

## Конечные разности в задаче синтеза нелинейных ДВ-осцилляторов

В.В. Зайцев<sup>1</sup>, Э.Ю. Федюнин<sup>2</sup>, А.Н. Шилин<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Самарский национальный исследовательский университет им. акад. С.П. Королева  
443086, Российская Федерация, г. Самара  
Московское шоссе, 34

<sup>2</sup> АО «Ракетно-космический центр «Прогресс»  
443009, Российская Федерация, г. Самара  
ул. Земеца, 18

Метод конечных разностей использован для дискретизации времени в математических моделях – дифференциальных уравнениях движения автоколебательных систем томсоновского типа. Показано, что как правые, так и левые разности позволяют сохранить консервативность линейного колебательного контура автоколебательной системы, но итерированные разностные уравнения движения (дискретные отображения) дают лишь левые разности. Для приближенного анализа автоколебаний к разностным уравнениям применен метод медленно меняющихся амплитуд. Отмечены нарушения в динамике фазы автоколебаний при переходе к дискретному времени. Продемонстрирован режим генерации хаотических автоколебаний при высоких уровнях возбуждения дискретного осциллятора Ван дер Поля. Предложен новый подход к проектированию автоколебательных систем с дискретным временем, в рамках которого параметры разностных операторов выбираются с учетом инвариантности укороченных уравнений для медленных комплексных амплитуд относительно временной дискретизации.

*Ключевые слова:* автоколебательные системы, уравнения движения, конечные разности, дискретные отображения, медленно меняющиеся амплитуды, хаотические автоколебания.

### Введение

Переход к дискретному времени (ДВ) в математических моделях аналоговых систем – один из основных способов проектирования объектов ДВ-динамики. Применяемая процедура дискретизации времени накладывает свой отпечаток на характеристики порождаемой ДВ-системы. Поэтому один и тот же аналоговый прототип отображается во множество объектов динамики в дискретном времени.

В работе [1] для проектирования ДВ-осциллятора Ван дер Поля было предложено использовать условие инвариантности импульсных характеристик линейных колебательных систем относительно временной дискретизации. Принцип импульсной инвариантности можно сформулировать также как замену ядра интегрального уравнения движения нелинейного осциллятора дискретизирующей последовательностью дельта-функций с весовыми коэффициентами из отсчетов импульсной характеристики линейного аналогового контура [2]. Введение нелинейных дельта-воздействий в гамильтониан системы в монографии [3] рассматривается как

способ построения универсального и стандартного отображений. В статье [4] анализ дельта-импульсной синхронизация используется для вывода дискретных отображений неавтономного осциллятора Ван дер Поля – Дюффинга.

Более традиционные способы проектирования дискретных отображений динамических систем основаны на конечно-разностных аппроксимациях временных производных в дифференциальных моделях динамических систем (правда, авторы статьи [5] называют такой подход «искусственной дискретизацией»). Первые исследования в этом направлении, по-видимому, выполнены в Б.Н. Чириковым с сотрудниками [6; 7] с использованием комбинация явного и неявного методов Эйлера. Аналогичным образом получено отображение Богданова [8; 9] и ряд других [3; 5; 10].

В настоящей статье метод конечных разностей применяется для разработки дискретных отображений осцилляторов томсоновского типа. Кроме того, предложено преобразование стандартного алгоритма конечных разностей, обеспечивающее применимость приближения медленно меняющихся амплитуд

## 1. Конечные разности для осцилляторов томсоновского типа

Аналоговый прототип в непрерывном времени описывается уравнением движения вида (штрихами обозначены производные по времени):

$$y'' + \frac{\omega_0}{Q} y' + \omega_0^2 y = \omega_0 \gamma G'(y), \quad (1)$$

где  $\omega_0$  и  $Q$  – собственная частота и добротность резонансного контура автоколебательной системы (АКС);  $\gamma$  – параметр цепи обратной связи с нелинейностью  $G(y)$ . Штрихом в (1) обозначено дифференцирование по времени. При выполнении условий  $Q \gg 1$ ,  $\gamma \ll 1$  осциллятор (1) формально относится к классу томсоновских.

