2017 г. Том 20, № 3

Физика волновых процессов и радиотехнические системы

УДК 517.958, 537.876.46

Задача дифракции электромагнитной волны на системе произвольно расположенных тел и экранов

Ю.Г. Смирнов

Пензенский государственный университет
440026, Российская Федерация, г. Пенза
ул. Красная, 40

Рассматривается задача дифракции электромагнитной волны на системе произвольно расположенных тел и экранов. Доказываются теоремы о существовании и единственности решения исследуемой задачи в пространствах Соболева. Также доказывается разрешимость системы интегро-дифференциальных уравнений, отвечающей исследуемой задаче дифракции.

Ключевые слова: диэлектрические тела, идеально проводящие экраны, задача дифракции, уравнения Максвелла, система интегро-дифференциальных уравнений, эллиптический оператор.

Задачам дифракции электромагнитных волн на телах различных конфигураций посвящено множество трудов, в частности, работы Самохина А.Б. [1] и M. Costabel [2; 3]. В данных работах, а также в монографии Д. Колтона и Р. Кресса [4], построена теория разрешимости векторных задач дифракции электромагнитных волн на телах, в том числе описана постановка задачи, доказаны существование и единственность решения и описаны численные методы решения поставленных задач. Для решения задач дифракции электромагнитных волн на объемных телах применяются как методы объемных интегральных уравнений, так и другие, например, конечно-разностные методы и методы конечных элементов, основанные на решении систем дифференциальных уравнений. Решение задач дифракции на телах подобными методами представлено, например, в работах Miller E. K. [5] и Mittra R. [6].

В работах Ильинского А.С. и Смирнова Ю.Г. [7] построена теория разрешимости трехмерных векторных электродинамических задач на незамкнутых поверхностях, а именно, доказан ряд теорем, таких как теоремы о существовании и единственности решения краевой задачи и уравнения на экране (в подходящих пространствах), теоремы о представимости решения краевой задачи в виде векторного потенциала, теоремы о «скачках» предельных значений и т. д.

Задачи дифракции электромагнитных волн на системе произвольно расположенных тел и экранов (в частности, задачи на частично экранированных или пересекающихся телах и экранах) до сих пор являются малоизученными. Основные теоретические результаты, в том числе о разрешимости задачи дифракции представлены в работах [8–11].

Кроме того, решение трехмерных векторных задач дифракции электромагнитной волны на системах тел и экранов различных форм является актуальным с точки зрения приложений в связи с возрастающей потребностью в разработке все более сложных технических устройств. Наиболее сложно решать подобные задачи в резонансном диапазоне частот, когда длина волны соизмерима с размером рассеивателей. Для решения этих задач разрабатываются методы поверхностных и объемных интегральных уравнений, в ходе применения которых исследуемая задача сводится к системе интегро-дифференциальных уравнений на телах и экранах.

1. Постановка задачи дифракции

Рассмотрим в пространстве R^3 задачу дифракции электромагнитных волн на системе непересекающихся экранов Ω_j и тел Q_i ($j = 1,\dots,J$; $i = 1,\dots,I$).

Пусть

$$\Omega = \bigcup_j \Omega_j,\ \ \overline{\Omega}_i \bigcap \overline{\Omega}_j = \varnothing \quad (i \neq j)$$

объединение конечного числа связных ориентируемых незамкнутых и непересекающихся ограниченных поверхностей класса C^∞ в R^3. Край $\partial\Omega_j := \overline{\Omega}_j \setminus \Omega_j$ поверхности Ω_j есть кусочно-гладкая кривая, состоящая из конечного числа простых дуг класса C^∞ без точек самопересечения, сходящихся под углами, отличных от нулевого; $\partial\Omega := \bigcup\limits_j \partial\Omega_j$. Предполагаем, что экраны являются идеально проводящими.

Определим также трубчатые окрестности $\partial\Omega_\delta$ края экрана:

$$\partial\Omega_\delta := \{x \in \mathrm{R}^3 : \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\}.$$

Пусть Q_i – ограниченные области. Границы ∂Q_i областей Q_i являются кусочно-гладкими. А именно, следуя [12], предположим, что для каждой точки границы $x_0 \in \partial Q$ ($Q := Q_i$, $\partial Q := \partial Q_i$) существует окрестность Θ (в R^3) и C^2 – диффеоморфизм этой окрестности в R^3, при котором точка x_0 переходит в точку 0, а образом множества $\Theta \cap Q$ является множество одного из следующих типов (ниже $(x_1, x_2 x_3)$ – декартовы; (r, θ), $r \geq 0$, $\theta \in S^2$ – сферические координаты в R^3). Либо $x_1 > 0$ (x_0 – точка гладкости границы); либо $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ (x_0 – точка на «выходящем» ребре); либо $\mathrm{R}^3 \{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ (x_0 – точка на «входящем» ребре); либо $r > 0$, $\theta \in Q'$, где $Q' \subset S^2$ – односвязная область с кусочно-гладкой границей $\partial Q'$ (x_0 – вершина «конуса с ребрами»). В частности, если $\partial Q'$ – гладкая, то x_0 – коническая точка; если $\partial Q'$ образована дугами больших окружностей, то x_0 – вершина многогранного угла. Пусть Q – ограниченная область, и каждая точка $x \in \partial Q$ принадлежит одному из этих типов. Будем тогда говорить, что Q – область с кусочно-гладкой границей.

