2016 г. Том 19, № 3

Физика волновых процессов и радиотехнические системы

УДК 621.317.621.397.13

Дробные лапласианы и распространение волн в трехмерном пространстве как квантовый процесс

А.А. Потапов[1], *А.Э. Рассадин*[2]

[1] Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН
125009, Российская Федерация, г. Москва
ул. Моховая, 11, корп. 7
[2] Нижегородское региональное отделение Российского НТОРЭС им. А.С. Попова
603006, Российская Федерация, г. Нижний Новгород
ул. Ковалихинская, 28

В статье показано, что большое число задач распространения линейных волн различной физической природы может быть сформулировано как задача о фейнманоне. Мы назвали «фейнманоном» квантовый объект, двигающийся по фрактальным траекториям в фазовом пространстве динамической системы, связанной с трехмерным волновым уравнением, которое мы рассматриваем в рамках формализма интеграла Фейнмана. Методология введения фейнманонов обладает большой общностью и обусловлена нелокальностью дробных операторов Лапласа.

Ключевые слова: квазичастица, матрица Паули, фрактальное дерево, матрица Грина, обобщенное отображение Эно, кривая Пеано, гамильтониан, квантованное поле, перенормировка, пространство Фока.

Безумцы прокладывают пути,
по которым следом пройдут рассудительные.
Ф.М. Достоевский

Введение

Хорошо известно, что задача Коши:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \Delta u, \quad u(\vec{x},0) = u_0(\vec{x}), \qquad \frac{\partial u(\vec{x},0)}{\partial t} = u_1(\vec{x}), \quad \vec{x} \in R^3, \tag{1}$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

– оператор Лапласа, описывает в рамках классической физики широкий спектр волновых процессов, протекающих во всем пространстве с амплитудой $u(\vec{x},t)$ с фазовой скоростью этих волн a. Однако подходы, развитые в статьях [1–3], позволяют переформулировать задачу (1) так, что с математической точки зрения она будет эквивалентна уравнению Шредингера, и, тем самым, позволяют провести нетривиальные аналогии между широким спектром задач радиофизики и квантовой механикой.

1. Дробные лапласианы и интеграл Фейнмана

Легко видеть, что волновое уравнение задачи (1), являющееся уравнением второго порядка, можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} = -a \cdot \sqrt{-\Delta} \cdot \psi_2, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = a \cdot \sqrt{-\Delta} \cdot \psi_1, \tag{2}$$

где $\psi_1(\vec{x},t) \equiv u(\vec{x},t)$, а линейный оператор $\sqrt{-\Delta}$ по аналогии с квантовой механикой можно назвать оператором модуля импульса.

Действие этого оператора на произвольную функцию $f(\vec{x})$ есть регуляризованная методом Адамара свертка обратного преобразования Фурье в R^3 от функции $|\,\vec{p}\,|$ с функцией $f(\vec{x})$ [4]:

$$\sqrt{-\Delta} f(\vec{x}) = -\frac{1}{\pi^2} \cdot \int \frac{f(\vec{x}\,') - f(\vec{x})}{|\,\vec{x} - \vec{x}\,'\,|^4} \cdot d^3x'. \tag{3}$$

Оператор (3) имеет обратный оператор $(-\Delta)^{-1/2}$, действующий на произвольную функцию $f(\vec{x})$ следующим образом [4]:

$$(-\Delta)^{-1/2} f(\vec{x}) = \frac{1}{2 \cdot \pi^2} \cdot \int \frac{f(\vec{x}\,') \cdot d^3x'}{|\,\vec{x} - \vec{x}\,'\,|^2}. \tag{4}$$

Это означает, что функция $\psi_2(\vec{x},t)$ может быть выражена из первого уравнения системы (2) через $\dfrac{\partial u(\vec{x},t)}{\partial t}$ с помощью формулы (4). В частности, начальные условия для системы (2) есть:

$$\psi_1(\vec{x},0) = u_0(\vec{x}), \qquad \psi_2(\vec{x},0) = -\frac{a}{2 \cdot \pi^2} \int \frac{u_1(\vec{x}\,') \cdot d^3x'}{|\,\vec{x} - \vec{x}\,'\,|^2}. \tag{5}$$