На дискретной временной сетке  $t_n = n\Delta$  дифференциальное уравнение (1) можно преобразовать к интегро-дифференциальному

$$\begin{aligned} y'(t_n) - y'(t_{n-1}) + \omega_0^2 \int_{[t_{n-1}, t_n]} y(t) dt = \\ = -\omega_0 Q^{-1} (y(t_n) - y(t_{n-1})) + \\ + \omega_0 \gamma (G(y(t_n)) - G(y(t_{n-1}))). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь интеграл берется по отрезку  $[\Delta] = [t_{n-1}, t_n]$ . Представляется, что различные варианты конечно-разностных аппроксимаций производных в левой части уравнения (2) должны удовлетворять естественному условию: сохранять консервативность осциллятора при  $Q \rightarrow \infty$  и  $\gamma = 0$ .

*Двухточечная схема с правыми разностями* первого порядка и представление интеграла формулой прямоугольников в точке  $t_n$  приводят к разностному уравнению движения ДВ автоколебательной системы (ДВ-АКС)

$$\begin{aligned} y_n - 2 \left( 1 - 2\pi^2 \Omega_0^2 - \pi \frac{\Omega_0}{Q} \right) y_{n-1} + \\ + \left( 1 - 2\pi \frac{\Omega_0}{Q} \right) y_{n-2} = 2\pi \Omega_0 \gamma (G(y_{n-1}) - G(y_{n-2})). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\Omega_0$  – собственная частота контура, нормированная на частоту дискретизации  $\omega_d = 2\pi / \Delta$ . В терминах нелинейной динамики уравнение (3) обозначается как дискретное отображение АКС (1).

В линейном приближении ( $\gamma = 0$ ) и пределе  $Q \rightarrow \infty$  уравнение движения (3) имеет решение

$$y_n = A \exp(j2\pi\Omega n) = AZ^n$$

с комплексной амплитудой  $A$  и множителем поворота  $Z$ . При этом  $Z$  удовлетворяет квадратному характеристическому уравнению

$$Z^2 - 2 \left( 1 - 2\pi^2 \Omega_0^2 \right) Z + 1 = 0,$$

из которого следуют равенства

$$|Z| = 1 \text{ и } \operatorname{Re}(Z) = 1 - 2\pi^2 \Omega_0^2.$$

Первое из них указывает на консервативность дискретного осциллятора, а второе – определяет его частоту:

$$\Omega = \frac{1}{2\pi} \arccos \left( 1 - 2\pi^2 \Omega_0^2 \right). \quad (4)$$

При  $\Omega_0 \ll 1$  частота осцилляций  $\Omega \approx \Omega_0$ . Таким образом, дискретное отображение (3) в линейном пределе сохраняет консервативность (строго) и частоту (приблизительно) аналогового осциллятора.

*Двухточечная схема с левыми разностями* первого порядка и представление интеграла формулой прямоугольников в точке  $t_{n-1}$  дает следующее уравнение движения ДВ-АКС

$$\begin{aligned} \left( 1 + 2\pi \frac{\Omega_0}{Q} \right) y_n - 2 \left( 1 - 2\pi^2 \Omega_0^2 + \pi \frac{\Omega_0}{Q} \right) y_{n-1} + \\ + y_{n-2} = 2\pi \Omega_0 \gamma (G(y_n) - G(y_{n-1})). \end{aligned}$$

С учетом предполагаемого выполнения условия  $Q \gg 1$  его можно заменить приближенным уравнением

$$\begin{aligned} y_n - 2 \left( 1 - 2\pi^2 \Omega_0^2 + \pi \frac{\Omega_0}{Q} \right) y_{n-1} + \\ + \left( 1 - 2\pi \frac{\Omega_0}{Q} \right) y_{n-2} = \\ = 2\pi \Omega_0 \left( 1 - 2\pi \frac{\Omega_0}{Q} \right) \gamma (G(y_n) - G(y_{n-1})), \end{aligned} \quad (5)$$

совпадающим в линейной части с уравнением движения (3).

Анализ динамики дискретного отображения (5) сопряжен с определенными трудностями, т. к. оно является неитерировуемым. Тем не менее, можно рассмотреть возможность использования (3) – (4) в связке «прогноз – коррекция».

