

## Преобразование цветового пространства МКО в строго равноконтрастное на основе тензорного исчисления

Л.Д. Ложкин, А.А. Вороной, А.А. Солдатов

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики  
443010, Российская Федерация, г. Самара  
ул. Л. Толстого, 23

В данной статье рассматриваются вопросы разработки равноконтрастного цветового пространства. В этом новом цветовом пространстве известные эллипсы (для двухмерного пространства) или эллипсоиды в трехмерном пространстве трансформируются в равные окружности или сферы (шары), соответственно. Важно иметь равноконтрастную цветовую систему, в которой геометрическая разница цветовых различий не зависела бы от сравниваемых цветов (цветностей) на цветовой диаграмме.

*Ключевые слова:* пороги цветоразличения, цветовой тензор, тензор кривизны, колориметрическая система координат, МКО, эллипсы Мак Адама.

### Введение

В начале 40-х годов прошлого столетия Мак Адам опубликовал результаты экспериментов по определению порогов цветоразличения глазом человека [1]. Эти результаты были повторены Стайлсом [2] и Вышецки [3] и впоследствии повторены Мак Адамом. Все результаты хорошо согласуются между собой, и приведены в колориметрической системе МКО 1931 г.  $(x, y)$  и хорошо известны специалистам. На диаграмме МКО 1931 г.  $(x, y)$  результаты выглядят как эллипсы, причем размеры и ориентация эллипсов зависит от значения цветности. Наличие эллипсов, а не кругов говорит о недостатках колориметрической системы МКО 1931 г.  $(x, y)$ .

Впоследствии многие авторы разрабатывали так называемые равноконтрастные цветовые системы, к которым, к примеру, можно отнести: МКО 1960 г.  $(u, v)$ , МКО 1976 г.  $(a^*, b^*)$  и другие. Но как, показали расчеты [4, с. 294, табл. 7.2] ни одна существующая колориметрическая система не позволяет отразить на цветовой диаграмме вместо эллипсов Мак Адама – равновеликие окружности. В [4; 5] приведены результаты разработки квази-равноконтрастных цветовых пространств. Эти разработки опираются на использование тензорного аппарата, в частности метрического тензора.

Большой интерес представляет работа Фарнсворта [6], в которой автор описал криволиней-

ные варианты цветового графика МКО 1931 г.  $(x, y)$ , соответствующие распределению цветностей по Мак Адаму, Ньюхохлу, Никерсон и Джадду (рис. 1, показывающий распределение ренотаций Манселла). Таким образом, кажется, что Фарнсворту удалось доказать возможность трансформации эллипсов Мак Адама в окружности равного диаметра, не обращаясь к пространству частично отрицательной и частично положительной кривизны. Однако это может иметь место в предположении, что по своей природе экспериментальные данные наблюдателя изменились до 20 %. На рис. 2 показаны эллипсы Мак Адама в пространстве Фарнсворта.

Поверхность цветового пространства любой системы можно характеризовать эллиптичностью поверхности [7], определяемую в соответствии:

$$\varepsilon = \frac{L_{\max}}{L_{\min}} - 1,$$

где  $L_{\max}$  – максимальная ось эллипса;  $L_{\min}$  – минимальная ось эллипса.

В таблице приведены значения эллиптичности поверхности цветового пространства некоторых систем.

В этой же таблице приведены значения порога цветоразличения для стандартного наблюдателя МКО и максимальное отношение площадей эллипсов Мак Адама.

Из таблицы видно, что ни одна цветовая поверхность не имеет значения  $\varepsilon = 0$ , которое было

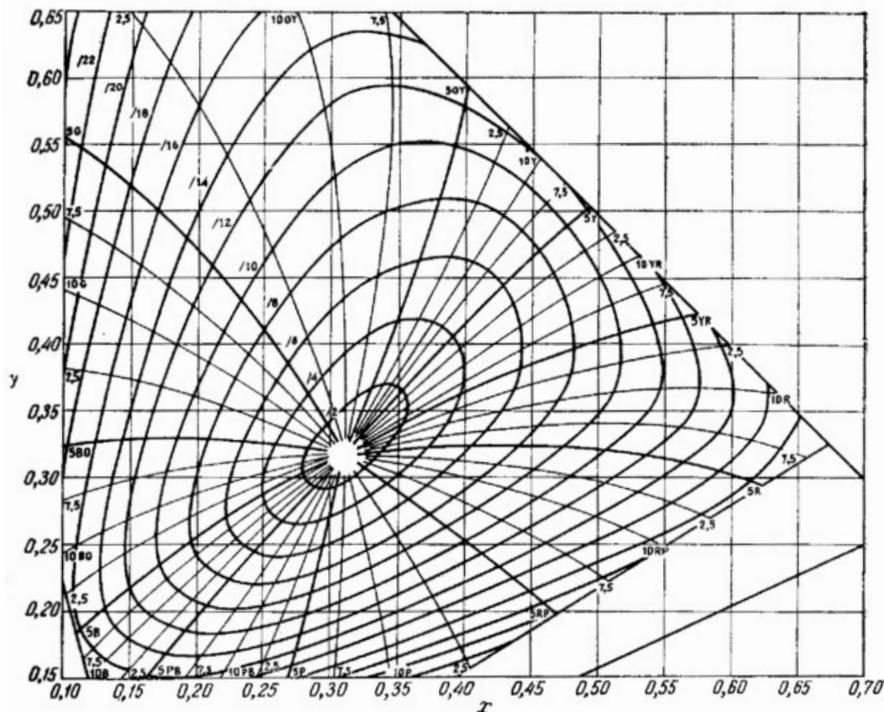


Рис. 1. Часть цветового графика МКО 1931 ( $x, y$ ), показывающая линии постоянного цветового тона и насыщенности по Манселлу для цветов постоянным значением светлоты [3]