Рассмотрим функции $\psi_1(\vec{x},t)$ и $\psi_2(\vec{x},t)$ как компоненты вектора гильбертова пространства $|\,\psi(t)>$ в координатном представлении, то есть:

$$<x\,|\,\psi(t)> \equiv \psi(x,t) = \begin{pmatrix} \psi_1(\vec{x},t) \\ \psi_2(\vec{x},t) \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

тогда, используя матрицу Паули $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, можно переписать систему (2) как уравнение Шредингера для вектора $|\,\psi(t)>$:

$$i \cdot \frac{\partial\,|\,\psi>}{\partial t} = \widehat{H}\cdot|\,\psi> \qquad (7)$$

с матричным гамильтонианом:

$$\widehat{H} = a\cdot\sqrt{-\Delta}\cdot\sigma_y\,. \qquad (8)$$

Формальное решение уравнения (7) хорошо известно:

$$|\,\psi(t)> = \exp(-i\cdot t\cdot\widehat{H})\cdot|\,\psi(0)>. \qquad (9)$$

Благодаря тождеству $\sigma_y^2 = 1$ операторно-матричную экспоненту в (9) можно существенно упростить, а именно:

$$\exp(-i\cdot t\cdot\widehat{H}) = \frac{1-\sigma_y}{2}\cdot\exp(i\cdot t\cdot a\cdot\sqrt{-\Delta}) + \\ + \frac{1+\sigma_y}{2}\cdot\exp(-i\cdot t\cdot a\cdot\sqrt{-\Delta}), \qquad (10)$$

следовательно, вектор (6) может быть выражен через его начальное состояние $\psi(\vec{x},0)$ следующим образом:

$$\psi(\vec{x},t) = \int\Gamma(\vec{x},\vec{x}';t)\cdot\psi(\vec{x}',0)\cdot d^3x'\,, \qquad (11)$$

где матрица Грина для уравнения (7) есть:

$$\Gamma(\vec{x},\vec{x}';t) = \\ = \frac{1-\sigma_y}{2}\cdot G^*(\vec{x}',\vec{x};t) + \frac{1+\sigma_y}{2}\cdot G(\vec{x},\vec{x}';t). \qquad (12)$$

В формуле (12):

$$G(\vec{x},\vec{x}';t) \equiv <\vec{x}\,|\exp(-i\cdot t\cdot a\cdot\sqrt{-\Delta})\,|\,\vec{x}'>. \qquad (13)$$

Легко проверить, что скалярная функция Грина (13) равна:

$$G(\vec{x},\vec{x}';t) = -\frac{i\cdot a\cdot t}{\pi}\cdot\frac{1}{[(\vec{x}-\vec{x}')^2-(a\cdot t)^2+i\cdot 0]^2}\,. \qquad (14)$$

С другой стороны, функцию Грина (13) можно представить интегралом Фейнмана:

$$G(\vec{x},\vec{x}';t) = \int\limits_{\vec{Q}(0)=\vec{x}'}^{\vec{Q}(t)=\vec{x}} \exp[i\times \\ \times\int\limits_0^t(\vec{P}(\tau)\cdot\dot{\vec{Q}}(\tau) - a\cdot|\,\vec{P}(\tau)\,|)\cdot d\tau]\cdot d\mu, \qquad (15)$$

где

$$d\mu = \prod_{k=1}^{3}\prod_{\tau}\frac{dP_k(\tau)\cdot dQ_k(\tau)}{2\cdot\pi}$$

– псевдомера Фейнмана [5].

Таким образом, также как и в статьях [1–3], представление функции Грина (14) континуальным интегралом (15) позволяет нам ввести квантовую квазичастицу, связанную с исходным волновым уравнением (1), как объект, движущийся в шестимерном фазовом пространстве $(\vec{P},\vec{Q})$ – несмотря на то, что исходное уравнение (1) является чисто классическим. В честь выдающегося физика XX века Ричарда Фейнмана мы назвали эту квазичастицу «фейнманоном». Подчеркнем, что классическая функция Гамильтона $H(\vec{P}) = a\cdot|\,\vec{P}\,|$, фигурирующая в фазе интеграла Фейнмана (15), соответствует закону дисперсии волн для волнового уравнения (1).