*Явно-неявная схема Эйлера* применяется к уравнению движения осциллятора (1), записанному в форме системы двух дифференциальных уравнений первого порядка (уравнений состояния):

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} = u, \\ \frac{du}{d\tau} = -2\pi \frac{\Omega_0}{Q} u - 4\pi^2 \Omega_0^2 y + 2\pi \Omega_0 \gamma S(y)u, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $S(y) = dG(y) / dy$  – крутизна нелинейности осциллятора;  $\tau = t / \Delta$  – время, нормированное на интервал предполагаемой дискретизации  $\Delta$ . Явный алгоритм Эйлера для второго из уравнений системы (6) и неявный для первого позволяют записать систему разностных уравнений состояния вида

$$\begin{aligned} u_n &= \left(1 - 2\pi \frac{\Omega_0}{Q}\right) u_{n-1} - 4\pi^2 \Omega_0^2 y_{n-1} + \\ &+ 2\pi \Omega_0 \gamma S(y_{n-1}) u_{n-1}, \\ y_n &= y_{n-1} + u_n. \end{aligned}$$

Эта система после исключения переменной  $u_n$  преобразуется к уравнению движения

$$\begin{aligned} y_n - 2 \left(1 - 2\pi^2 \Omega_0^2 - \pi \frac{\Omega_0}{Q}\right) y_{n-1} + \\ + \left(1 - 2\pi \frac{\Omega_0}{Q}\right) y_{n-2} = \\ = 2\pi \Omega_0 \gamma S(y_{n-1}) (y_{n-1} - y_{n-2}). \end{aligned} \quad (7)$$

С учетом того, что рассматриваемом здесь приближении выполняется равенство

$$G(y_{n-1}) - G(y_{n-2}) = S(y_{n-1}) (y_{n-1} - y_{n-2}),$$

уравнения (3) и (7) эквивалентны.

Таким образом, ДВ-осциллятор (3) представляет собой вариант решения задачи о синтезе объекта нелинейной динамики в дискретном времени методом конечных разностей – вариант дискретного отображения томсоновского осциллятора (1).

## 2. Томсоновские осцилляторы в приближении ММА

В непрерывном времени для анализа динамики томсоновских осцилляторов вида (1) широко используется метод медленно меняющихся амплитуд (ММА). В рамках метода для комплексной амплитуды  $A(t)$  автоколебаний

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2} A(t) \exp(j\omega_0 t) + \frac{1}{2} A^*(t) \exp(-j\omega_0 t) = \\ &= \frac{1}{2} A(t) \exp(j\omega_0 t) + k.c., \end{aligned}$$

записывается укороченное уравнение

$$\frac{dA}{d\tau} = -\pi \Omega_0 \left( \frac{1}{Q} A - \gamma G_1(A) \right), \quad (8)$$

где  $G_1(A)$  – комплексная амплитуда первой гармоники колебаний  $G(y(t))$ . Явный метод Эйлера с шагом  $\Delta\tau = 1$  дает разностную форму укороченного уравнения (8):

$$\begin{aligned} A(n) - A(n-1) = \\ = -\pi \Omega_0 \left( \frac{1}{Q} A(n-1) - \gamma G_1(A(n-1)) \right), \end{aligned} \quad (9)$$

Комплексное уравнение (9) эквивалентно двум уравнениям для действительных амплитуды  $a(n)$  и фазы  $\varphi(n)$  автоколебаний

$$\begin{aligned} a(n) - a(n-1) = \\ = -\pi \Omega_0 \left( \frac{1}{Q} a(n-1) - \gamma G_1(a(n-1)) \right), \quad (10) \\ v(n) = \frac{\varphi(n) - \varphi(n-1)}{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

При этом нелинейность  $G(y)$  считается безынерционной. Второе из этих уравнений отражает важное свойство томсоновских АКС с безынерционными нелинейностями – динамическую и статическую изохронность.

На ДВ-АКС метод ММА распространен в статьях [11; 12]. В рамках метода уравнение движения (3) с выделенной консервативной левой частью записывается в виде

$$\begin{aligned} y_n - 2 \left(1 - 2\pi^2 \Omega_0^2\right) y_{n-1} + y_{n-2} = \\ = -2\pi \frac{\Omega_0}{Q} (y_{n-1} - y_{n-2}) + \\ + 2\pi \Omega_0 \gamma (G(y_{n-1}) - G(y_{n-2})), \end{aligned} \quad (11)$$

а генерируемые осциллятором ДВ-автоколебания как

$$y_n = \frac{1}{2} A_n Z_0^n + \frac{1}{2} A_n^* Z_0^{-n} = \frac{1}{2} A_n Z_0^n + k.c.,$$