Определим $Q := \bigcup\limits_i Q_i$. Предполагаем, что $\overline{Q} \cap \overline{\Omega} = \varnothing$. Рассматриваемые тела могут быть диэлектрически неоднородными и анизотропными – неоднородность задачи описывается тензор-функцией

$$\hat{\varepsilon}(x) = \begin{cases} \varepsilon_e \hat{I}, & x \in \left(\overline{Q} \cup \overline{\Omega}\right)^c, \\ \hat{\varepsilon}_i(x), & x \in \overline{Q}_i, \end{cases}$$

причем комплексные тензоры $\hat{\varepsilon}_i(x)$ симметричны, а их мнимые части – симметрические неотрицательные тензоры:

$$\hat{\varepsilon}_i = \hat{\varepsilon}_i^{\,T}, \quad \mathrm{Im}\,\hat{\varepsilon}_i \geq 0.$$

Введено обозначение $M^c := \mathrm{R}^3 \setminus M$, где M – некоторое множество.

Свободное пространство однородно и изотропно с постоянными ε_e, μ_e, причем выполняются условия $\mathrm{Im}\,\varepsilon_e \geq 0$, $\mathrm{Im}\,\mu_e \geq 0$, $\mathrm{Im}\,k_e \geq 0$, $k_e = \omega\sqrt{\varepsilon_e \mu_e}$.

Рассмотрим задачу дифракции электромагнитной волны $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ с гармонической зависимостью от времени вида $e^{-i\omega t}$ на системе тел и экранов. Источником поля может быть, например, ток $\mathbf{j}_{0,E}$, локализованный вне рассеивателей: $\mathrm{supp}(\mathbf{j}_{0,E}) \cap (\overline{\Omega} \cup \overline{Q}) = \varnothing$.

Пусть P ($P = \bigcup\limits_j P_j$) – гладкая замкнутая ориентируемая поверхность, содержащая Ω, $\Omega \subset P$, P^+, P^- – области, внешняя и внутренняя по отношению к P.

Требуется определить полное электромагнитное поле $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$:

$$(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \in C^1\left((\partial Q \cup \overline{\Omega})^c\right) \bigcap C\left(\overline{Q^c} \setminus \overline{\Omega}\right) \bigcap C(\overline{Q}) \times \\ \times \bigcap_{\delta>0} C(\overline{P}^+ \setminus \partial\Omega_\delta) \bigcap_{\delta>0} C(\overline{P}^- \setminus \partial\Omega_\delta), \quad (1)$$

удовлетворяющее уравнениям Максвелла [13]

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\,\mathbf{H} = -i\omega\hat{\varepsilon}\mathbf{E} + \mathbf{j}_{0,E}, \\ \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = i\omega\mu_e\mathbf{H}, \end{cases} \text{ в } \left((\partial Q \cup \overline{\Omega})^c\right) \quad (2)$$

условиям непрерывности касательных компонент на границе области неоднородности:

$$[\mathbf{E}_\tau]\,|_{\partial Q} = [\mathbf{H}_\tau]\,|_{\partial Q} = 0, \quad (3)$$

(где τ – касательный вектор к ∂Q, $\mathbf{E}_\tau$ и $\mathbf{H}_\tau$ – касательные составляющие электрического поля $\mathbf{E}_0$ и магнитного поля $\mathbf{H}_0$, соответственно), краевым условиям на поверхности экрана Ω (за исключением точек края экрана)

$$\mathbf{E}_\tau\,|_\Omega = 0, \quad (4)$$

условиям конечности энергии в любом ограниченном объеме пространства

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^3) = H^0_{loc}(\mathbb{R}^3) \quad (5)$$

и условиям Сильвера-Мюллера [4, с. 127]

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s = o(1/r), \quad \mathrm{Im}\,k > 0; \\ &\mathbf{H}_s \times \mathbf{e}_r - \mathbf{E}_s = o(1/r), \\ &\mathbf{E}_s \times \mathbf{e}_r - \mathbf{H}_s = o(1/r); \\ &\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s = O(1/r), \quad \mathrm{Im}\,k = 0; \\ &r \to \infty. \end{aligned} \quad (6)$$

для рассеянного поля $\mathbf{E}_s = \mathbf{E} - \mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_s = \mathbf{H} - \mathbf{H}_0$ ($r = |x|$, $\mathbf{e}_r = x/r$).

Определение 1. *Решение $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ задачи (2)–(6), удовлетворяющее условиям (1), будем называть квазиклассическим.*

2. Существование и единственность решения задачи дифракции

Имеет место следующая теорема [8; 9; 11].