Далее, в силу эрмитовости гамильтониана (8) оператор эволюции (10) системы (7) является унитарным оператором, поэтому:

$$<\psi(t)\,|\,\psi(t)> = <\psi(0)\,|\,\psi(0)> \equiv \\ \equiv \int(|\,\psi_1(\vec{x},0)\,|^2 + |\,\psi_2(\vec{x},0)\,|^2)\cdot d^3x. \qquad (16)$$

Равенство (16) означает, что для фейнманона можно ввести нормированную на единицу волновую функцию:

$$|\,\Psi(t)> = <\psi(0)\,|\,\psi(0)>^{-1/2}\cdot|\,\psi(t)>, \qquad (17)$$

также подчиняющуюся уравнению Шредингера (7), а ее двухкомпонентность можно трактовать как следствие наличия у фейнманона некоего «изотопического спина», соответствующего вращениям функции (17) в пространстве «изотопического спина».

2. Фракталы и хаос в фазовых траекториях интеграла Фейнмана

Для того, чтобы найти континуальный интеграл (15), нужно приближенно вычислить интеграл действия в экспоненте. Следуя [5], для этого необходимо разбить интервал времени $[0,t]$ на $N+1$ равную часть длиной $\Delta\tau = t/(N+1)$, на каждом отрезке $\tau\in[\tau_j,\tau_{j+1}]$ $(\tau_j = j\cdot\Delta\tau,\ j=\overline{0,N+1})$ координаты $\vec{Q}(\tau)$ аппроксимировать кусочно-линейными функциями:

$$\vec{Q}(\tau) = \vec{Q}_j + (\vec{Q}_{j+1}-\vec{Q}_j)\cdot(\tau-\tau_j)/\Delta\tau\,, \\ \tau\in[\tau_j,\tau_{j+1}], \quad j=\overline{0,N}, \qquad (18)$$

а импульсы $\vec{P}(\tau)$ аппроксимировать кусочно-постоянными функциями:

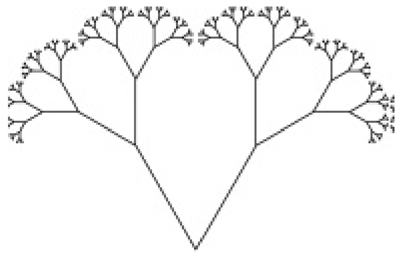

Рис. Фрактальное дерево в конфигурационном пространстве

$$\vec{P}(\tau) = \vec{P}_{j+1}, \quad \tau \in [\tau_j, \tau_{j+1}], \quad j = \overline{0, N}. \tag{19}$$

Формулы (18) означают, что в конфигурационном пространстве фейнманон движется по отрезкам прямых, которые он может проходить как в прямом, так и в обратном направлении. Из этого в частности следует, что фейнманон может двигаться по фрактальному дереву в R^3 [6], проходя последовательно каждую его ветку (рис.).

Далее, из приближения (19) следует, что динамика импульсов при переходе от j-го отрезка разбиения интервала времени $[0, t]$ к $j+1$ -му может подчиняться точечному отображению $\vec{P}_{j+1} = \vec{F}(\vec{P}_j)$, $\vec{F}: R^3 \to R^3$. Среди таких отображений имеются отображения, обладающие хаотическим поведением. В качестве примера можно привести обобщенное отображение Эно [7]:

$$\begin{aligned} &\overline{P}_1 = P_2, \quad \overline{P}_2 = P_3, \\ &\overline{P}_3 = M_1 + M_2^1 \cdot P_2 + M_2^2 \cdot P_3 + \\ &+ B \cdot P_1 + a \cdot P_2^2 + b \cdot P_2 \cdot P_3 + c \cdot P_3^2, \end{aligned} \tag{20}$$

демонстрирующее явление динамического хаоса в широком диапазоне параметров [7].

Если же рассматривать формулы (18) и (19) совместно, то из них следует, что в полном шестимерном фазовом пространстве $(\vec{P}, \vec{Q})$ траектория фейнманона представляет собой отрезки прямых, параллельные координатным осям, которые можно проинтерпретировать как шестимерное случайное блуждание. В частности, примером такой траектории является шестимерная кривая Пеано, заполняющая шестимерный гиперкуб [6].