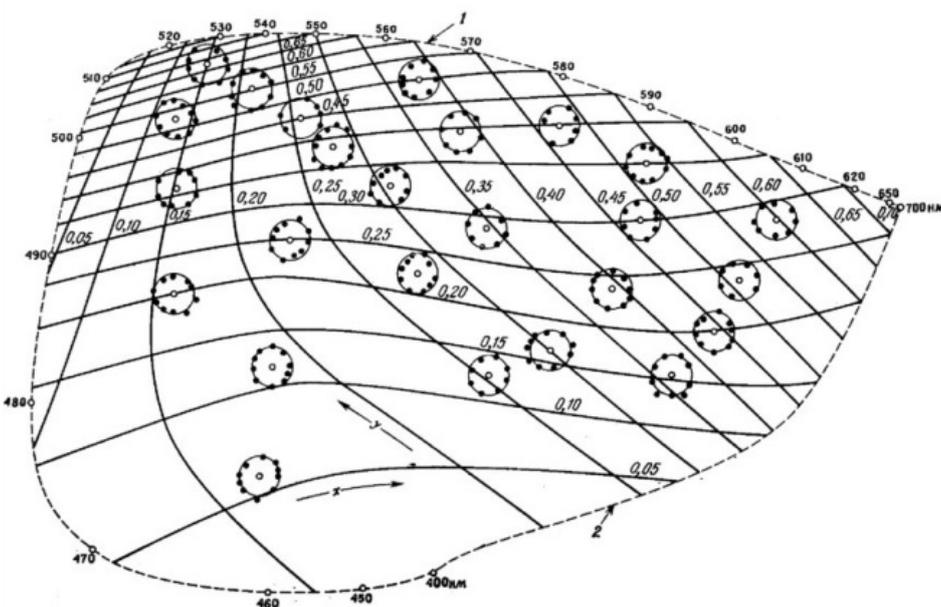


Рис. 2. Нелинейное преобразование цветового графика МКО 1931 г. ( $x, y$ ), на котором эллипсы Мак Адама близки к окружностям равного диаметра [6]: 1 – линия спектральных цветов; 2 – линия пурпурных цветов

Таблица

Характеристики поверхности цветовых пространств

№ п/п	Наименование цветовой системы	Порог цветоразличения	Максимальное отношение площадей эллипсов Мак Адама	Значение эллиптичности цветовой поверхности ( $\epsilon$ )
1.	МКО 31 ( $r, g, b$ )	0,0146	158,8	24,0
2.	МКО 31 ( $x, y$ )	0,0059	83,0	25,9
3.	МКО 60 ( $u, v$ )	0,0038	7,2	2,2
4.	МКО 76 ( $u^*, v^*$ )	4,9275	228,8	13,9
5.	МКО LAB	3,0624	22,8	15,4
6.	Система ( $\alpha, \beta$ ) [2]	0,1932	4,54	0,4

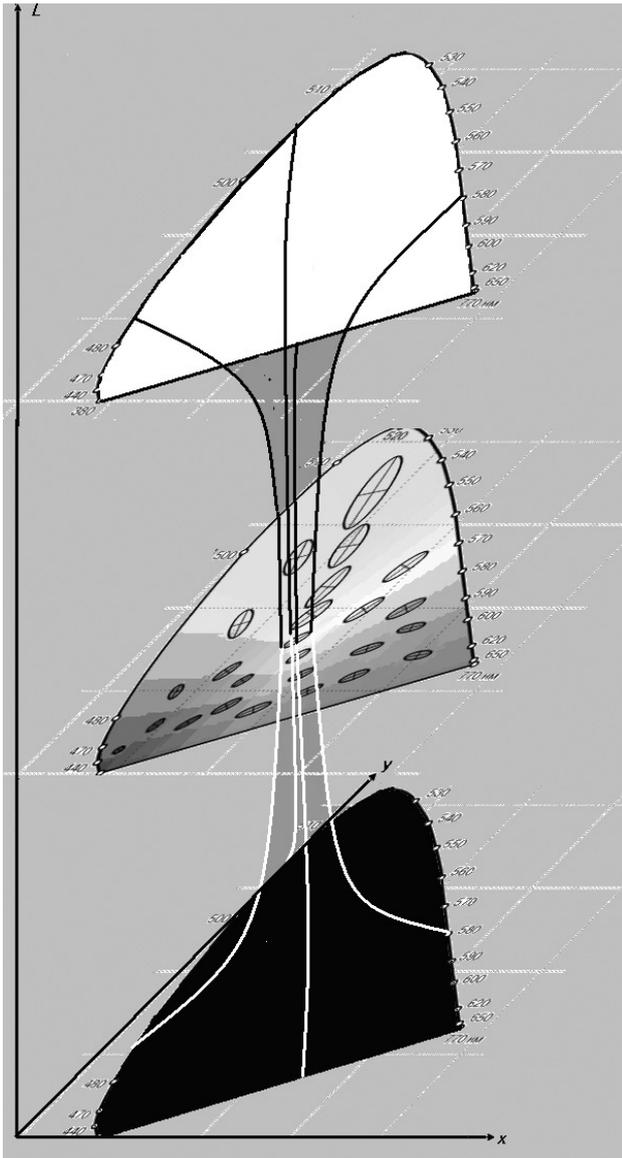


Рис. 3. Зависимость величины порогов цветоразличения от яркости стимула

бы идеально для поверхности цветового пространства.

Целью настоящей статьи является разработка равноконтрастной цветовой системы.