Теорема 1. *Если задача (2)–(6) имеет решение, то оно единственно.*

Для того, чтобы доказать данную теорему, достаточно установить, что однородная краевая задача для рассеянного поля $\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$ может иметь лишь тривиальное решение.

Сформулируем краевую задачу следующим образом

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H}_s = -i\omega\hat{\varepsilon}\mathbf{E}_s, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_s = i\omega\mu_e\mathbf{H}_s, \end{cases}$$

$$[\mathbf{E}_{s,\tau}]\,|_{\partial Q} = [\mathbf{H}_{s,\tau}]\,|_{\partial Q} = 0,$$

$$\mathbf{E}_{s,\tau}\,|_{\Omega} = 0.$$

Также для $\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$ предполагаются выполненными условия излучения (6).

Дополним экран Ω до произвольной кусочно-гладкой односвязной замкнутой ориентируемой поверхности ∂V_1, охватывающей ограниченную область $V_1 \subset \mathbb{R}^3$ и такой, что $\overline{Q} \cap \overline{V}_1 = \varnothing$.

Пусть $B := B_R(0)$ – шар достаточно большого радиуса R такой, что $\overline{Q}, \overline{V}_1 \subset B$. Пусть $V_2 = Q$. Определим также области $V_3 := B \setminus (\overline{V}_1 \cup \overline{V}_2)$ с границей $\partial V_3 = \partial B \cup \partial V_1 \cup \partial V_2$ и $V_4 = \left(\overline{B}\right)^c$.

Далее, $u_{\mathrm{n}} = \dfrac{\partial u}{\partial \mathrm{n}}$ обозначает производную u по направлению единичного вектора внешней нормали к рассматриваемой области.

Рассматриваемую краевую задачу для рассеянного поля сведем к задаче сопряжения в областях V_l (ниже приняты обозначения $\mathcal{E}_l, \mathcal{H}_l$ для $\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$ в V_l):

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathcal{H}_l = -i\omega\varepsilon_e\mathcal{E}_l, \\ rot\ \mathcal{E}_l = i\omega\mu_e\mathcal{H}_l, \end{cases}$$

$$l = 1, 3, 4;$$

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathcal{H}_2 = -i\omega\hat{\varepsilon}\mathcal{E}_2, \\ \operatorname{rot} \mathcal{E}_2 = i\omega\mu_e\mathcal{H}_2, \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_{2,\tau}\,|_{\partial Q} = \mathcal{E}_{3,\tau}\,|_{\partial Q};$$

$$\mathcal{H}_{2,\tau}\,|_{\partial Q} = \mathcal{H}_{3,\tau}\,|_{\partial Q};$$

$$\mathcal{E}_{3,\tau}\,|_{\partial B} = \mathcal{E}_{4,\tau}\,|_{\partial B};$$

$$\mathcal{H}_{3,\tau}\,|_{\partial B} = \mathcal{H}_{4,\tau}\,|_{\partial B};$$

$$\mathcal{E}_{1,\tau}\,|_{\partial V_1 \setminus \overline{\Omega}} = \mathcal{E}_{3,\tau}\,|_{\partial V_1 \setminus \overline{\Omega}};$$

$$\mathcal{H}_{1,\tau}\,|_{\partial V_1 \setminus \overline{\Omega}} = \mathcal{H}_{3,\tau}\,|_{\partial V_1 \setminus \overline{\Omega}};$$

$$\mathcal{E}_{1,\tau}\,|_{\Omega} = \mathcal{E}_{3,\tau}\,|_{\Omega} = 0;$$

Условия Сильвера-Мюллера запишем следующим образом:

$$\mathcal{E}_4, \mathcal{H}_4 = o(1/r), \quad \operatorname{Im} k > 0;$$

$$\mathcal{H}_4 \times \mathbf{e}_r - \mathcal{E}_4 = o(1/r),$$

$$\mathcal{E}_4 \times \mathbf{e}_r - \mathcal{H}_4 = o(1/r);$$

$$\mathcal{E}_4, \mathcal{H}_4 = O(1/r), \quad \operatorname{Im} k = 0;$$

$$r \to \infty.$$

Применим лемму Лоренца

$$\int\limits_{\partial V} (\mathbf{E}' \times \mathbf{H}'' - \mathbf{E}'' \times \mathbf{H}', \mathbf{n})ds =$$

$$= \int\limits_{V} (\mathbf{j}''_H, \overline{\mathbf{H}'}) + (\mathbf{j}'_E, \overline{\mathbf{E}''}) - (\mathbf{j}'_H, \overline{\mathbf{H}''}) - (\mathbf{j}''_E, \overline{\mathbf{E}'})dV$$

в ограниченных областях V_1, V_2 и V_3.