где  $Z_0 = \exp(j2\pi\Omega_0)$ ;  $A_n$  – комплексная амплитуда – медленная (по сравнению с  $Z_0^n$ ) функция дискретного времени. Условие медленности предлагается использовать в форме равенства  $A_{n-1} - A_{n-2} = A_n - A_{n-1}$ . С его учетом левая часть уравнения (11) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} y_n - 2 \left(1 - 2\pi^2 \Omega_0^2\right) y_{n-1} + y_{n-2} = \\ = j \sin(2\pi\Omega_0) (A_n - A_{n-1}) Z_0^{n-1} + \\ + \left( \cos(2\pi\Omega_0) - \left(1 - 2\pi^2 \Omega_0^2\right) \right) A_{n-1} Z_0^{n-1} + k.c. \end{aligned}$$

В нелинейности  $G(y_n)$  в правой части уравнения (11) выделяется первая гармоника:

$$\begin{aligned} G(y_n) &= \frac{1}{2} G_1(A_n) Z_0^n + \\ &+ \frac{1}{2} G_1^*(A_n) Z_0^{-n} + \text{высшие гарм.} \end{aligned}$$

Тогда из равенства медленных по времени коэффициентов при осцилляциях  $Z_0^{n-1}$  в правой и левой частях (11) следует уравнение для комплексных амплитуд

$$\begin{aligned} j \sin(2\pi\Omega_0) (A_n - A_{n-1}) + \\ + \left( \cos(2\pi\Omega_0) - \left(1 - 2\pi^2 \Omega_0^2\right) \right) A_{n-1} = \\ = -\pi \frac{\Omega_0}{Q} \left( A_{n-1} - A_{n-2} Z_0^{-1} \right) + \\ + \pi \Omega_0 \gamma \left( G_1(A_{n-1}) - G_1(A_{n-2}) Z_0^{-1} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

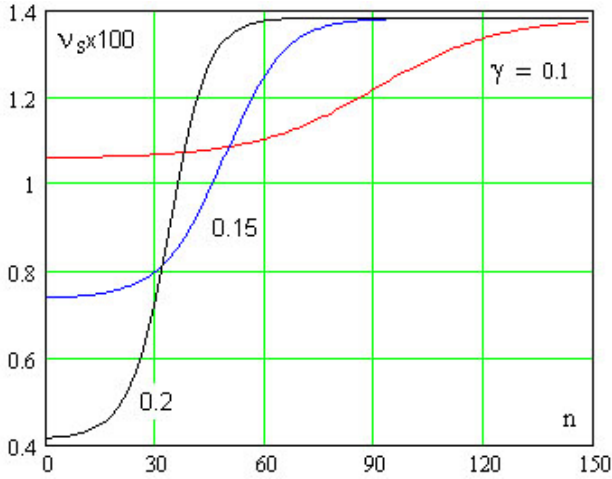


Рис. 1. Временные зависимости поправок на частоту ДВ-осциллятора (3)

В приближении ММА в правой части этого уравнения не предполагается различий между  $A_{n-2}$  и  $A_{n-1}$ :  $A_{n-2} \approx A_{n-1}$ . В таком случае (12) переходит в укороченное уравнение

$$A_n - A_{n-1} = -\pi\Omega_0 (1 - j \tan(\pi\Omega_0)) \times \left( \frac{1}{Q} A_{n-1} - \gamma G_1(A_{n-1}) \right) - jq(\pi\Omega_0) A_{n-1}, \quad (13)$$

где функция частоты

$$q(\xi) = \frac{1 - 2\xi^2 - \cos(2\xi)}{\sin(2\xi)}.$$

При  $\xi \rightarrow 0$  она имеет асимптотику  $q(\xi) \sim -\xi^3 / 3$ . Это позволяет утверждать, что уравнение (13) при  $\Omega_0 \rightarrow 0$ , как и следовало ожидать, совпадает с уравнением (9), а ДВ-осциллятор (11) адекватно отображает аналоговую АКС (1) в дискретном времени.