### 1. Постановка задачи и цветовой тензор

Необходимо отметить, что Мак Адам проводил эксперименты по определению порогов цветоразличения при постоянной яркости излучения стимула. Поэтому, его результаты интерпретировались в двумерном цветовом пространстве, в частности на цветовом локусе МКО 1931 г. ( $x$ ,  $y$ ). Автором данной статьи был разработан программный комплекс по измерению порогов цветоразличения [4; 8; 9]. Впоследствии этот программный комплекс был изменен и до-

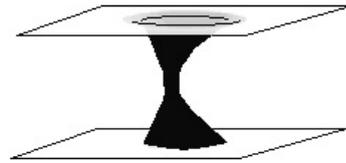


Рис. 4. Сечение пространства Шварцшильда при  $T = 0$

полнен с учетом зависимости порога цветоразличения от значения яркости стимула. Интерпретация результатов измерений может быть представлена, как это показано на рис. 3. Однополостный гиперболоид (рис. 3) сильно похож на результат решения уравнения Эйнштейна, описывающего состояние пространства-времени, решенное Шварцшильдом [10], приведенный на рис. 4.

Известно, что уравнение Эйнштейна имеет вид [10]:

$$R_{ab} - \frac{R}{2}g_{ab} + \Lambda g_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ab}, \quad (1)$$

где  $R_{ab}$  – тензор кривизны Риччи, получающийся из тензора кривизны пространства-времени  $R_{abcd}$  посредством свертки его по паре индексов;  $R$  – скалярная кривизна, то есть свернутый тензор Риччи;  $g_{ab}$  – метрический тензор;  $\Lambda$  – космологическая постоянная;  $T_{ab}$  представляет собой тензор энергии-импульса материи;  $\pi$  – число;  $c$  – скорость света в вакууме;  $G$  – гравитационная постоянная Ньютона. Так как все входящие в уравнения тензоры симметричны, то в четырехмерном пространстве-времени эти уравнения равносильны скалярным уравнениям.

Уравнения А. Эйнштейна не налагают никаких ограничений на используемые для описания пространства-времени координаты, т. е. обладают свойством общей ковариантности, но они ограничивают выбор лишь 6 из 10 независимых компонент симметричного метрического тензора. Поэтому их решение неоднозначно без введения некоторых ограничений на компоненты метрики, соответствующих однозначному заданию координат в рассматриваемой области пространства-времени, и обычно называемых координатными условиями.

Как видно в (1), в правой части используются такие физические константы, как гравитационная постоянная Ньютона  $G$ , скорость света  $c$ , и тензор энергии-импульса материи  $T_{ab}$  значения, компонент которого равно нулю для момента наступления статического режима состояния материи в замкнутом пространстве-времени, т. е. движение материи будет отсутствовать. Кос-

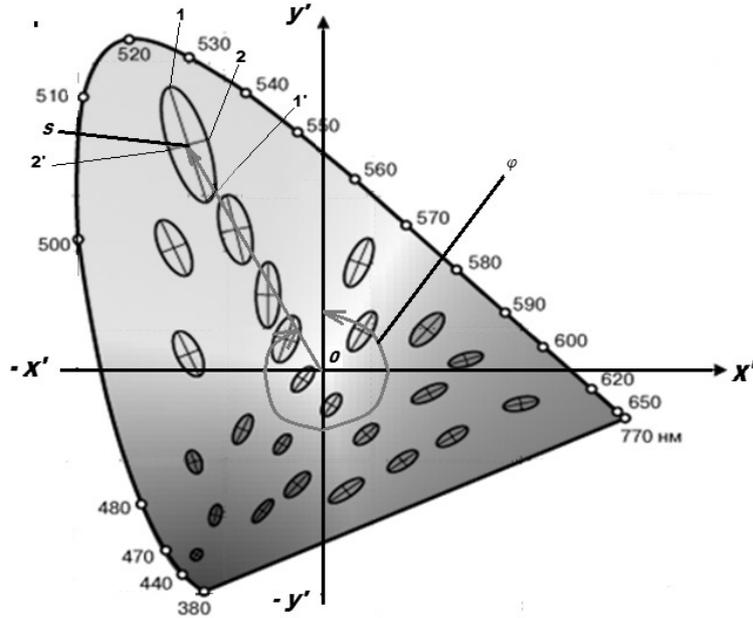


Рис. 5. Пороги Мак Адама в системе координат  $x' y'$

мологическая постоянная  $\Lambda$  также (для нашего случая цветового пространства) равна нулю, тогда уравнение (1) примет следующий вид:

$$R_{ab} - \frac{R}{2} g_{ab} = 0, \tag{2}$$

Введем понятие цветовой тензор. Любой точке на цветовом локусе можно сопоставить некий цветовой вектор. Для начала, свяжем такие понятия как цветовая насыщенность и цветовой тон с системой координат МКО 1931 ( $x, y$ ). Для чего сделаем параллельный перенос осей  $x, y$  так, что бы начало координат совпадало с координатами «белого» цвета. Очевидно, для системы МКО 1931 ( $x, y$ ) это будет цветность равно энергетического источника  $E$  с координатами  $x_E = 0,333$  и  $y_E = 0,333$ . Тогда цветовой locus будет иметь вид, как это изображено на рис. 5.

На рис. 5 длина вектора  $OS$  отображает цветовую насыщенность центра эллипса Мак Адама, а угол  $\varphi$  – цветовой тон.

Поскольку все вектора типа  $OS$  (рис. 5) начинаются из нулевой точки, то длина этих векторов (цветовая насыщенность) определяется простым выражением типа:

$$D = \sqrt{x^2 + y^2 + L^2},$$

где  $x, y$  – координаты конца вектора в системе координат  $x' y'$ ;  $L$  – яркость точки конца вектора.