Опишем подробно эту процедуру для неоднородной области $V_2 = Q$. Вместе с исходной системой уравнений Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathcal{H}_2 = -i\omega\hat{\varepsilon}\mathcal{E}_2, \\ \operatorname{rot} \mathcal{E}_2 = i\omega\mu_e\mathcal{H}_2 \end{cases}$$

рассмотрим также систему уравнений для комплексно-сопряженного поля $\overline{\mathcal{E}}_2, \overline{\mathcal{H}}_2$:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \overline{\mathcal{H}}_2 = i\omega\overline{\hat{\varepsilon}}\overline{\mathcal{E}}_2, \\ \operatorname{rot} \overline{\mathcal{E}}_2 = -i\omega\overline{\mu}_e\overline{\mathcal{H}}_2. \end{cases}$$

Заменяя $\overline{\mathcal{E}}_2$ на $-\tilde{\mathcal{E}}_2$, получим

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \overline{\mathcal{H}}_2 = -i\omega\overline{\hat{\varepsilon}}\tilde{\mathcal{E}}_2 = -i\omega\hat{\varepsilon}\tilde{\mathcal{E}}_2 + i\omega(\hat{\varepsilon} - \overline{\hat{\varepsilon}})\tilde{\mathcal{E}}_2, \\ \operatorname{rot} \tilde{\mathcal{E}}_2 = i\omega\overline{\mu}_e\overline{\mathcal{H}}_2 = i\omega\mu_e\overline{\mathcal{H}}_2 - i\omega(\mu_e - \overline{\mu}_e)\overline{\mathcal{H}}_2. \end{cases}$$

В результате применения леммы Лоренца к полям $\mathbf{E}' = \mathcal{E}_2$, $\mathbf{H}' = \mathcal{H}_2$, $\mathbf{E}'' = \tilde{\mathcal{E}}_2$, $\mathbf{H}'' = \overline{\mathcal{H}}_2$ и токам $\mathbf{j}'_E = i\omega\hat{\varepsilon}\tilde{\mathcal{E}}_2$, $\mathbf{j}''_E = i\omega(\hat{\varepsilon} - \overline{\hat{\varepsilon}})\tilde{\mathcal{E}}_2$, $\mathbf{j}'_H = i\omega\mu_e\overline{\mathcal{H}}_2$, $\mathbf{j}''_H = i\omega(\mu_e - \overline{\mu}_e)\overline{\mathcal{H}}_2$, получим следующее равенство

$$\int\limits_{\partial Q} (\mathcal{E}_2 \times \overline{\mathcal{H}}_2 - \tilde{\mathcal{E}}_2 \times \mathcal{H}_2, \mathbf{n})ds =$$

$$= -\int\limits_{Q} i\omega((\hat{\varepsilon} - \overline{\hat{\varepsilon}})\tilde{\mathcal{E}}_2, \overline{\mathcal{E}}_2)dv +$$

$$+ \int\limits_{Q} i\omega((\mu_e - \overline{\mu}_e)\overline{\mathcal{H}}_2, \overline{\mathcal{H}}_2)dv.$$

Заменяя теперь $\tilde{\mathcal{E}}_2$ на $-\overline{\mathcal{E}}_2$ и учитывая свойства сред, получим

$$\int\limits_{\partial Q} (\mathcal{E}_2 \times \overline{\mathcal{H}}_2 + \overline{\mathcal{E}}_2 \times \mathcal{H}_2, \mathbf{n})ds = \int\limits_{Q} i\omega((\hat{\varepsilon} - \overline{\hat{\varepsilon}})\overline{\mathcal{E}}_2, \overline{\mathcal{E}}_2)dv. \qquad (7)$$

В ограниченных областях V_1 и V_3 получаются аналогичные соотношения:

$$\int\limits_{\partial V_1\setminus\bar\Omega} (\mathcal{E}_1 \times \overline{\mathcal{H}}_1 + \overline{\mathcal{E}}_1 \times \mathcal{H}_1, \mathbf{n})ds = \\ = \int\limits_{V_1} i\omega((\varepsilon_e - \overline{\varepsilon}_e)\overline{\mathcal{E}}_1, \overline{\mathcal{E}}_1)dv, \tag{8}$$

$$\int\limits_{\partial Q\cup\partial V_1\setminus\bar\Omega\cup\partial B} (\mathcal{E}_3 \times \overline{\mathcal{H}}_3 + \overline{\mathcal{E}}_3 \times \mathcal{H}_3, \mathbf{n})ds = \\ = \int\limits_{V_3} i\omega((\varepsilon_e - \overline{\varepsilon}_e)\overline{\mathcal{E}}_3, \overline{\mathcal{E}}_3)dv. \tag{9}$$