Тем не менее, при невыполнении условия  $\Omega_0 \ll 1$  между укороченными уравнениями (9) и (13) проявляются определенные различия. Отчетливо их демонстрирует система действительных амплитудно-фазовых уравнений

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= -\pi\Omega_0 \left( \frac{1}{Q} a_{n-1} - \gamma G_1(a_{n-1}) \right), \\ \varphi_n - \varphi_{n-1} &= \pi\Omega_0 \tan(\pi\Omega_0) \left( \frac{1}{Q} - \gamma \frac{G_1(a_{n-1})}{a_{n-1}} \right) - q(\pi\Omega_0). \end{aligned} \quad (14)$$

Процессы установления амплитуд к значению  $a_s$ , определяемому нелинейным уравнением  $a_s = \gamma Q G_1(a_s)$ , в аналоговом и дискретном осцилляторах, как это следует из сопоставления амплитудных уравнений систем (10) и (14), совпадают. Но фазовое уравнение системы (14) указывает на динамическую неизохронность ДВ-осциллятора (3) (у аналоговой АКС (1) она

отсутствует) и наличие систематической поправки на частоту в режиме установившихся автоколебаний

$$v_s = -\frac{1}{2\pi} q(\pi\Omega_0).$$

На рис. 1 для примера приведены графики изменения поправки на частоту в процессе установления автоколебаний в ДВ-осцилляторе (3) с параметрами  $\Omega_0 = 0.19$ ,  $Q = 20$  для трех значений параметра глубины обратной связи  $\gamma = 0.1$ ,  $\gamma = 0.15$  и  $\gamma = 0.2$ . Как это уже отмечено выше, зависимость частоты автоколебаний от их амплитуды имеет место лишь в переходном режиме.

### 3. Синтез ДВ-осцилляторов с использованием приближения ММА

Проведенный анализ позволяет предложить еще один способ разработки ДВ-осцилляторов.

В качестве обобщения уравнения движения (11) рассматривается уравнение

$$\begin{aligned} y_n - 2\lambda y_{n-1} + y_{n-2} &= \\ &= -2\pi \frac{\Omega_0}{Q} (\sigma y_{n-1} - y_{n-2}) + \\ &+ 2\pi\Omega_0 \gamma (\sigma G(y_{n-1}) - G(y_{n-2})), \end{aligned} \quad (15)$$

содержащее параметры  $\lambda$  и  $\sigma$ . Величина параметра  $\lambda$  определяется так, чтобы частота свободных колебаний линейного консервативного осциллятора, представленного разностным оператором в левой части (15), совпадала с частотой колебаний в аналоговом прототипе. По аналогии с (4) в этом случае можно записать равенство

$$\Omega_0 = \frac{1}{2\pi} \arccos(\lambda),$$

из которого следует, что  $\lambda = \cos(2\pi\Omega_0)$ .

Теперь к осциллятору

$$\begin{aligned} y_n - 2 \cos(2\pi\Omega_0) y_{n-1} + y_{n-2} &= \\ &= -2\pi \frac{\Omega_0}{Q} (\sigma y_{n-1} - y_{n-2}) + \\ &+ 2\pi\Omega_0 \gamma (\sigma G(y_{n-1}) - G(y_{n-2})), \end{aligned} \quad (16)$$

применяется метод ММА и записывается укороченное уравнение

$$\begin{aligned} A_n - A_{n-1} &= -\frac{\pi\Omega_0}{j \sin(2\pi\Omega_0)} \times \\ &\times \left( \frac{\sigma - \cos(2\pi\Omega_0) + j \sin(2\pi\Omega_0)}{Q} A_{n-1} - \right. \\ &\left. - \gamma (\sigma - \cos(2\pi\Omega_0) + j \sin(2\pi\Omega_0)) G_1(A_{n-1}) \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Нетрудно заметить, что оно совпадает с уравнением (9), если положить

$$\sigma = \cos(2\pi\Omega_0).$$

Следовательно, ДВ-осциллятор томсоновского типа, обладающий динамическими свойствами аналогового прототипа, должен иметь уравнение движения

$$\begin{aligned} y_n - 2\cos(2\pi\Omega_0)y_{n-1} + y_{n-2} = \\ = -2\pi\Omega_0 \left( \frac{1}{Q} (\cos(2\pi\Omega_0)y_{n-1} - y_{n-2}) - \right. \\ \left. - \gamma (\cos(2\pi\Omega_0)G(y_{n-1}) - G(y_{n-2})) \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Введя в рассмотрение параметр консервативности контура

$$\alpha = 1 - \pi \frac{\Omega_0}{Q},$$

и с учетом малости величины  $\pi\Omega_0 / Q$  это уравнение можно записать в более компактной форме:

$$\begin{aligned} y_n - 2\alpha \cos(2\pi\Omega_0)y_{n-1} + \alpha^2 y_{n-2} = \\ = 2\pi\Omega_0 \gamma (\cos(2\pi\Omega_0)G(y_{n-1}) - G(y_{n-2})). \end{aligned} \quad (19)$$

Именно это дискретное отображение томсоновского осциллятора впервые было предложено одним из авторов в работе [11].