Согласно закону Бугера-Фехнера порог по яркости равен 0,01 от текущей яркости. Цветовой вектор может быть представлен следующей матрицей:

$$C_i = \begin{bmatrix} C_m \\ C_n \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan \left( \frac{y'_y}{x'_y} \right) \\ \frac{\sqrt{x'^2_y + y'^2_y + L'^2_y}}{\sqrt{x'^2_a + y'^2_a + L'^2_a}} \\ L'_y \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Разложив вектор (3) по ортам базиса  $e_1, e_2, e_3$ , получим двух валентный симметричный цветовой тензор  $C_{ab}$ . Суть этого тензора заключается в задании координат для метрического тензора в (2) конкретной точки на цветовой диаграмме. Здесь мы будем рассматривать систему МКО 1931 г. ( $x, y$ ), причем, с переносом начало координат, как это было сказано выше. Пожалуй, в качестве цветовой диаграммы можно использовать любую из известных систем МКО. С учетом сказанного, перепишем (3):

$$C_{ab} = \begin{bmatrix} C_m & 0 & 0 \\ 0 & C_n & 0 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan \left( \frac{y'_y}{x'_y} \right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{x'^2_y + y'^2_y + L'^2_y}}{\sqrt{x'^2_a + y'^2_a + L'^2_a}} & 0 \\ 0 & 0 & L_y \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Цветотехнические величины  $C_m$ ,  $C_n$  и  $L$  (или значения координат) можно найти в работе [11].

## 2. Преобразование координат перехода в цветное криволинейное пространство

Для того чтобы преобразовать цветное пространство в криволинейное, необходимо заменить старый базис  $e_1, e_2, e_3$  на новый  $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ . Для этого необходимо использовать матрицу перехода  $[S]$ , которая устанавливает связь между старым и новым базисами [12]:

$$\tilde{e}_i = \sum_{j=1}^3 S_i^j e_j, \quad i = 1, 2, 3.$$

Матрица  $[S]$ , определяется [11]:

$$[S] = \begin{vmatrix} S_1^1 & S_1^2 & S_1^3 \\ S_2^1 & S_2^2 & S_2^3 \\ S_3^1 & S_3^2 & S_3^3 \end{vmatrix}. \quad (5)$$

И называется матрицей прямого перехода от старого базиса  $e_1, e_2, e_3$  к новому  $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ . Каждый столбец матрицы  $[S]$  (5) определяет орты базиса:

$$e_1 = \begin{vmatrix} S_1^1 \\ S_1^2 \\ S_1^3 \end{vmatrix}; \quad e_2 = \begin{vmatrix} S_2^1 \\ S_2^2 \\ S_2^3 \end{vmatrix}; \quad e_3 = \begin{vmatrix} S_3^1 \\ S_3^2 \\ S_3^3 \end{vmatrix}.$$

И аналогично, матрица  $[T]$ , которая является обратной матрице  $[S]$ , будет являться матрицей обратного перехода от нового базиса  $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$  к старому  $e_1, e_2, e_3$  т. е.

$$[T] = [S]^{-1},$$

$$e_i = \sum_{j=1}^3 T_i^j \tilde{e}_j, \quad i = 1, 2, 3.$$

Поскольку изначально вектора, характеризующие размеры эллипсоида взаимно перпендикулярны, притом в обеих координатных системах, то матрица Якоби [13] будет сингулярной матрицей, а следовательно ее определитель (якобиан матрицы) равен нулю.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{vmatrix},$$

$$\det(J) = 0,$$

где  $u_1, u_2, u_3$  – координаты точки в старом базисе  $e_1, e_2, e_3$ , отображенные в новом базисе  $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ .

Кроме того, известно, что  $r_0 = \det(J)$  [13], то получается, что в новом базисе  $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ , радиус сферы  $r_0$  будет равен нулю, что означает нуль-пространство, т. е. эллипсоид трансформируется в точку. Это можно объяснить следующим образом. Эллипсы, полученные Мак Адамом (рис. 3) с точки зрения глаза наблюдателя рассматриваются как бы «изнутри эллипса», а «с наружи» эти эллипсы видны как точки, имеющие нулевую протяженность. Таким образом, в данном случае действует закон относительности.

Согласно сказанному, следует, что в качестве матрицы перехода из одного базиса в другой матрицу Якоби с любой внешней функцией  $W(x_1, x_2, x_3)$  в этом случае использовать нельзя.

Обход указанных трудностей, для решения поставленной задачи будет описано ниже.

## 3. Тензорное поле цветного локуса

Согласно определению, если вектор или тензор связаны с конкретной точкой, а другая группа векторов либо других тензоров связаны с другими точками некоторой области, то эта область называется либо векторным, либо тензорным полем [12; 13]. В дальнейшем будем говорить только о тензорном поле. Чтобы отметить конкретную точку пространства  $M$ , с которой связан конкретный тензор данного тензорного поля, запишем  $M$  как аргумент  $R = R(M)$ .

Очевидно, что сказанное выше относится и к цветному локусу с конкретными эллипсами Мак Адама.

Далее, каждый порог цветоразличения (эллипс Мак Адама для порогов по цветности, либо эллипсоид для порогов цветоразличения) – представляют собой замкнутую фигуру и в случае рассмотрения трехмерного цветного пространства – эллипсоид, то в качестве системы координат удобней применять сферическую систему – являющейся, как частным случаем криволинейной системой координат.

В декартовых координатах отображение  $M \Leftrightarrow (x^1, x^2, x^3)$  задается посредством векторов и базисов. В сферических координатах  $x^1 = r$  – расстояние от точки  $M$  до центра сферы, а  $x^2$  и  $x^3$ , соответственно два угла  $\theta$  и  $\psi$  (азимут и склонение).