Обозначим $\psi = \int\limits_{\partial B}(\mathcal{E}_3 \times \overline{\mathcal{H}}_3 + \overline{\mathcal{E}}_3 \times \mathcal{H}_3, \mathbf{n})ds$. Из условий излучения Сильера-Мюллера получим

$$\psi = \int\limits_{\partial B} (\mathcal{E}_3 \times \overline{\mathcal{H}}_3 + \overline{\mathcal{E}_3 \times \overline{\mathcal{H}}_3}, \mathbf{n})ds = \\ = 2\,\mathrm{Re}\int\limits_{\partial B} (\mathcal{E}_3 \times \overline{\mathcal{H}}_3, \mathbf{n})ds = \\ = 2\,\mathrm{Re}\int\limits_{\partial B} ((\mathcal{H}_3 \times \mathbf{n} + o(1/r)) \times \overline{\mathcal{H}}_3, \mathbf{n})ds = \\ = 2\,\mathrm{Re}\int\limits_{\partial B} ((\mathcal{H}_3 \times \mathbf{n}) \times \overline{\mathcal{H}}_3, \mathbf{n})ds + o(1) = \\ = 2\,\mathrm{Re}\int\limits_{\partial B} (\mathcal{H}_3 \times \mathbf{n}, \overline{\mathcal{H}}_3 \times \mathbf{n})ds + o(1) = \\ = 2\int\limits_{\partial B} |\,\mathcal{H}_3 \times \mathbf{n}\,|^2\, ds + o(1) = \\ = 2\int\limits_{\partial B} |\,\mathcal{H}_{3,\tau}\,|^2\, ds + o(1).$$

Сложим равенства (7), (8) и (9):

$$\int\limits_{\partial B} |\,\mathcal{H}_{3,\tau}\,|^2\, ds + \int\limits_{Q}(\mathrm{Im}\,\hat\varepsilon\overline{\mathcal{E}}_2, \overline{\mathcal{E}}_2)dv + \\ + \int\limits_{Q}(\mathrm{Im}\,\mu_e\overline{\mathcal{H}}_2, \overline{\mathcal{H}}_2)dv + \sum_{l=1,3}\int\limits_{V_l}(\mathrm{Im}\,\varepsilon_e\overline{\mathcal{E}}_l, \overline{\mathcal{E}}_l)dv + \\ + \sum_{l=1,3}\int\limits_{V_l}(\mathrm{Im}\,\mu_e\overline{\mathcal{H}}_l, \overline{\mathcal{H}}_l)dv = o(1). \tag{10}$$

и рассмотрим несколько случаев.

Пусть сначала $\mathrm{Im}\,\hat\varepsilon > 0$ всюду в $\overline{\Omega}^c$. Из условий излучения Сильера-Мюллера и (10) следует сразу, что $\mathbf{E}, \mathbf{H} \equiv 0$ во всем пространстве.

Если $\mathrm{Im}\,\hat\varepsilon(x) > 0$ в Q и $\mathrm{Im}\,\varepsilon_e = 0$ в свободном пространстве, то

$$\int\limits_{\partial B} |\,\mathcal{H}_{3,\tau}\,|^2\, ds + \int\limits_{Q}(\mathrm{Im}\,\hat\varepsilon\overline{\mathcal{E}}_2, \overline{\mathcal{E}}_2)dv = o(1).$$

Так как оба слагаемых здесь неотрицательны, то

$$\int\limits_{\partial B} |\,\mathcal{H}_{3,\tau}\,|^2\, ds = o(1),\ R \to \infty;$$

$$\int\limits_{Q}(\mathrm{Im}\,\hat\varepsilon\overline{\mathcal{E}}_2, \overline{\mathcal{E}}_2)dv = 0.$$

В силу леммы Реллиха [13, с. 146] из первого равенства заключаем, что $\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s \equiv 0$ вне рассеивателей; из второго равенства следует $\mathcal{E}_2, \mathcal{H}_2 \equiv 0$ в Q.

Наконец, если диэлектрическая проницаемость всюду вещественна и положительна в $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$, снова из леммы Реллиха [13, с. 146] получаем $\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s \equiv 0$ вне рассеивателей; равенство $\mathcal{E}_2, \mathcal{H}_2 \equiv 0$ в Q также сохраняется. Доказательство завершено.

3. Сведение задачи дифракции электромагнитной волны на системе тел и экранов к системе интегро-дифференциальных уравнений

Выведем систему интегро-дифференциальных уравнений электрического поля для сформулированной задачи дифракции.

Представим полное электрическое поле в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \tag{11}$$

где $\mathbf{E}_0 \in C^\infty\left(\mathbb{R}^3\right)$ − падающее поле,

$$\mathbf{E}_1 \in C^1\left(\left(\partial Q \cup \overline{\Omega}\right)^c\right)\bigcap_{\delta>0} C\left(\overline{P}^+ \setminus \partial\Omega_\delta\right) \times \\ \times \bigcap_{\delta>0} C\left(\overline{P}^- \setminus \partial\Omega_\delta\right)$$

− поле, рассеянное экраном Ω так, что $\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$,

$$\mathbf{E}_2 \in C^1\left(\left(\partial Q \cup \overline{\Omega}\right)^c\right)\bigcap C\left(\overline{Q^c} \setminus \overline{\Omega}\right)\bigcap C\left(\overline{Q}\right)$$

− поле, рассеянное телом Q.