Таким образом, лучший результат дискретизации времени в аналоговом прототипе достигается, если конечные разности дополнить требованием сохранения формы укороченных уравнений.

#### 4. ДВ-осциллятор с высоким уровнем возбуждения

При высоких уровнях возбуждения ( $\gamma Q \gg 1$ ) осцилляторы вида (1) теряют свойство квазигармоничности автоколебаний, которое, по существу, и позволяет выделять класс автоколебательных систем томсоновского типа. В этих условиях приближение ММА не «работает», а дискретные отображения (3) и (19) следует рассматривать как самостоятельные объекты нелинейной динамики в дискретном времени. Анализ их характеристик может опираться на методы цифровой обработки генерируемых автоколебаний. Для отображения (19) и его модификаций результаты такого анализа представлены, в частности, в [13; 14]. Ниже анализируются автоколебания, генерируемые ДВ-осциллятором (3) с кубической нелинейностью

$$G(y) = y - \frac{1}{3}y^3$$

– ДВ-осциллятором Ван дер Поля.

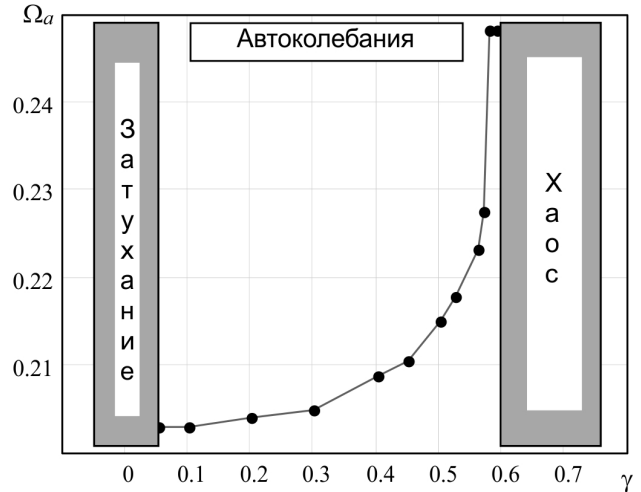


Рис. 2. Зависимость частоты автоколебаний в ДВ-осцилляторе (3) от параметра глубины обратной связи

На рис. 2 показан график зависимости частоты  $\Omega_a$  автоколебаний в осцилляторе с собственной частотой контура  $\Omega_0 = 0.19$  и его добротностью  $Q = 20$  от величины параметра глубины обратной связи  $\gamma$ . Частота оценивалась с погрешностью  $\pm 0.001$  по амплитудному спектру отрезка реализации автоколебаний. Фазовое уравнение системы укороченных уравнений (14) для такой ДВ-АКС дает значение  $\Omega_a = 0.204$ .

График зависимости  $\Omega_a = \Omega_a(\gamma)$  отражает незначительный рост частоты автоколебаний в интервале  $0.05 < \gamma < 0.3$  (интервал превышений порога возбуждения  $1 < \gamma Q < 6$ ). Условно его можно считать интервалом томсоновости осциллятора. Затем, в интервале  $0.3 < \gamma \leq 0.597$  наблюдается быстрый рост частоты вплоть до значения самозахвата  $\Omega_a = 0.25$  [15]. При этом спектр автоколебаний обогащается подменными гармониками [15] и из линейчатого трансформируется в сплошной, что указывает на хаотизацию автоколебаний.

На рис. 3 приведен усредненный амплитудный спектр автоколебаний  $A(\Omega)$  при  $\gamma = 0.67$ . Оценка амплитудного спектра вычислена по оценке спектра мощности  $P(\Omega)$  с помощью формулы  $A(\Omega) = \sqrt{2P(\Omega)}$ , а для нахождения дискретных отсчетов  $P(n/N_F)$  использована процедура Бартлетта с 512-точечным дискретным преобразованием Фурье ( $N_F = 512$ ). Длина усредняемой реализации  $N = 65536$ .