Таким образом, в сферических координатах каждую точку  $M$  представляем как радиус-вектор  $\eta_0$  в некоторой вспомогательной декартовой системе координат. Рассмотрим отображение  $\eta_0 \Leftrightarrow (x^1, x^2, x^3)$ . Сам радиус-вектор  $\eta_0$  представляется тремя координатами в базисе  $e_1, e_2, e_3$  вспомогательной системы координат:

$$\eta_0 = \sum_{i=1}^3 y^i e_i.$$

Здесь имеем биективное отображение  $(y^1, y^2, y^3) \Leftrightarrow (x^1, x^2, x^3)$  [13]. Это числовое отображение и может обрабатываться в числовой форме. Левая стрелка представляется тремя функциями от трех переменных [13]:

$$\begin{aligned} y^1 &= y^1(x^1, x^2, x^3), \\ y^2 &= y^2(x^1, x^2, x^3), \\ y^3 &= y^3(x^1, x^2, x^3). \end{aligned} \quad (6)$$

Для правой стрелки имеем:

$$\begin{aligned} x^1 &= x^1(y^1, y^2, y^3), \\ x^2 &= x^2(y^1, y^2, y^3), \\ x^3 &= x^3(y^1, y^2, y^3). \end{aligned} \quad (7)$$

Продифференцируем все функции (6), (7). Рассмотрим частные производные (6) и (7). Введем обозначения [13]:

$$S_j^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}; \quad T_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}. \quad (8)$$

Частные производные (8) являются ни что иное, как матрицы Якоби [13], если их разместить в две квадратные матрицы  $S$  и  $T$ :

$$\begin{aligned} [S_j^i] &= S_j^i(x^1, x^2, x^3); \quad [T_j^i] = T_j^i(y^1, y^2, y^3); \\ i &= 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Подставив в (7) аргументы  $S_j^i$ , (или в (6) аргументы  $T_j^i$ ), можно сделать так, чтобы они имели общий набор аргументов [13]:

$$\begin{aligned} S_j^i &= S_j^i(y^1, y^2, y^3); \\ T_j^i &= T_j^i(y^1, y^2, y^3). \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} S_j^i &= S_j^i(x^1, x^2, x^3); \\ T_j^i &= T_j^i(x^1, x^2, x^3). \end{aligned} \quad (10)$$

Из (9) или (10) видно, что матрицы  $[S]$  и  $[T]$  взаимно обратные, т. е.  $[T] = [S]^{-1}$ .

#### 4. Кривизна пространства цветоразличения

В уравнение Эйнштейна входит тензор кривизны – тензор Риччи. Рассмотрим структуру данного тензора. Как известно [13], тензор Риччи  $R_{rj}$  был получен из классического тензора кривизны путем его свертки:

$$R_{rj} = \sum_{k=1}^2 R_{rkj}^k, \quad (11)$$

где  $R_{rkj}^k$  – тензор кривизны.

Формулу (11) для тензора Риччи можно преобразовать к следующему виду:

$$R_{rj} = \sum_{r=1}^2 \sum_{j=1}^2 g^{rj} R_{irkj}.$$

Из тензора Риччи можно построить скаляр  $R$  по следующей формуле [13]:

$$R = \sum_{r=1}^2 \sum_{j=1}^2 R_{rj} g^{rj}. \quad (12)$$

Скаляр  $R(x^1, x^2)$ , определенный (12) – есть скалярная кривизна пространства поверхности в точке с координатами  $x^1, x^2$ . Скалярная кривизна – это полная свертка тензора кривизны  $R$ :

$$R = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 R_{ij}^{kr}.$$

Переход от компонент тензора  $R_{ij}^{kr}$  к скалярной кривизне  $R$  – это на первый взгляд потеря информации, т. е. шестнадцать величин заменяются одной. Однако в двумерном случае никакой потери информации не происходит. Действительно, компоненты тензора кривизны  $R_{ij}^{kr}$  кососимметричны как по верхней паре индексов, так и по нижней паре индексов. При совпадении  $k = r$  или  $i = j$ , они зануляются. Единственные не нулевые компоненты – это  $R_{12}^{12}, R_{12}^{21}, R_{21}^{12}, R_{21}^{21}$ , причем  $R_{12}^{12} = R_{21}^{21} = -R_{12}^{21} = -R_{21}^{12}$ . Тогда, в силу сказанного, получаем:

$$R = R_{12}^{12} + R_{21}^{21} = 2R_{12}^{12}.$$

Но согласно формуле Гаусса [14] следует:

$$R = 2K, \quad (13)$$

где  $K$  – гауссова кривизна.

Средняя кривизна поверхности в точке  $M$ , согласно [14], есть величина:

$$K = K_1 + K_2 = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2},$$

где  $r_1$  и  $r_2$  – радиусы кривизны взаимно-перпендикулярных кривых в точке  $M$  [14].

В случае сферической поверхности  $r_1 = r_2 = r_0$  имеем:

$$K = \frac{2}{r_0}. \tag{14}$$

Подставим (14) в (13) получим скалярную кривизну сферы порога цветоразличения:

$$R = \frac{4}{r_0}. \tag{15}$$

Значение  $r_0$  можно задать совершенно произвольно, например,  $r_0 = 1$ . Но если оставить координаты тензоров тензорного поля в соответствии с колориметрическими системами МКО 1931 г. ( $x, y$ ) МКО 1960 г. ( $u, v$ ), то значения радиуса сферы порога цветоразличения, равно-го единицы будет не пропорционально велико. Вполне естественно, принять значение  $r_0 = 0,01$  равное величине порога цветоразличения для исходной цветовой системы (см. таблицу), тогда из (15) следует  $R = 677,966$  (для системы МКО 1931 г. ( $x, y$ ))

Уравнение (1) с учетом  $R = 677,966$  можно записать:

$$338,983g_{ab}(M) = 677,966,$$

Проведя упрощение, получим:

$$g_{ab}(M) = 2,$$

где координаты метрического тензора  $g_{ab}$  определяется тензором  $C_{ab}$  для конкретной точки  $M$  цветового локуса.