Поле $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)$ есть решение краевой задачи:

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\,\mathbf{H}_0 = -i\omega\varepsilon_e\mathbf{E}_0 + \mathbf{j}_{0,E}, \\ \mathrm{rot}\,\mathbf{E}_0 = i\omega\mu_e\mathbf{H}_0 \end{cases} \text{в } \mathrm{R}^3 \tag{12}$$

Поле $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$, рассеянное экраном есть решение краевой задачи

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\,\mathbf{H}_1 = -i\omega\varepsilon_e\mathbf{E}_1, \\ \mathrm{rot}\,\mathbf{E}_1 = i\omega\mu_e\mathbf{H}_1 \end{cases} \text{в } x, \tag{13}$$

с условиями излучения Сильвера-Мюллера:

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1 = o(1/r), \quad \mathrm{Im}\,k > 0; \\ &\mathbf{H}_1 \times \mathbf{e}_r - \mathbf{E}_1 = o(1/r), \\ &\mathbf{E}_1 \times \mathbf{e}_r - \mathbf{H}_1 = o(1/r); \\ &\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1 = O(1/r), \quad \mathrm{Im}\,k = 0; \\ &r \to \infty, \end{aligned} \tag{14}$$

с условиями сопряжения:

$$\left[\mathbf{E}_{1,\tau}\right]\Big|_{\partial Q} = \left[\mathbf{H}_{1,\tau}\right]\Big|_{\partial Q} = 0 \tag{15}$$

и граничными условиями:

$$\left(\mathbf{E}_{1,\tau} + \mathbf{E}_{0,\tau}\right)\Big|_{\Omega} = 0. \tag{16}$$

Поле $\mathbf{E}_1$ будем искать в виде векторного потенциала [7, с. 54]

$$i\omega\varepsilon_e \mathbf{E}_1(x) = = \left(\operatorname{grad}\operatorname{div} + k_e^2\right)\int\limits_{\Omega} G(x,y)\,\mathbf{u}(y)\,ds_y. \tag{17}$$

где $G(x,y) = \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\exp\left(ik_e|x-y|\right)}{|x-y|}$, div – операция дивергенции, $\mathbf{u}$ – касательное векторное поле на Ω, т. е. $\mathbf{u} := \dfrac{\tilde{\mathbf{u}}}{i\omega\varepsilon_e}$, где $\tilde{\mathbf{u}}$ – поверхностная плотность тока: $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$ на Ω, $\mathbf{v}$ – единичный вектор нормали к Ω.

Рассмотрим «новое» падающее поле $\left(\mathbf{E}_0', \mathbf{H}_0'\right) = \left(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0\right) + \left(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1\right)$ и перепишем систему (2) в виде

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_e\mathbf{E} + \mathbf{j}_E, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} = i\omega\mu_e\mathbf{H}; \end{cases} \tag{18}$$

ток $\mathbf{j}_E$ имеет вид:

$$\mathbf{j}_E = \mathbf{j}'_{0,E} + \mathbf{j}_{p,E},$$

где $\mathbf{j}'_{0,E}$ – токи, отвечающие полю $\left(\mathbf{E}_0', \mathbf{H}_0'\right)$, а $\mathbf{j}_{p,E}$ – ток поляризации в области Q:

$$\mathbf{j}_{p,E} = -i\omega\left(\hat{\varepsilon}(x) - \varepsilon_e\hat{I}\right)\mathbf{E}.$$

Поле $\mathbf{E}$ представим в Q через векторный потенциал

$$\mathbf{A}_E(x) = \int\limits_{Q} G(x,y)\,\mathbf{j}_E(y)\,dy \tag{19}$$

по известным формулам [1]

$$\mathbf{E} = i\omega\mu_e\mathbf{A}_E - \frac{1}{i\omega\varepsilon_e}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}_E. \tag{20}$$

Из определения полей $\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1$ и равенств (11), (18)–(20) получим интегро-дифференциальное уравнение электрического поля

$$\begin{gathered} \mathbf{E}(x) - \left(k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}\right)\times \\ \times\int\limits_{Q} G(x,y)\left[\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_e} - \hat{I}\right]\mathbf{E}(y)\,dy - \\ -\frac{1}{i\omega\varepsilon_e}\left(k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}\right)\int\limits_{Q} G(x,y)\mathbf{u}(y)\,ds_y = \\ = \mathbf{E}_0(x), \quad x \in Q. \end{gathered} \tag{21}$$

Следующее равенство дает представление поля вне тела и экрана:

$$\begin{gathered} \mathbf{E}(x) = \left(k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}\right)\times \\ \times\int\limits_{Q} G(x,y)\left[\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_e} - \hat{I}\right]\mathbf{E}(y)\,dy + \\ + \frac{1}{i\omega\varepsilon_e}\left(k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}\right)\int\limits_{\Omega} G(x,y)\mathbf{u}(y)\,ds_y + \\ + \mathbf{E}_0(x), \quad x \in R^3 \setminus \left(\overline{Q} \cup \overline{\Omega}\right). \end{gathered} \tag{22}$$

Для получения второго уравнения перейдем в (22) к пределу, опуская точку x на Ω и взяв касательные компоненты всех членов уравнения:

$$\begin{gathered} \left(-\left(k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}\right)\int\limits_{Q} G(x,y)\left[\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_e} - \hat{I}\right]\times\right. \\ \times\,\mathbf{E}(y)\,dy - \frac{1}{i\omega\varepsilon_e}\left(k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}\right)\times \\ \left.\times\int\limits_{\Omega} G(x,y)\mathbf{u}(y)\,ds_y\right)_{\tau} = \mathbf{E}_{0,\tau}(x), \quad x \in \Omega, \end{gathered} \tag{23}$$

где $\mathbf{E}_{0,\tau}$ касательная составляющая падающего поля на экране.