Автоколебания с показанным спектром на плоскости  $(y_{n-1}, y_n)$  имеют аттрактор, изображенный на рис. 4. Корреляционная размерность (корреляционный показатель) аттрактора  $\nu = 1.47 \pm 0.02$ , что также является одним из эвристических критериев хаоса.

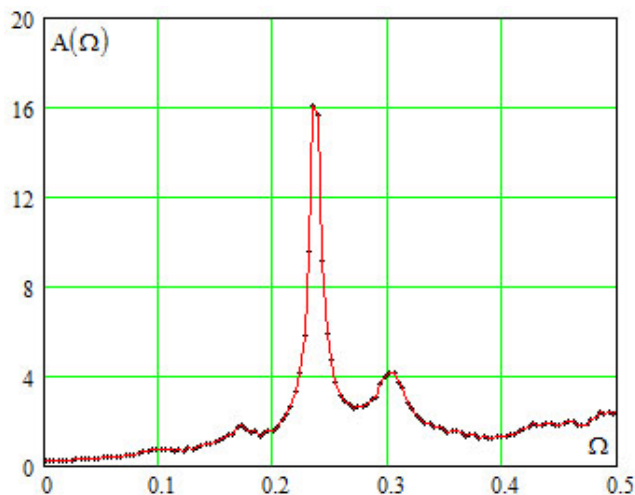


Рис. 3. Усредненный амплитудный спектр автоколебаний

### Заключение

Результаты проведенных исследований позволяют сделать вывод о том, что в моделировании динамических систем, обработке дискретных сигналов и других приложениях, использующих регулярные автоколебания в дискретном времени, предпочтение следует отдавать дискретному отображению (19) – изохронной АКС. Тем не менее, при высоких уровнях возбуждения отображение (3) представляет собой новый алгоритм генерации хаотических временных рядов.

Требование инвариантности укороченных уравнений относительно дискретизации времени позволяет предложить новый способ синтеза нелинейных ДВ-осцилляторов.

### Список литературы

1. Зайцев В.В., Давыденко С., Зайцев О.В. Динамика автоколебаний дискретного осциллятора Ван дер Поля // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2000. Т. 3. № 2. С. 64–67.
2. Зайцев В.В., Карлов А.В., Карлов Ар.В. О численном моделировании томсоновских автоколебательных систем // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2015. № 6 (128). С. 141–150.
3. Заславский Г.М. Гамильтонов хаос и фрактальная динамика. М.; Ижевск: НИЦ РХД; Институт компьютерных исследований, 2010. 472 с.
4. Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В. Синхронизация автоколебательной системы Ван дер Поля – Дуффинга короткими импульсами // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2004. Т. 12. № 5. С. 16–31.
5. Кузнецов А.П., Савин А.В., Седова Ю.В. Бифуркация Богданова – Такенса: от непрерывной к дискретной модели // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17. № 6. С. 64–83.

