

Сдвиговые волны в круговой щелевой структуре пьезоэлектриков с вращающимся цилиндром

С.Н. Марышев¹, Н.С. Шевяхов²

¹ Московский физико-технический институт (государственный университет)
141700, Российская Федерация, Московская обл., г. Долгопрудный
Институтский переулок, 9

² Саровский физико-технический институт НИЯУ МИФИ
607186, Российская Федерация, Нижегородская обл., г. Саров
ул. Духова, 6

Рассмотрено циркуляционное распространение аксиально-сдвиговых волн в круговой щелевой структуре пьезоэлектриков класса $6mm$ ($4mm$, ∞m) с вращающимся пьезоэлектрическим цилиндром. В общем случае кривизна границ щели способствует излучению в окружающую среду и приводит к затуханию волн. Показано, что с превышением фазовой скорости циркуляционной щелевой волны линейной скорости вращения поверхностных точек цилиндра из-за компенсации потерь на излучение энергией, передаваемой электрическими полями через щель от цилиндра к окружающей пьезоэлектрической среде, возможно стационарное распространение щелевых волн.

Ключевые слова: пьезоэффект, граничные волны, щелевые структуры, механическая относительность.

Введение

Было показано [1], что в структуре пьезоэлектриков со щелью могут существовать локализуемые ее границами электроволновые волны. В работах [2; 3] под влиянием запросов приборостроения и стремительно развивающейся робототехники эти результаты получили обобщение на случай, когда один из пьезокристаллов щелевой структуры приводится в относительное продольное перемещение. Выяснилось, что для антисимметричной моды щелевых волн достаточные для приложений изменения в спектрах вызываются сравнительно медленным относительным перемещением в несколько миллиметров за секунду. В настоящем сообщении рассматривается щелевая структура с постоянной кривизной границ, когда относительное перемещение пьезоэлектриков реализуется вращением пьезоэлектрического цилиндра в круговой полости другой пьезоэлектрической среды, покоящейся в лабораторной системе отсчета.

1. Формулировка задачи

В представленной на рисунке геометрии задачи пьезоэлектрический цилиндр радиуса R и окружающая его пьезоэлектрическая среда с круговой полостью принадлежат к классу пьезоэлектриков $6mm$ ($4mm$, ∞m) с общей ориентаци-

ей осей симметрии высшего порядка вдоль оси z цилиндрической системы координат (r, θ, z) . Сдвиговые волны со смещениями $\mathbf{u} \parallel z$ при избранной ориентации кристаллов сопровождаются электрическими полями в плоскости распространения и ввиду коллинеарности сдвиговых смещений вращающегося цилиндра \mathbf{u}_2 вектору его угловой скорости Ω не подвержены в цилиндре влиянию инерционных сил (центробежные силы и силы Кориолиса). В итоге исходные уравнения пьезоакустики примут в лабораторной системе отсчета, привязанной к неподвижному пьезоэлектрику ($r \geq R$), известный [4] вид

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= \lambda \nabla^2 u_1 + e \nabla^2 \varphi_1, \\ \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 u_2 &= \lambda \nabla^2 u_2 + e \nabla^2 \varphi_2, \\ \nabla^2 \varphi_{1,2} &= \frac{4\pi e}{\varepsilon} \nabla^2 u_{1,2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ∇^2 – лапласиан в полярных координатах; ρ , λ , e , ε – плотность, модуль сдвига, пьезомодуль и диэлектрическая проницаемость пьезоэлектриков (цилиндр и окружающая его пьезоэлектрическая среда одинаковы по своим параметрам); t – время; Ω – угловая скорость вращения цилиндра. Сдвиговые смещения u и электрические потенциалы φ нумеруются ниж-

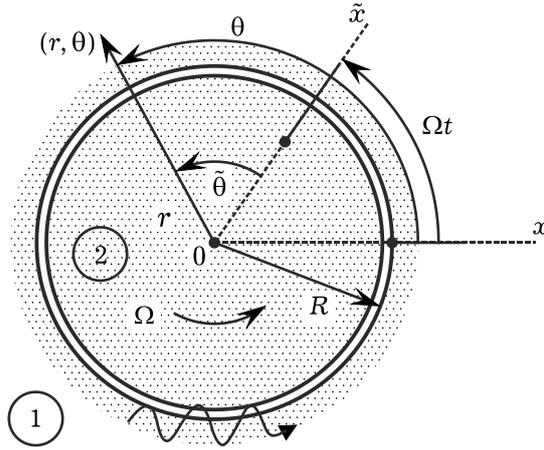


Рис. Геометрия задачи. Показаны полярные координаты, привязанные к кристаллам. Вакуумная щель между кристаллами полагается предельно тонкой

ними индексами: 1 – для неподвижного пьезоэлектрика, 2 – для вращающегося цилиндра ($r \leq R$).

Без временной экспоненты $\exp(-i\omega t)$, где ω – частота волн, решение уравнений (1), описывающее циркуляционную – распространяющуюся по азимуту щелевую волну, выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} u_1 &= Ae^{ip\theta} H_p^{(1)}(kr), \\ u_2 &= Be^{ip\theta} J_p(kr), \\ \varphi_j &= \frac{4\pi e}{\varepsilon} u_j + e^{ip\theta} r^{(-1)^j} |p| C_j, \\ j &= 1, 2. \end{aligned} \quad (2)$$

В формулах (2) не целочисленный порядок p цилиндрических функций Бесселя $J_p(x)$ и Ханкеля $H_p^{(1)}(x)$ имеет смысл азимутального волнового числа, k – волновое число сдвиговых волн в материале пьезоэлектриков.