3. Квантовополевое рассмотрение и учет затухания волн

Рассмотрим теперь квантование безмассового скалярного поля $\hat{u}(\vec{x}, t)$, подчиняющегося уравнению (1).

В рамках общепринятого подхода [8] это делается с помощью операторов рождения $\hat{c}^+(\vec{p})$ и уничтожения $\hat{c}(\vec{p})$ бозонов следующим образом:

$$\begin{aligned} &\hat{u}(\vec{x}, t) = \\ &= \int [\hat{c}(\vec{p}) \cdot \exp(i \cdot \vec{p} \cdot \vec{x} - i \cdot a \cdot |\,\vec{p}\,| \cdot t) + h.c.] \cdot d\vec{p}, \end{aligned} \tag{21}$$

где мера $d\vec{p} = \dfrac{d^3 p}{\sqrt{2 \cdot a \cdot |\,\vec{p}\,|} \cdot (2 \cdot \pi)^{3/2}}$ соответствует Бозевским каноническим коммутационным соотношениям [8]:

$$[\hat{c}(\vec{p}), \hat{c}^+(\vec{p}')] = \delta(\vec{p} - \vec{p}'), \quad [\hat{c}(\vec{p}), \hat{c}(\vec{p}')] = 0, \tag{22}$$

Подставляя квантованное поле (21) в общепринятый [8] гамильтониан безмассового скалярного поля:

$$\hat{H} = \int : \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial \hat{u}(\vec{x}, t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{a^2}{2} \cdot (\nabla \hat{u}(\vec{x}, t))^2 \right] : d^3 x, \tag{23}$$

получим:

$$\hat{H} = \int a \cdot |\,\vec{p}\,| \cdot \hat{c}^+(\vec{p}) \cdot \hat{c}(\vec{p}) \cdot d^3 p. \tag{24}$$

Оператор (24) действует в пространстве Фока [8], построенном из вакуумного вектора $|\,0>$ с помощью операторов рождения:

$$\begin{aligned} &|\,\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_s > = \\ &= \hat{c}^+(\vec{p}_1) \cdot \hat{c}^+(\vec{p}_2) \cdot \ldots \cdot \hat{c}^+(\vec{p}_s)\,|\,0> \end{aligned} \tag{25}$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} &\hat{H}\,|\,\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_s > = \\ &= a \cdot (|\,\vec{p}_1\,| + \ldots + |\,\vec{p}_s\,|) \cdot |\,\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_s > . \end{aligned} \tag{26}$$

С другой стороны, подставив квантованное поле (21) в гамильтониан:

$$\begin{aligned} &\hat{\hat{H}} = \\ &= \int : \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial \hat{u}(\vec{x}, t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{a^2}{2} \cdot (\sqrt{-\Delta} \cdot \hat{u}(\vec{x}, t))^2 \right] : d^3 x, \end{aligned} \tag{27}$$

мы получим в точности гамильтониан (24): $\hat{\hat{H}} = \hat{H}$.

Таким образом, из формулы (3) следует, что квантовая теория безмассового скалярного поля по самой своей природе нелокальна. Это означает, что терминология книги [9], обусловленная введением нелокальных членов в гамильтониан самодействия квантованного скалярного поля, является в значительной степени искусственной.

При распространении волн в реальных средах всегда присутствует некоторое затухание $\gamma > 0$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2 \cdot \gamma \cdot \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \cdot \Delta u = 0\,. \tag{28}$$

Наличие у этих волн декремента затухания γ в рамках квантового подхода вполне можно учесть.

Для этого сначала перейдем от интегрирования по импульсам в формулах (21) и (24) к суммированию по ним с помощью стандартной процедуры – заключив квантованное поле в кубический ящик и наложив на него на стенках этого ящика граничные условия Борна-Кармана.