Введем замену $\left[\dfrac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_e} - \hat{I}\right]\mathbf{E} = \mathbf{J}$, $\left[\dfrac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_e} - \hat{I}\right]^{-1} = \hat{\xi}$ и перепишем систему уравнений (21), (23) в токах, умножив для симметрии второе уравнение системы на минус единицу:

$$\begin{gathered} \hat{\xi}\mathbf{J} - \left(k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}\right)\int\limits_{Q} G(x,y)\mathbf{J}(y)\,dy - \\ -\frac{1}{i\omega\varepsilon_e}\left(k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}\right)\int\limits_{\Omega} G(x,y)\,\mathbf{u}(y)\,ds_y = \\ = \mathbf{E}_0(x), \quad x \in Q, \\ \left(-\left(k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}\right)\int\limits_{Q} G(x,y)\mathbf{J}(y)\,dy - \right. \\ \left. -\frac{1}{i\omega\varepsilon_e}\left(k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}\right)\int\limits_{\Omega} G(x,y)\,\mathbf{u}(y)\,ds_y\right)_{\tau} = \\ = \mathbf{E}_{0,\tau}(x), \quad x \in \Omega. \end{gathered} \tag{24}$$

В данной системе слагаемые

$\left(k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}\right)\int\limits_{\Omega} G(x,y)\,\mathbf{u}(y)\,ds_y$ и

$\left(k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}\right)\int\limits_{Q} G(x,y)\mathbf{J}(y)\,dy$

являются гладкими и особенностей не имеют, так как в случаях $\Omega \times Q$ и $Q \times \Omega$ точки x, y в функции

Грина не будут совпадать. В диагональных блоках слагаемые

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\int_Q G(x,y)\mathbf{J}(y)\,dy \text{ и}$$

$$\operatorname{grad}_\tau \operatorname{div}\int_\Omega G(x,y)\,\mathbf{u}(y)\,ds_y$$

являются сингулярными интегралами.

Таким образом, получена система интегро-дифференциальных уравнений задачи дифракции на системе объемных тел и тонких экранов.

4. Разрешимость системы интегро-дифференциальных уравнений

Рассмотренная краевая задача сводится к операторному уравнению

$$\widehat{L}\mathbf{V} = \mathbf{f}. \tag{25}$$

Здесь $\mathbf{V} = (\mathbf{J}, \mathbf{u})$, $\mathbf{J} = \left[\frac{\widehat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_e} - \widehat{I}\right]\mathbf{E}$ – неизвестный вектор тока поляризации в Q. Правая часть есть вектор $\mathbf{f} = (\mathbf{E}_{0,Q}, \mathbf{E}_{0,\tau})$, где $\mathbf{E}_{0,Q}$ – сужение падающего поля на Q.

Матричный оператор $\widehat{L}$ имеет вид

$$\widehat{L} = \widehat{L}_1 + \widehat{L}_2 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & K_1 \\ K_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Операторы A, S и K_i определяются равенствами

$$A\mathbf{J} := \widehat{\xi}\mathbf{J}(x) - (k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div})\int_Q G(x,y)\mathbf{J}(y)dy,$$

$$S\mathbf{u} := \left(-\frac{1}{i\omega\varepsilon_e}(k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div})\int_\Omega G(x,y)\mathbf{u}(y)ds_y\right)_\tau,$$

$$K_1\mathbf{u} := -\frac{1}{i\omega\varepsilon_e}(k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div})\int_\Omega G(x,y)\mathbf{u}(y)ds_y,$$

$$K_2\mathbf{J} := \left(-(k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div})\int_Q G(x,y)\mathbf{J}(y)dy\right)_\tau$$

и рассматриваются как отображения в следующих пространствах

$$A\mathbf{J} := L_2(Q) \to L_2(Q),$$

$$S\mathbf{u} := W(\Omega) \to W'(\Omega),$$

$$K_1\mathbf{u} := W(\Omega) \to L_2(Q),$$

$$K_2\mathbf{J} := L_2(Q) \to W'(\Omega).$$

Пространство $W = W(\Omega)$ сечений векторных расслоений было введено в монографии [7, с. 47] как замыкание пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|_W$:

$$\|\mathbf{u}\|_W^2 = \|\mathbf{u}\|_{-1/2}^2 + \|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_{-1/2}^2.$$

Здесь $\|\mathbf{u}\|_{-1/2}^2$ обозначает норму в пространстве Соболева $H^{-1/2}(\Omega)$, пространство $W' = W'(\Omega)$ – антидвойственное к W, т. е. пространство антилинейных непрерывных функционалов над W [7, с. 52]. Решение уравнения (25) – пара $(\mathbf{J}, \mathbf{u}) \in L_2(Q) \times W(\Omega)$.