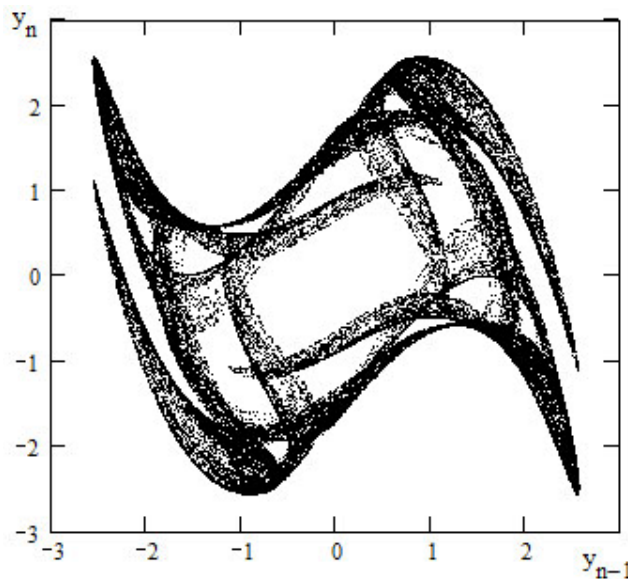


Рис. 4. Аттрактор хаотических автоколебаний

6. Чириков Б.В. Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности. Новосибирск: ИЯФ СО АН СССР, 1969. 314 с.
7. Израйлев Ф.М. Численное исследование статистических свойств некоторых простейших колебательных систем: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1969. 12 с.
8. The Bogdanov map: bifurcations, mode locking, and chaos in a dissipative system / D.K. Arrowsmith [et al.] // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1993. Vol. 3. № 4. P. 803–842.
9. Сухаревский В.В. Оценка температуры и плотности частиц в слабодиссипативной теории Колмогорова – Арнольда – Мозера // Вестник Московского университета. Физика. Астрономия. 2006. № 2. С. 7–9.
10. Морозов А.Д. Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах. М.; Ижевск: НИЦ РХД; Ижевский институт компьютерных исследований, 2005. 424 с.
11. Зайцев В.В. О дискретных отображениях осциллятора Ван дер Поля // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2014. Т. 17. № 1. С. 35–40.
12. Зайцев В.В., Карлов (мл) А.В. Дискретное отображение осциллятора с нелинейной диссипацией и частотное детектирование ДВ-сигналов // Радиотехника. 2014. № 4. С. 50–54.
13. Зайцев В.В., Зайцев О.В., Шилин А.Н. Комплексная форма дискретных отображений томсоновских автоколебательных систем // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2017. Т. 20. № 1. С. 33–38.
14. Зайцев В.В., Нураев Д.Б., Шилин А.Н. Осцилляторы Ван дер Поля, Рэлея, Дуффинга в динамике с дискретным временем // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева (национального исследовательского университета). 2016. Т. 15. № 1. С. 187–196.

15. Зайцев В.В., Стулов И.В. О влиянии подмененных гармоник на динамику автоколебаний в дискретном времени // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2015. Т. 23. № 6. С. 40–44.

## Finite differences for design of nonlinear discrete time oscillators

*V.V. Zaitsev, E.Yu. Fedyunin, A.N. Shilin*

The method of finite differences is used for sampling of time in mathematical models – the differential motion equations of self-oscillatory systems of Thomson type. It is shown that both the right, and left differences allow to keep conservatism of a linear oscillatory contour of self-oscillatory system, but the iterated differential motion equations (discrete mappings) give only the left differences. The method of slow-changing amplitudes is applied to approximate analysis of the finite differences equations. Violations in dynamics of a phase of self-oscillations upon transition to discrete time are noted. The mode of generation of chaotic self-oscillations at high levels of excitement of the discrete oscillator of Van der Pol is shown. New approach to design of self-oscillatory systems with discrete time is offered. Parameters of the difference operators are selected from it taking into account invariance of the shortened equations for slow complex amplitudes of rather temporal sampling.

*Keywords:* self-oscillatory systems, motion equations, finite differences, discrete mappings, slow-changing amplitudes, chaotic self-oscillations.

**Неганов, В.А.**

**Современная теория и практические применения антенн:** монография / В.А. Неганов, Д.П. Табаков, Г.П. Яровой; предисл. акад. Ю.В. Гуляева; под ред. В.А. Неганова. – М.: Радиотехника, 2009. – 720 с.

**ISBN 978-5-88070-222-0**

Неганов В.А., Табаков Д.П., Яровой Г.П.

Современная теория  
и практические применения  
антенн

Издательство «Радиотехника»  
Москва, 2009

УДК 621.396.67  
ББК 32.845

Рассмотрены основные разделы теории и техники антенн. Освещены вопросы расчета и построения различных типов антенн (от вибраторных до рупорных и антенных решеток, включая фазированные). Основное внимание уделено антеннам СВЧ и расчетам их электромагнитных полей в ближней зоне, т. е. вопросам электромагнитной совместимости.

Принципиальное отличие книги от известных заключается в последовательном применении метода физической регуляризации (самосогласованного метода) к расчету электромагнитного поля антенн, позволяющего осуществлять непрерывный переход с излучающей поверхности антенны к пространству вне ее. С помощью самосогласованного метода получены новые результаты по теории антенн: установлены связь между поверхностной плотностью тока на вибраторной антенне и напряженностью электромагнитного поля, однонаправленный режим излучения для кольцевой (рамочной антенны), режимы стоячих и бегущих волн в цилиндрической спиральной антенне, входное сопротивление практически для всех типов антенн. Теоретический материал подкреплён примерами применения многолучевых антенн.

Предназначено для разработчиков антенно-фидерных устройств, аспирантов и докторантов, занимающихся вопросами проектирования антенных систем различного назначения, студентов радиотехнических специальностей высших учебных заведений.