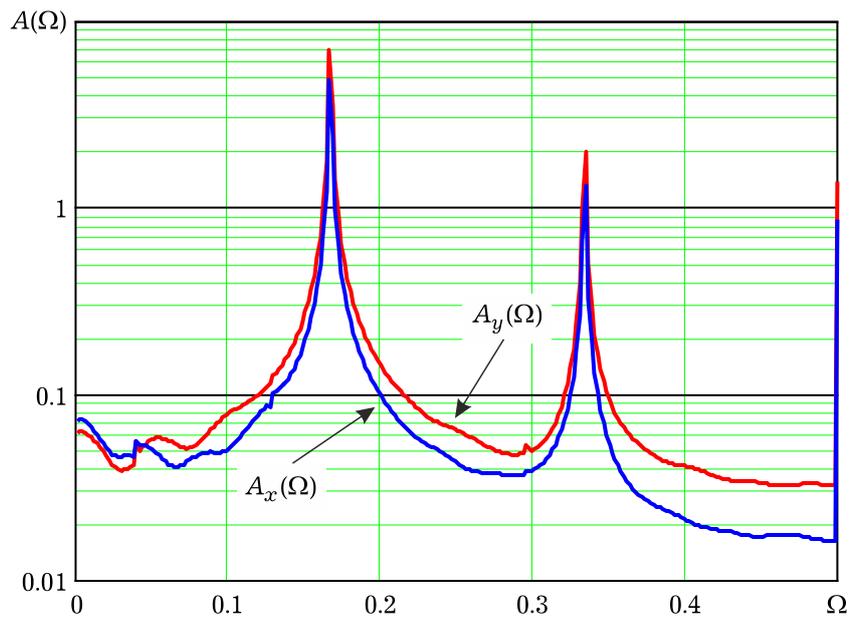


Рис. 8. Амплитудные спектры процессов $x[n]$ и $y[n]$

сы. При $\gamma > 1.032$ в ДВ-системе (12) наблюдаются регулярные автоколебания в окрестности одного из состояний $(x_0, y_0)_1$ или $(x_0, y_0)_2$, которые при дальнейшем увеличении γ хаотизируются за счет переходов между этими состояниями.

Аттрактор хаотического режима на рис. 5, в формируется при значении $\gamma = 1.34$. Поскольку сплошной спектр служит одним из эвристических критериев [3] динамического хаоса, рис. 6, на котором приведены усредненные амплитудные спектры $A_x(\Omega)$ и $A_y(\Omega)$ сигналов $x[n]$ и $y[n]$ (их реализации показаны на рис. 7), подтверждает хаотичность аттрактора. Оценки спектров получены методом Бартлетта с 512-точечным преобразованием Фурье по отрезкам реализаций (см. рис. 7) из 65536 отсчетов. Для сравнения на рис. 8 даны амплитудные спектры регулярных автоколебаний, наблюдаемых при $\gamma = 1.07$. Из спектра $A_y(\Omega)$ на рисунках удалена постоянная составляющая.

Список литературы

1. Лоренц Э.Н. Детерминированное непериодическое течение // В кн: Странные аттракторы; под ред. Я.Г. Синая, Л.П. Шильникова. М.: Мир, 1981. С. 88–116.
2. Лихтенберг А., Либман М. Регулярная и хаотическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
3. Многоликий хаос / Е.Ф. Мищенко [и др]. М.: Физматлит, 2013. 432 с.
4. Бабицкий В.И., Ланда П.С. Автоколебания в системах с инерционным возбуждением // ДАН СССР. 1982. Т. 26. № 5. С. 1083–1089.
5. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. Изд. 2-е. М.: Либроком, 2009. 426 с.
6. Зайцев В.В., Карлов Ар.В., Сарников А.Ю. Модифицированный генератор Лоренца и характеристики его автоколебаний // Физика и технические приложения волновых процессов: тезисы докладов X Международной конференции (г. Самара, 19–24 сентября 2011 г.). Самара: Книга, 2011. С. 275–277.
7. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991. 368 с.
8. Хайер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.
9. Зайцев В.В., Карлов А.В. (мл) Хаотические автоколебания в ДВ-осцилляторе с инерционной нелинейностью // Физика и технические приложения волновых процессов: тезисы докладов X Всероссийской науч.-техн. конференции. Самара: Книга, 2011. С. 262–264.
10. Зайцев В.В., Карлов Ар.В., Нураев Д.Б. Генератор хаотических автоколебаний в дискретном времени // Информационные технологии в электротехнике и электроэнергетике: материалы IX Всероссийской науч.-техн. конференции. Чебоксары: Чуваш. ун-т, 2014. С. 213–215.

About generators of dynamic chaos on the basis of the modified Lorentz's models

V.V. Zaitsev, Ar.V. Karlov, D.B. Nuraev

A mathematical model of self-oscillating system – modified Lorentz oscillator obtained by converting a standard Lorenz system is presented. It is shown that in the modified Lorentz oscillator are implemented regimes both regular and chaotic self-oscillations. A discrete model of self-oscillator with an inertial nonlinearity is obtained. The stability of the equilibrium states of the system is investigated. Graphics of amplitude spectra of chaotic and regular self-oscillation are presented.

Keywords: Lorenz system, chaotic dynamics, discrete time, nonlinear DT-systems, self-oscillator with an inertial nonlinearity, amplitude spectrum, chaotic self-oscillations.