2. Дисперсионное соотношение и результаты

Особенности циркуляционного распространения электровзвучных волн в круговой щелевой структуре пьезоэлектриков с вращающимся цилиндром можно установить из дисперсионного соотношения. Для его вывода решение (2) следует подставить в граничные условия задачи, выражающие равенство при $r = R$ электрических потенциалов, радиальных компонент электрической индукции, а также, по отдельности, отсутствие сдвигового напряжения на границе цилиндра и на поверхности полости. Из требования разрешимости образующейся системы однородных алгебраических уравнений относительно амплитудных коэффициентов A , B , $C_{1,2}$ имеем

$$\zeta_p [\ln(J_p(\zeta_p))]' = \frac{|p| K^2 \xi [\ln(H_p^{(1)}(\xi))]' }{|p| K^2 + 2\xi [\ln(H_p^{(1)}(\xi))]'}. \quad (3)$$

Квадратными скобками со штрихами в (3) обозначены логарифмические производные цилиндрических функций по аргументам $\xi = kR$, $\zeta_p = \xi(1 - p\Omega/\omega)$.

Ввиду комплексности функций Ханкеля решения уравнения (3) – спектральные зависимости $p = F(\omega, \xi)$, описывают циркуляционные волны с $p = p' + ip''$, $p'' > 0$, затухающие из-за излучения в окружающую цилиндр среду и, поэтому, не представляющие интереса. Снижения затухания можно добиться при условии $p' > \xi \gg 1$, что вместе с обычным требованием $\Omega \ll \omega$ обеспечивает малость значений ζ_p . С использованием соответствующих асимптотических разложений цилиндрических функций [5] получаем вместо (3) равенство

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\Omega}{\omega} p\right) \left[\sqrt{\frac{p^2}{\xi^2} - 1} - \frac{1}{2\xi} \right] &= \\ |p| K^2 \left[\sqrt{\frac{p^2}{\xi^2} - 1} + \frac{1}{2\xi} \right] & \quad (4) \\ = - \frac{|p| K^2 \left[\sqrt{\frac{p^2}{\xi^2} - 1} + \frac{1}{2\xi} \right]}{|p| K^2 - 2\xi \left[\sqrt{\frac{p^2}{\xi^2} - 1} + \frac{1}{2\xi} \right]}. \end{aligned}$$

При физически обоснованных параметрах правая сторона (4), где K – коэффициент электро-механической связи, отрицательна и решение в форме стационарной циркуляционной волны существует, если линейная скорость вращения точек поверхности цилиндра превышает фазовую скорость циркуляционной волны ($\omega < \Omega p$). В таком случае происходит эффективная перекачка энергии от вращающегося цилиндра в парциальную волну, распространяющуюся по поверхности полости во внешней среде. Это позволяет компенсировать ее потери на излучение в пьезоэлектрик, окружающий цилиндр, и в целом обеспечивает стационарное распространение циркуляционной щелевой волны. Характерно, что условие $\omega < \Omega p$ согласуется с выявленной ранее [4] областью резких резонансных пиков спектра поперечного сечения рассеяния плоской монохроматической волны вращающимся пьезоэлектрическим цилиндром.

Правые стороны уравнений (3), (4) являются четными функциями p , тогда как левые их стороны из-за линейной зависимости $\zeta_p = \xi(1 - p\Omega/\omega)$ от p этим качеством не обла-

дают. В силу данного обстоятельства циркуляционные щелевые волны обладают невязимностью распространения: при обращении распространения ($p \rightarrow -p$) или изменении направления вращения цилиндра ($\Omega \rightarrow -\Omega$) теряют стационарность распространения. Дисперсионные спектры медленных ($p > \xi$) стационарных циркуляционных волн имеют вид монотонно спадающих зависимостей $\omega = \omega(p)$.

Работа выполнена по гранту РФФИ в рамках проекта № 14-07-00621.

Список литературы

1. Гуляев Ю.В., Плесский В.П. Щелевые акустические волны в пьезоэлектрических материалах // Акустический журнал. 1977. Т. 29. № 3. С. 716–723.
2. Гуляев Ю.В., Марышев С.Н., Шевяхов Н.С. Электрозвуковая волна в зазоре пьезоэлектрической пары с относительным продольным перемещением // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32. № 20. С. 18–26.
3. Вилков Е.А., Марышев С.Н., Шевяхов Н.С. Электрозвуковые волны щелевого типа в слоистой структуре относительно перемещающихся пьезоэлектриков // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2011. Т. 14. № 2. С. 84–92.
4. Марышев С.Н., Шевяхов Н.С. О влиянии вращения пьезоэлектрического цилиндра в полости пьезоэлектрика на рассеяние сдвиговой волны // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2010. Т. 13. № 3. С. 35–42.
5. Корнев Б.Г. Введение в теорию бесселевых функций. М.: Наука, 1971. 288 с.

Shear waves in a circular gap structure of piezoelectric crystals with rotating cylinder

S.N. Maryshev, N.S. Shevyakhov

The circumferential propagation of shear-axial waves in a circular gap structure of 6mm(4mm)-class symmetry piezoelectric crystals with rotating piezoelectric cylinder are considered. Generally the curvature of gap boundaries leads to attenuation waves due to radiation in environment. It is shown that with excess of gap wave phase velocity to linear velocity of surface of rotating cylinder the stationary propagation of gap waves is possible.

Keywords: piezoelectric effect, surface waves, gap structures, mechanical relativity.