В данной системе интегральные операторы K_1 и K_2 имеют гладкие ядра, так как в случаях $\Omega \times Q$ и $Q \times \Omega$ точки x, y в функции Грина не будут совпадать. A и S являются интегро-дифференциальными сингулярными операторами.

Теорема 2. *Оператор* $\widehat{L} : L_2(Q) \times W(\Omega) \to$ $\to L_2(Q) \times W'(\Omega)$ *является обратимым.*

Доказательство. В силу ограничений, наложенных на тензор диэлектрической проницаемости оператор $\widehat{A}$ является фредгольмовым в $L_2(Q)$. Оператор $S : W(\Omega) \to W'(\Omega)$ фредгольмов, так как всюду вне экрана выполнено условие $k_e \neq 0$ [7]. Следовательно, $\widehat{L}_1$ – фредгольмов. Опертор $\widehat{L}_2$ компактен, так как тело и экран непересекаются и, следовательно, ядра обоих операторов K_1 и K_2 являются бесконечно дифференцируемыми. Таким образом, $\widehat{L} = \widehat{L}_1 + \widehat{L}_2$ – фредгольмов оператор выбранных пространствах. Обратимость этого оператора следует из его фредгольмовости и теоремы 1 о единственности решения краевой задачи [8; 11]. Теорема доказана.

Таким образом, система уравнений (24) (или (25)) имеет единственное решение при любой правой части (в рассматриваемых пространствах).

Заключение

В статье рассмотрена задача дифракции электромагнитной волны на системе произвольно расположенных непересекающихся идеально проводящих экранов и диэлектрических тел. Представлены основные результаты о разрешимости краевой задачи для системы уравнений Максвелла. Задача сведена к системе интегро-дифференциальных уравнений по поверхности экранов и по телам. Представлены результаты о разрешимости интегро-дифференциальных уравнений.

Работа выполнена при поддержке гранта Министерства образования и науки РФ № 1.894.2017/ПЧ «Суперкомпьютерное моделирование для решения прикладных задач электродинамики».

Список литературы

1. Самохин А.Б. Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии. М.: Радио и связь, 1998. 160 с.
2. Costabel M., Darrigrand E., Kone E. Volume and surface integral equations for electromagnetic scattering by a dielectric body // J. Comput. Appl. Math. 2010. Vol. 234. P. 1817–1825.
3. Costabel M. Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results/ // SIAM J. Math. Anal. 1988. Vol. 19. № 3. P. 613–626.
4. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния / пер. с. англ. М.: Мир, 1987. 312 с.
5. Miller E.K., Poggio A.J. Moment-Method Techniques in Electromagnetics from an Applications Viewpoint // Electromagnetic Scattering / ed. by P.L.E. Uslenghi. N.-Y.: Academic Press, 1978. P. 315–358.
6. Numerical and Asymptotic Techniques in Electromagnetics / ed. by R. Mittra. N.-Y.: Springer Verlag, 1975. 534 p.
7. Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. М.: Радиотехника, 1996. 176 с.
8. Smirnov Yu.G., Tsupak A.A. Diffraction of Acoustic and Electromagnetic Waves by Screens and Inhomogeneous Solids: Mathematical Theory. M.: RU-SCIENCE, 2016. 214 p.
9. Smirnov Yu.G., Tsupak A.A. Integro-differential equations of the vector problem of electromagnetic wave diffraction by a system of nonintersecting screens and inhomogeneous bodies // Advances in Mathematical Physics. 2015. Vol. 2015. Article ID 945965, 6 pages.
10. Smirnov Yu.G., Tsupak A.A. Existence and uniqueness theorems in electromagnetic diffraction on systems of lossless dielectrics and perfectly conducting screens // Applicable Analysis. 2016. Vol. 2016. doi: 10.1080/00036811.2016.1188289.
11. Смирнов Ю.Г., Цупак А.А. Математическая теория дифракции акустических и электромагнитных волн на системе экранов и неоднородных тел. М.: РУСАЙНС, 2016. 226 с.
12. Смирнов Ю.Г. Математические методы исследования задач электродинамики. Пенза: Информационно-издательский центр ПГУ, 2009. 267 с.
13. Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г. Математические модели электродинамики. М.: Высшая школа, 1991. 224 с.

Diffraction problem of electromagnetic wave propagation on system of arbitrary located screens and bodies

Yu.G. Smirnov

Diffraction problem of electromagnetic wave propagation on system of arbitrary located screens and bodies is considered. Uniqueness and solvability theorems are proved. The problem is reduced to the integro-differential equations in Sobolev spaces. Solvability of system of integro-differential equations is proved also.

Keywords: dielectric bodies, perfectly conducting screens, diffraction problem, Maxwell equations, system of integro-differential equations, elliptic operator.