### 5. Согласованность метрики и связности

Поскольку рассматриваются криволинейные координаты в евклидовом пространстве, то в этом пространстве имеем скалярное произведение ( $x, y$ ) и метрический тензор:

$$(x, y) = |x||y| \cos \varphi,$$

где  $\varphi$  – угол между векторами  $x$  и  $y$ .

$$g_{ij} = (e_i, e_j). \tag{16}$$

Метрический тензор (16) преобразуем в базис подвижного репера  $E_i$  и  $E_j$ :

$$g_{ij} = (E_i, E_j).$$

В декартовых координатах все компоненты метрического тензора являются константы, так как базисные векторы  $e_1, e_2, e_3$  – константы. Ковариантная производная в декартовых координатах приводит к дифференцированию  $\nabla_p = \partial / \partial x^p$ .

$$\begin{aligned} \nabla_p X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} &= \frac{\partial X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial y^p} + \\ &+ \sum_{a=1}^r \cdot \sum_{m_a=1}^3 \Gamma_{pm_a}^{i_a} X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots m_a \dots i_r} - \dots \\ &\dots - \sum_{a=1}^s \cdot \sum_{n_a=1}^3 \Gamma_{pj_a}^{n_a} X_{j_1 \dots n_a \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}. \end{aligned}$$

Поэтому, здесь имеем:

$$\nabla_p g_{ij} = 0. \tag{17}$$

Но, согласно [13]  $\nabla_p$  – это тензор и если все его компоненты в некой системе координат равны нулю, то они равны нулю и в любой другой системе координат. Поэтому тождество (17) справедливо и в криволинейных координатах тоже.

Компоненты метрического тензора  $g_{ij}$  и компоненты связности  $\Gamma_{ij}^k$  в произвольной системе координат на поверхности связаны соотношением [13]:

$$\nabla_k g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - \sum_{q=1}^2 \Gamma_{ki}^q g_{qj} - \sum_{q=1}^2 \Gamma_{kj}^q g_{iq} = 0,$$

выражающим условие согласованности метрики и связности на этой поверхности.

Формула для компонентов связности имеет вид [13]:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^2 g^{krr} \left( \frac{g_{rj}}{\partial u^i} + \frac{g_{ir}}{\partial u^j} - \frac{g_{ij}}{\partial u^r} \right).$$

Условие согласованности метрики и связности можно записать в форме следующих соотношений:

$$\nabla g = 0, \quad \nabla \tilde{g} = 0.$$

Компоненты метрического тензора в сферических координатах определяются [13]:

$$g_{ij} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \sin^2(v) \end{vmatrix}.$$

Компоненты связности:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0, \quad \Gamma_{12}^1 = 0, \quad \Gamma_{21}^1 = 0, \quad \Gamma_{13}^1 = 0, \\ \Gamma_{31}^1 &= 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -\rho, \quad \Gamma_{23}^1 = 0, \quad \Gamma_{32}^1 = 0, \\ \Gamma_{33}^1 &= -\rho \sin^2(v). \\ \Gamma_{11}^2 &= 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \rho^{-1}, \quad \Gamma_{21}^2 = \rho^{-1}, \quad \Gamma_{13}^2 = 0, \\ \Gamma_{31}^2 &= 0, \quad \Gamma_{22}^2 = 0, \quad \Gamma_{23}^2 = 0, \quad \Gamma_{32}^2 = 0, \end{aligned}$$