В этом случае дискретные операторы рождения-уничтожения бозонов, занумерованные дискретным импульсом $\vec{p}$, могут быть представлены в виде линейных дифференциальных операторов:

$$\hat{c}_{\vec{p}} = \frac{a\cdot|\vec{p}|\cdot q_{\vec{p}} + \partial/\partial q_{\vec{p}}}{\sqrt{2\cdot a\cdot|\vec{p}|}}, \quad \hat{c}^{+}_{\vec{p}} = \frac{a\cdot|\vec{p}|\cdot q_{\vec{p}} - \partial/\partial q_{\vec{p}}}{\sqrt{2\cdot a\cdot|\vec{p}|}}, \tag{29}$$

а гамильтониан (24) перейдет в следующий гамильтониан:

$$\hat{H} = \sum_{\vec{p}}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial q_{\vec{p}}^2} + \frac{a^2\cdot\vec{p}^2\cdot q_{\vec{p}}^2}{2} - \frac{1}{2}\right). \tag{30}$$

Гамильтониан (30) есть совокупность счетного числа невзаимодействующих гармонических осцилляторов, поэтому квантовополевое уравнение Шредингера этим гамильтонианом имеет стационарные состояния в виде бесконечных произведений [9]:

$$\Phi(\{n_{\vec{p}}\}) = \prod_{\vec{p}} \phi_{n_{\vec{p}}}(q_{\vec{p}}), \tag{31}$$

где

$$\phi_{n_{\vec{p}}}(q_{\vec{p}}) = \left(\frac{a\cdot|\vec{p}|}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{\exp(-a\cdot|\vec{p}|\cdot q_{\vec{p}}^2)}{\sqrt{2^{n_{\vec{p}}}\cdot n_{\vec{p}}!}} \times H_{n_{\vec{p}}}(q_{\vec{p}}\cdot\sqrt{a\cdot|\vec{p}|}) \tag{32}$$

– собственная функция гармонического осциллятора с частотой $a\cdot|\vec{p}|$, в которой $H_{n_{\vec{p}}}(\ldots)$ – полиномы Чебышева – Эрмита (в этом представлении состояниям (25) пространства Фока в произведении (31) соответствует лишь конечное число сомножителей).

К каждому из этих гармонических осцилляторов можно применить теорию затухающего квантовомеханического осциллятора Калдиролы-Канаи [10; 11], и, тем самым, учесть влияние затухания в квантованной версии уравнения (28), рассмотрев следующее нестационарное квантовополевое уравнение Шредингера:

$$i\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \left\{\sum_{\vec{p}}\left(-e^{-2\cdot\gamma\cdot t}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial q_{\vec{p}}^2} + e^{2\cdot\gamma\cdot t}\cdot\frac{a^2\cdot\vec{p}^2\cdot q_{\vec{p}}^2}{2} - \frac{1}{2}\right)\right\}\cdot\Phi. \tag{33}$$

Функциям (32) в точном решении уравнения (33) отвечают так называемые сжатые коррелированные состояния [12].

Заключение

В данном докладе развиты два альтернативных подхода к уже существующему квантовополевому (21)–(26) подходу к квантованию волнового уравнения (1): подход с помошью квантовой механики (7) и интеграла Фейнмана (15) и подход с помощью квантовополевого гамильтониана (27). Этот дуализм в квантовом описании нашей системы прямо обусловлен нелокальностью степеней оператора Лапласа (3) и (4).

Подчеркнем, что внедрение аппарата дробных производных [4] в квантовую теорию поля является весьма перспективным. Так, в книге [13] с его помощью устранена проблема бесконечности собственной энергии точечных заряженных частиц, что указывает на возможность построения альтернативных уже существующим теориям теорий перенормировок в квантовой теории поля [8; 9]. Например, поскольку дробные операторы Лапласа могут быть построены в пространствах R^n, а именно, формула (3) обобщается на формулу [4]:

$$(-\Delta)^{\frac{1}{2}} f(\vec{x}) = -\pi^{-\frac{n+1}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\cdot\int\frac{f(\vec{x}') - f(\vec{x})}{|\vec{x}-\vec{x}'|^{n+1}}\cdot d^n x', \tag{34}$$

а формула (4) – на формулу [4]:

$$(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} f(\vec{x}) = \frac{1}{2}\cdot\pi^{-\frac{n+1}{2}} \times \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\cdot\int\frac{f(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^{n-1}}\cdot d^n x', \tag{35}$$

где $\Gamma(\ldots)$ – гамма-функция Эйлера, то все рассмотрения данной работы могут быть перенесены на пространства размерности $n \geq 4$. Кроме того, благодаря формулам (34) и (35) очевидным образом просматривается связь такого обобщения с перенормировкой квантовых теорий поля методом размерной регуляризации [14]. Наконец, уверенность в правильности этого направления движения дает и тот факт, что операторы (3) и (4) появились в квантовой теории поля на заре ее создания [15].

