2016 г. *Том 19, № 2*

Физика волновых процессов и радиотехнические системы

УДК 004.942

К вопросу формирования шумов и помех в комплексном виде

И.М. Лернер, Г.И. Ильин, М.И. Хайруллин

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ
420111, Российская Федерация, г. Казань
ул. К. Маркса, 10

В работе представлен новый подход, обеспечивающий решение проблемы «Амплитуда, фаза, частота», для моделирования в комплексном виде гауссова белого шума и сложных полигармонических помех, присутствующих в реальных каналах связи. Получены оценки необходимого числа компонент при формировании белого гауссова шума для достижения заданной точности его аппроксимации.

Ключевые слова: комплексный белый гауссов шум, полигармонические помехи.

Введение

В настоящее время проектирование и совершенствование современных радиотехнических систем (РТС) невозможно без применения математического моделирования, которое реализуется посредствам специального программного обеспечения [1; 2], позволяющего обеспечить снижение экономических затрат на прототипирование и создание готового продукта.

Среди систем математического моделирования значимую роль играют те, которые осуществляют моделирование на уровне функциональных блоков реальных РТС. В таких системах актуальными являются вопросы, связанные с неискаженным определением параметров радиосигнала, что особенно важно на данный момент при существующей тенденции к работе РТС в динамическом режиме, то есть, когда съем информации происходит при наличии переходных процессов.

Согласно работе [3] широко распространенные методы определения параметров радиосигнала, применяемые в указанных выше системах моделирования, в частности посредствам аналитического сигнала, основанного на преобразовании Гильберта, не позволяют получить неискаженной оценки его параметров, что требует поиска новых подходов к решению так называемой проблемы «Амплитуда, фаза, частота» (АФЧ) [4]. Новый подход в моделировании для безыскаженного определения параметров детерминированных сигналов при их передаче через сложный линейный радиотракт представлен в работе [3].

Однако, в любом канале связи реальной РТС присутствуют шум и помехи. Наиболее часто в качестве математической модели шума используется аддитивный белый гауссов шум. В тоже время воздействие множества мешающих абонентов, в частности для систем передачи информации, можно представить, как полигармоническую помеху. Несмотря на значительное число разработанных математических моделей шумов и помех, преобразованных линейными избирательными системами (ИС) и наблюдаемых на их выходах [5], сами модели построены на основе положений метода медленно меняющихся амплитуд [6] и согласно работе [3] не позволяют учитывать несимметричность амплитудно-частотных и фазочастотных характеристик ИС, что приводит к недопустимым искажениям [4].

Таким образом, возникает необходимость поиска нового подхода моделирования белого гауссова шума и полигармонических помех в комплексной форме, обеспечивающего решение проблемы АФЧ и позволяющего развить метод, представленный в работе [3].

1. Математическая модель комплексного белого гауссова шума

Разрабатываемая в данной работе математическая модель комплексного белого гауссова шума должна обеспечивать решение проблемы АФЧ. Для этого шум должен исходно формироваться в комплексной форме, что следует из результатов работы [3].

Целесообразно для формирования комплексного белого гауссова шума использовать цен-