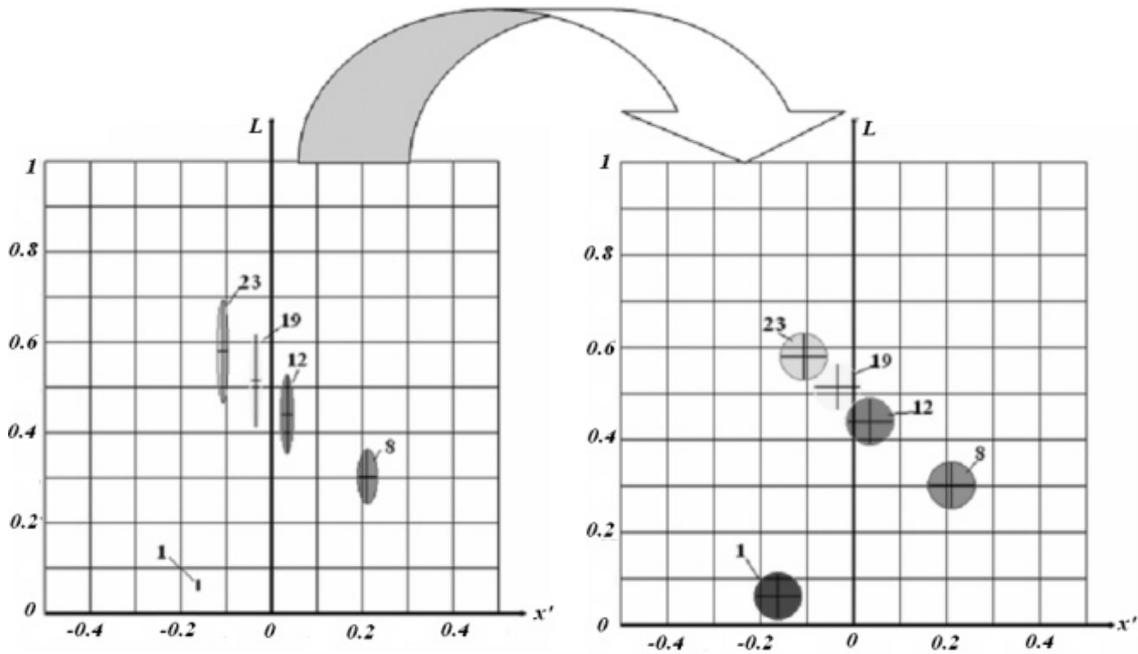


Рис. 6. Сечение эллипсоидов плоскостью  $x'O'L$  (левая часть рисунка) и их преобразование в равновеликие шары (сечение той же плоскостью правая часть рисунка). Размер эллипсоидов и шаров эллипсов и сфер приведены в соответствии [4]

$$\Gamma_{33}^2 = -\sin(2v) / 2.$$

$$\Gamma_{11}^3 = 0, \Gamma_{12}^3 = 0, \Gamma_{21}^3 = 0, \Gamma_{13}^3 = -\rho^{-1},$$

$$\Gamma_{31}^3 = \rho^{-1}, \Gamma_{22}^3 = 0, \Gamma_{23}^3 = \text{ctg}(v),$$

$$\Gamma_{32}^3 = \text{ctg}(v), \Gamma_{33}^3 = 0,$$

где

$$\rho = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} = r_0,$$

$$v = \arccos \left( \frac{x^3}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}} \right) =$$

$$= \arccos \left( \frac{x^3}{r_0} \right).$$

Итак, были рассмотрены все компоненты тензоров уравнения Эйнштейна (1). Далее будет рассмотрен вопрос создания равноконтрастной криволинейной системы координат.

### 6. Равноконтрастная криволинейная система координат

Повторим задачу. Сам цветовой локус оставляем без изменения, а эллипсоиды отображаем в новой сферической системе координат, что дает трансформацию их в сферы одинаковых радиусов.

На основе приведенного математического аппарата, и учитывая, что уравнения эллипсоида вращения согласно [15] имеет вид:

$$\frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} + \frac{(x^3)^2}{d^2} = 1, \tag{18}$$

где  $a, b, d$  – длина полуосей эллипсоида, а уравнение сферы, согласно [15], имеет вид:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = r_0^2. \tag{19}$$

Здесь предполагается, что центры, как эллипсоида и сферы совпадают с началом координат, а координаты  $x^1, x^2, x^3$  – соответствуют привычным  $x, y, z$ . Уравнения (18), (19) необходимы для расчетов матрицы перехода (4).

На рис. 6 и 7 представлены результаты расчетов (трансформации эллипсоидов в шары одинакового диаметра). На этих рисунках показано только пять эллипсоидов, с целью не загромождения рисунков. С этой же целью на рисунках показаны сечения эллипсоидов плоскостями  $XO'L$  и  $YO'L$ .

### Заключение

При определении разницы между двумя и более цветами, что является вопросами высшей колориметрии, а также вопросами цветовой чувствительности человека, а значит цветовой воспроизводимости, очень важно иметь равноконтрастную цветовую систему, в которой геометрическая разница цветовых различий не зависела бы от сравниваемых цветов (цветностей). Используемые, в настоящее время цветные системы (МКО 1931 г. ( $x, y, z$ ), МКО 1960 г. ( $u, v, w$ ), МКО 1976 г. ( $L, a, b$ ) и

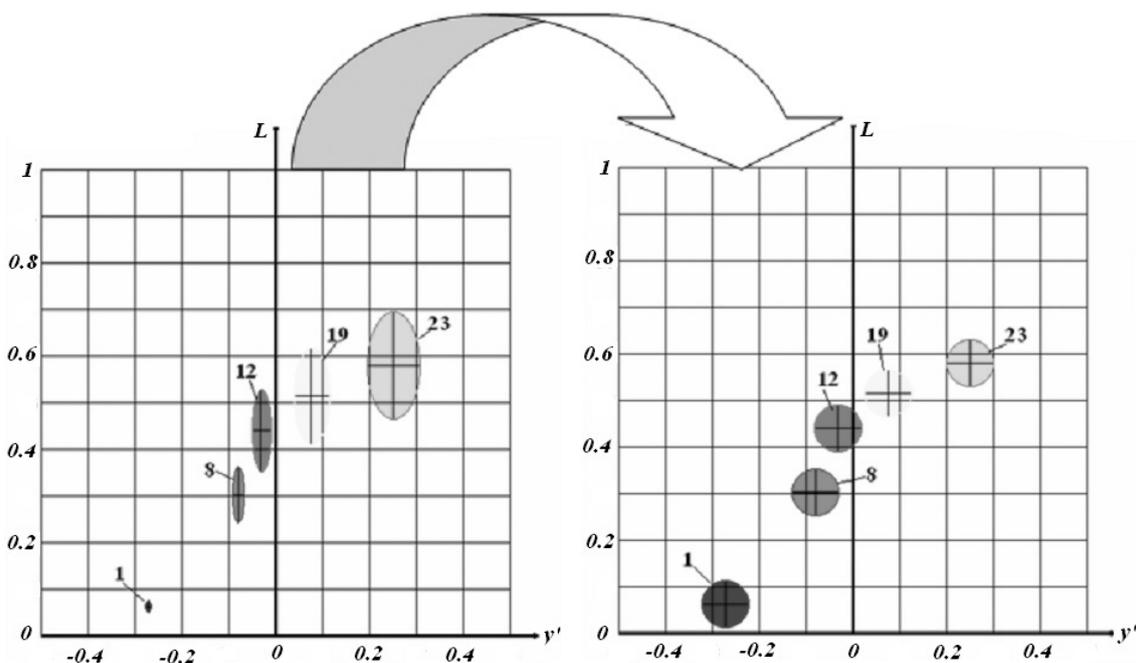


Рис. 7. Сечение эллипсоидов плоскостью  $y'O'L$  (левая часть рисунка) и их преобразование в равновеликие шары (сечение той же плоскостью правая часть рисунка). Размер эллипсоидов и шаров увеличен в 10 раз. Номера эллипсов и сфер приведены в соответствии [4]

ряд других) не обладают равномерной шкалой, хотя последние из названных систем называются равноконтрастные цветовые системы.