Крайне важно распространение развитых в этой работе подходов на нелинейные волновые уравнения.

Отметим, что данная статья ставит и чисто математическую проблему, а именно, для изучения немарковости динамики импульсов при их аппроксимации (19) необходимо исследовать поведение обобщенных отображений Эно в пространствах с размерностью по модулю три.

Таким образом, все приведенные выше результаты и гипотезы в совокупности означают, что фрактальная парадигма [16; 17] имеет глубокие и прочные корни в естествознании.

Список литературы

1. Потапов А.А., Рассадин А.Э. Интегралы Фейнмана как связующее звено между радиотехникой, фрактальной парадигмой и квантовой механикой // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2015. Т. 18. № 3. С. 81–88.
2. Potapov A.A., Rassadin A.E. Feynman integrals, fractal paradigm and new point of view on hydroacoustics // Eurasian Physical Technical Journal. 2015. V. 12. № 1(23). P. 3–13.
3. Потапов А.А., Рассадин А.Э., Сигов А.С. Интеграл Фейнмана, фрактальная парадигма и новый взгляд на ферромагнетизм // Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения. 2015. Т. 15. № 1. С. 7–12.
4. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
5. Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т. Континуальные интегралы; 2-е изд. М.: URSS, 2015. 336 с.
6. Новейшие методы обработки изображений. / под ред. А.А. Потапова. М.: Физматлит, 2008. 496 с.
7. Гонченко А.С., Гонченко С.В., Шильников Л.П. К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 1. С. 3–28.
8. Шварц А.С. Элементы квантовой теории поля. Бозонные взаимодействия. М.: Атомиздат, 1975. 192 с.
9. Ефимов Г.В. Нелокальные взаимодействия квантованных полей. М.: Наука, 1977. 368 с.
10. Caldirola P. Forze non conservative nella meccanica quantistica // Nuovo Cimento. 1941. V. 18. P. 393.
11. Kanai E. On the quantization of the dissipative systems // Progr. Theor. Phys. 1945. V. 3. P. 440.
12. Додонов В.В., Манько В.И. Инварианты и эволюция нестационарных квантовых систем // Труды ФИАН. 1987. Вып. 183. 288 с.
13. Неголономные, фрактальные и связанные структуры в релятивистских сплошных средах, электродинамике, квантовой механике и космологии: Кн. 2: Силовые поля в связанных и неголономных структурах / под ред. А.А. Потапова. М.: URSS, 2016. 440 с.
14. Hooft G., Beltman M. Regularization and Renormalization of Gauge Fields // Nucl. Phys. 1972. B44. P. 189–213.
15. Landau L., Peierls R. Quantenelektrodynamik in Konfigurationraum // Zs. Phys. 1930. Bd. 62. H. 3–4. S. 188–198.
16. Потапов А.А. Фрактальный метод и фрактальная парадигма в современном естествознании. Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2012. 108 с.
17. Potapov A.A. Chaos Theory, Fractals and Scaling in the Radar: A Look from 2015. Глава 12 в кн.: The Foundations of Chaos Revisited: From Poincaré to Recent Advancements / ed. by C. Skiadas. Basel: Springer Int. Publ., 2016. P. 195–218.

Fractional Laplasians and propagation of waves in three-dimensional space as quantum process

A.A. Potapov, A.E. Rassadin

In this paper it is shown that in the whole range of problems of waves propagation there is hidden feynmanon. We call by ‘feynmanon’ the quantum object moving along fractal trajectories in phase space of dynamical system related with wave equation considered by means of Feynman integral. Methodology of introduction of feynmanons is quite general and is closely connected with nonlocality of fractional Laplasians.

Keywords: quasiparticle, Pauli matrix, fractal tree, Green’s matrix, generalized Henon map, Peano curve, Hamiltonian, quantized field, renormalization, Fock space.