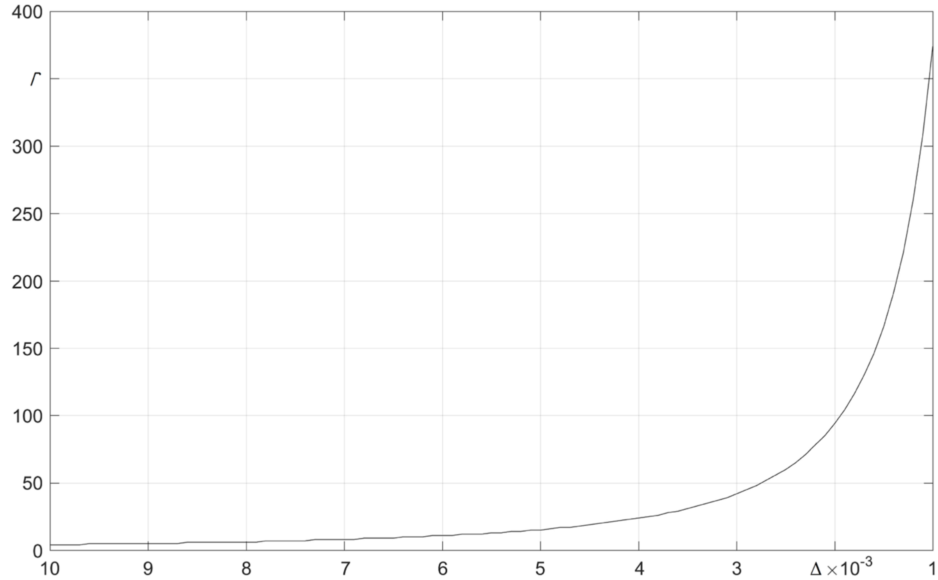

Рис. Зависимость наибольшей погрешности Δ у функции распределения формируемого комплексного белого гауссова шума от числа компонент в сумме r

тральную предельную теорему (ЦПТ), а для оценки числа необходимых членов суммы случайных величин при использовании ЦПТ − теорему Берри − Эссеена [7]. В качестве элементов X_k суммы r случайных величин $Y_r = \frac{1}{\sigma\sqrt{r}}\sum_{k=1}^{r} X_k$ (где $\sigma = \sigma_k$ − среднеквадратическое отклонение (СКО) X_k), функция распределения которой $F_r(x)$ стремиться к функции распределения нормального закона $\Phi(x)$, целесообразно брать гармонические колебания, представленные в комплексной форме, то есть $X_k = \exp\left(j\gamma_k(t)\right)$, где $\gamma_k(t)$ − полная фаза, принимающая случайные значения. Задание элемента суммы в виде $X_k = \exp\left(j\gamma_k(t)\right)$ обеспечивает однозначную взаимосвязь между его действительной и мнимой частями. Поэтому в случае обеспечения выполнения ЦПТ для действительной части получаемой суммы, ее выполнение также будет обеспечено и для мнимой части, а следовательно и суммы случайных величин Y_r, которую обозначим в виде искомого комплексного белого гауссова шума $\dot{n}(t)$.

С учетом вышеизложенного выражение для формирования комплексного белого шума $\dot{n}(t)$ примет вид

$$\begin{aligned}\dot{n}(t) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{r}}\sum_{k=1}^{r}\exp\left(j\gamma_k(t)\right) = \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{r}}\left[\sum_{k=1}^{r}\cos\left(\gamma_k(t)\right) + j\sin\left(\gamma_k(t)\right)\right] = \\ &= \mathrm{Re}\left[\dot{n}(t)\right] + j\,\mathrm{Im}\left[\dot{n}(t)\right],\end{aligned} \quad (1)$$

На основании результатов работ [7; 8] и анализа действительной части в выражении (1) можно заключить, что для выполнения условий совместного применения ЦПТ и теоремы Берри − Эссеена для одинаково распределенных слагаемых требуется, чтобы $\gamma_k(t)$ была распределена по равномерному закону в диапазоне от $-\pi$ до π. Тогда $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ в выражении (1) и $M\left[\mathrm{Re}\left[\dot{n}(t)\right]\right] = M\left[\mathrm{Im}\left[\dot{n}(t)\right]\right] = 0.$

В этом случае определение числа элементов r в сумме (1) для формирования комплексного белого гауссова шума $\dot{n}(t)$ с заданной точностью Δ производится на основе неравенства Берри − Эссеена [7]

$$\Delta = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|F_r(x) - \Phi(x)\right| \le \frac{C\rho}{\sigma^3\sqrt{r}}, \quad (2)$$

где $\rho = M\left(\left|X_k\right|^3\right) < \infty$; $C \le 0,4748$ − постоянная, наиболее точная оценка верхней границы, приведена в работе [9].