В связи с этим, разработка строго равноконтрастной цветовой системы является весьма актуальной задачей, решив данную задачу можно практически создать эталоны цвета, уточнить механизмы цветовосприятия глаза, нормировать допустимые цветовые искажения цветопередающих и цветовоспроизводящих систем (аппаратуры).

Данная статья посвящена вопросам создания строго равноконтрастных цветовых систем. Попытки разработки строго равноконтрастных цветовых систем, сделанные разными авторами, например Мак Адамом, Стайлсом, Вышецким и другими, не увенчались успехом, хотя были достигнуты определенные результаты. Очевидно, создание такой статической системы не возможно.

Тем не менее, в работе приведены результаты разработки строго равноконтрастных цветовых систем. Основное отличие полученных строго равноконтрастных цветовых систем, заключается в том, что предлагаемая система является динамической системой, т. е. цветовая система представляется в подвижной системе координат с использованием геометрии Римана. В этой системе величина цветового различия между двумя цветами определяется длиной криво-

линейного отрезка соединяющего две точки, с координатами сравниваемых цветов и расположенных на сферах разного радиуса.

На наш взгляд, удалось создать равноконтрастное цветовое пространство, которое имеет две системы координат. Подложка пространства (цветовой locus) построена на основе евклидова пространства (декартова система координат), а пространство порогов цветоразличения построено на косоугольной системе координат (сферическая система). В этом цветовом пространстве в качестве исходной цветовой диаграммы может использоваться любая система координат. На описанный метод преобразования цветового пространства получен патент на изобретение [16].

## Список литературы

1. Mac Adam D.L. Specification of small chromaticity differences // Josa. 1943. Vol. 33. P. 18–26.
2. Stiles W. 18th Thomas Young oration. The basic data of colourmatching // Phys. Soc. Year Book. 1955. Vol. 44. P. 44–65.
3. Джадд Д., Вышецки Г. Цвет в науке и технике / пер. с английского под ред. Л.Ф. Артюшина. М.: Мир, 1978. 428 с.
4. Ложкин Л.Д. Дифференциальная колориметрия / под общ. ред. А.И. Тяжева. Самара: ПГУТИ, 2010. 320 с.
5. Scalar curvature of space as a source of information of new uniformity aspects concerning to color representation systems / J.R. Jimenez [et al.] // Optics (Paris). 1993. Vol. 24. № 6. P. 243–249.

6. Farnsworth D. A temporal factor in colour discrimination // Visual Problems of Colour. 1957. Vol. II. P. 429.
7. Аззам Р., Башара Н. Эллипсометрия и поляризованный свет / пер. с англ. под ред. А.В. Ржанова и К.К. Свиташева. М.: Мир: 1981, 594 с.
8. Ложкин Л.Д. Web-сайт по информационным технологиям: свидетельство об отраслевой регистрации разработки № ОФАП 12111. № ВНИИЦ заявл. 11.01.2009; дата регистр. 16.01.2009. URL: [http://ofar.ru/rto\\_files/12111.doc](http://ofar.ru/rto_files/12111.doc) от 16.01.2009.
9. Ложкин Л.Д. Равноконтрастное цветовое пространство и пороги цветоразличения // VII Международная конференция «Телевидение: передача и обработка изображений». Труды конференции. 2009. С. 85–90.
10. Schwarzschild K. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie // Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften. 1916. S. 189–196. (пер.: Шварцшильд К. О гравитационном поле точечной массы в эйнштейновской теории // Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979. С. 199–207.
11. Ложкин Л.Д., Тяжев А.И. Многоцветный колориметр. Патент на полезную модель № 93977 от 10.05.2010 г. Бюл. № 13. МПК G01J 3/50 (2006.01). Заявка № 2008132343 от 05.08.2008. Приоритет от 05.08.2008.
12. Ницул А.С. Тензорная тригонометрия. Теория и приложения. М.: Мир, 2004. 336 с.
13. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ; 3-е изд. М.: Наука, 1967. 664 с.
14. Чертов А.Г. Физические величины. Справочное издание. М.: Высшая школа, 1990. 336 с.
15. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. М.: Наука, 1973. 872 с.
16. Ложкин Л.Д., Неганов В.А. Способ преобразования цветового пространства. Патент России на изобретение № 2494461 от 27.09.2013г. Приоритет от 08.07.2011 г. Бюл. № 27 от 27.09.2013. МПК J06K 9/68 (2006.01).

---

## CIE color space conversion in the strict the same contrast based tensor calculus

*L.D. Lozhkyn, A.A. Voronov, A.A. Soldatov*

This article discusses the development ravnokontrastnogo color space. This new color space ellipses known (for a two-dimensional space) or ellipsoids in three-dimensional space are transformed into a circle or regular spheres (balls), respectively. It is important to have ravnokontrastnuyu color system, in which the geometric difference of color differences would not depend on the compared colors (color) on the color chart.

*Keywords:* color discrimination thresholds, color tensor, the curvature tensor, colorimetric coordinate system, ICE, ellipses Mac Adam.

---