Преобразовав выражение (2) относительно r с учетом того, что $r \in \mathbb{N}$, получим выражение

$$r = \left\lceil\left(\frac{C\rho}{\sigma^3\Delta}\right)^2\right\rceil, \quad (3)$$

где $\lceil . \rceil$ − операция округления в большую сторону.

С использованием выражения (3) были построены зависимости, которые представлены на рис., позволяющие оценить требуемое число элементов r в сумме (1) в зависимости от требуемой точности Δ. При этом оценка моментов случайной величины для $\mathrm{Re}\left[X_k\right]$ была произведена с помощью численного моделирования с объемом выборки 10^6 в силу конечного объема реализуемой выборки, а постоянная C полагалась равной 0,4748.

Из рис. следует, что число требуемых элементов в сумме (1) возрастает экспоненциально с увеличением точности, при этом для обеспечения малых вычислительных затрат рекомендуется ограничится приемлемой с практической точки зрения точностью $\Delta = 4 \cdot 10^{-3}$, что соответствует $r = 24$. Дальнейшее увеличение точности приводит к резкому увеличению требуемого числа компонент для ее реализации.

2. Особенности реализации модели комплексного белого гауссова шума в системах моделирования

Выше была представлена математическая модель формирования комплексного белого гауссова шума, решающая проблему АФЧ. Рассмотрим особенность, связанную с применением полученной модели в системах математического моделирования.

Одним из основных (фундаментальных) параметров у систем моделирования является временной шаг решения $T_{реш}$, через который производится вычисление всех параметров моделируемой системы. В этом случае выражение (1) примет вид

$$\dot{n}\left(T_{реш}l\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{r}}\sum_{k=1}^{r}\exp\left(j\gamma_k\left(T_{реш}l\right)\right), \tag{4}$$

где $l = \overline{1, \frac{T_{мод}}{T_{реш}}}$; $T_{мод}$ – время моделирования.

Из выражения (4) следует, что высшая частота в спектре формируемого шума составляет $F_в = \dfrac{1}{T_{реш}}$. При этом выше частот $F_в$ при анализе модели быть не может, поскольку иначе требуется уменьшить $T_{реш}$, соответственно в рамках системы моделирования модель шума, описываемая выражением (4), является комплексным белым гауссовским шумом.

4. Формирование полигармонических сложных помех в комплексном виде

Одним из возможных подходов для формирования сложных полигармонических помех в комплексном виде, удовлетворяющих решению проблемы АФЧ, на основании спектрограмм помех, присутствующих в реальном канале связи, является их формирование из комплексного белого гауссова шума, за счет применения результатов авторегрессионных методов [10]. Согласно авторегрессионной модели [10] сигнал формируется путем пропускания дискретного белого шума через «чисто рекурсивный» фильтр N-го порядка. Спектральная плотность мощности такого сигнала пропорциональна квадрату модуля коэффициента функции передачи формирующего фильтра. А основными задачами авторегриссионной модели являются определение коэффициентов фильтра заданного порядка и оценке мощности возбуждающего белого шума. Для их решения был разработан целый ряд методов [10].

Из вышеизложенного следует, что для формирования полигармонической помехи в комплексном форме, на основании анализа помеховой ситуации в реальном канале, требуется произвести следующую последовательность действий:

1. Примененить авторегрессионные методы к интересующей нас реальной полигармонической помехе, представленной в виде вещественного сигнала, и задаваясь порядком модели формирующего фильтра, определить коэффициенты у передаточной функции и дисперсии формирующего белого шума.

2. Посредством модели формирующего фильтра произвести преобразование по отдельности действительной и мнимой части комплексного белого шума, что можно представить в виде следующих соотношений

$$\begin{gathered}\mathrm{Re}\,\dot{s}_{пом}\left(t\right) = \\ = \mathrm{Re}\left[\dot{n}\left(0\right)\right]\, h\left(t\right) + \int_0^t \mathrm{Re}\left[\dot{n}\left(\tau\right)\right]h\left(t-\tau\right)d\tau; \\ \mathrm{Im}\,\dot{s}_{пом}\left(t\right) = \\ = \mathrm{Im}\left[\dot{n}\left(0\right)\right]\, h\left(t\right) + \int_0^t \mathrm{Im}\left[\dot{n}\left(\tau\right)\right]h\left(t-\tau\right)d\tau,\end{gathered} \tag{5}$$

где $h\left(t\right)$ – переходная характеристика формирующего фильтра.

3. Преобразованные процессы на выходе фильтров использовать для формирования искомой комплексной помехи $\dot{s}_{пом}\left(t\right)$, представив ее следующим образом

$$\dot{s}_{пом}\left(t\right) = \mathrm{Re}\,\dot{s}_{пом}\left(t\right) + j\,\mathrm{Im}\,\dot{s}_{пом}\left(t\right). \tag{6}$$

Заключение

В заключении хотелось бы сделать следующий выводы:

1. Предложенная математическая модель комплексного белого гауссова шума обеспечивает решение проблемы АФЧ и расширяет возможности предложенного подхода моделирования, представленного в работе [3].

2. Полученные оценки точности аппроксимации функции распределения нормального закона, показывают, что для получения высокой точности $\Delta = 4 \cdot 10^{-3}$ достаточно учитывать в сумме всего лишь 24 элемента. Увеличение точности свыше $\Delta = 4 \cdot 10^{-3}$ приводит к резкому увеличению числа требуемых компонент r.

3. Представленный новый подход формирования реальных полигармонических помех в комплексном виде, обеспечивает решение АФЧ.

Список литературы

1. Антипенский Р. Разработка моделей преднамеренных помех системам аналоговой связи // Компоненты и технологии. 2007. № 9. С. 177–182.
2. Антипенский Р. Разработка моделей преднамеренных помех сигналам с дискретной модуляцией // Компоненты и технологии. 2007. № 10. С. 138–143.
3. Лернер И.М., Хайруллин М.И., Ильин Г.И. Модель идеального фазового детектора // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2015. Т. 18. № 4. С. 45–50.
4. Золотарев И.Д., Миллер Я.Э. Переходные процессы в колебательных системах и цепях. М.: Радиотехника, 2010. 304 с.
5. Борисов Ю.П., Цветнов В.В. Математическое моделирование радиотехнических систем и устройств. М.: Радио и связь, 1985. 176 с.
6. Евтянов С.И. Избранные труды / сост. В.Н. Кулешов. М.: Издательский дом МЭИ, 2013. 304 с.
7. Korolev V.Yu., Shevtsova I.G. On the upper bound for the absolute constant in the Berry–Esseen inequality // Theory of Probability and its Applications. 2010. Vol. 54. № 4. P. 638–658.
8. Гоноровский И.С. Радиосигналы и переходные явления в радиоцепях. М.: Связьиздат, 1954. 325 с.
9. Shevtsova I. On the absolute constants in the Berry Esseen type inequalities for identically distributed summands // arXiv.org:1111.6554 [math.PR]. URL: https://arxiv.org/pdf/1111.6554v1.pdf (дата обращения 25.09.2016)
10. Сергиенко А.Б. Signal Processing Toolbox – обзор // Matlab.Exponenta. 2014 URL: http://matlab.exponenta.ru/signalprocess/book2/#54 (дата обращения 18.09.2016)

Список сокращений индексов

реш – решения
мод – моделирования
в – высшая
пом – помеха

To a question of complex noises and interference generating

I.M. Lerner, G.I. Il'in, M.I. Khayrullin

This paper presents a new approach that solves the problem «amplitude, phase, frequency» for modeling in a complex form of a Gaussian white noise and complex polyharmonic interference based on it present in the actual channel of communication. The estimates of the required number of components in the formation of white Gaussian noise to achieve a given accuracy of approximation are obtained.

Keywords: complex white Gaussian noise, polyharmonic interference.