2018 г. Том 21, № 1

Физика волновых процессов и радиотехнические системы

УДК 517.93

Генератор монохроматических автоколебаний в дискретном времени

В.В. Зайцев, Э.Ю. Федюнин

Самарский национальный исследовательский университет им. акад. С.П. Королева
443086, Российская Федерация, г. Самара
Московское шоссе, 34

Для проектирования генераторов автоколебаний в дискретном времени предложено использовать гармонически линеаризованные модели автоколебательных систем томсоновского типа. Необходимые для этих моделей оценки скорости и мгновенной мощности осцилляций проведены на основе формулы численного дифференцирования гармонических сигналов с известными частотами. Показано, что в рамках такого подхода в дискретном времени удается реализовать нелинейные системы, генерирующие строго монохроматические автоколебания.

Ключевые слова: автоколебательная система, гармоническая линеаризация, дискретное время, гармоническая аппроксимация скорости, спектр автоколебаний.

Введение

В автогенераторах квазигармонических колебаний (автогенераторах томсоновского типа) функцию ограничения амплитуды автоколебаний выполняет нелинейность [1; 2]. Одновременно с этим она является причиной генерации высших гармоник основной частоты, которые ухудшают динамические характеристики и снижают стабильность частоты автогенераторов. В аналоговой электронике основной способ снижения уровня гармоник – это повышение добротности колебательной системы автогенератора. Но полностью избавиться от гармонических составляющих на практике не удается.

Формулируя математические модели автогенераторов в дискретном времени, мы получаем алгоритмы генерации дискретных автоколебаний (ДВ-автоколебаний). Такие алгоритмы могут также рассматриваться как самостоятельные объекты нелинейной динамики – ДВ-генераторы. В них гармоники существенно усложняют динамику автоколебаний, в частности, приводят к возникновению эффектов, не характерных для аналоговых систем [3; 4]. Поиск возможностей для повышения спектральной чистоты ДВ-автоколебаний в таком случае представляет значительный интерес.

В настоящей статье в рассмотрение вводится томсоновский ДВ-генератор с кубической нелинейностью, имеющий в режиме свободных автоколебаний спектр без гармонических составляющих. Синтез проведен методом инвариантности импульсных характеристик [5] на основе гармонически линеаризованного аналогового прототипа.

1. Томсоновский автогенератор в непрерывном времени

В качестве исходной модели автогенератора томсоновского типа примем модель с кубической нелинейностью, определяемую уравнением движения вида

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=p\,\frac{\omega_0}{Q}\frac{d}{dt}\left(x-\frac{1}{3}x^3\right), \qquad (1)$$

где ω_0 и Q – собственная частота и добротность линейного резонатора; p – параметр превышения порога генерации (порог: $p=1$).

В теории колебаний широко известен метод гармонической линеаризации [6]. Он заключается в замене нелинейных слагаемых в уравнении движения системы формально линейными, но зависящими от амплитуды колебаний в предполагаемом решении. По отношению к уравнению (1) эта процедура выглядит следующим образом.

Для решения

$$x(t)=a\cos(\omega_0 t)=a\cos\psi$$

разложение функции

$$G(x)=x-\frac{1}{3}x^3$$

в правой части (1) в ряд Фурье имеет вид

$$G\left(a\cos\psi\right)=\left(1-\frac{1}{4}a^2\right)a\cos\psi-\frac{1}{12}a^3\cos 3\psi.$$

Это выражение заменяется приближенным

$$G\left(a\cos\psi\right)=\left(1-\frac{1}{4}a^2\right)a\cos\psi=S(a^2)x$$

и используется в правой части (1). В результате получается линеаризованное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=p\frac{\omega_0}{Q}S(a^2)\frac{dx}{dt}. \quad (2)$$

Заметим также, что помимо обнуления высших гармоник, генерируемых нелинейностью, в рамках метода учитывается медленность амплитуды $a(t)$. Поэтому в правой части уравнения (2) амплитуда не дифференцируется.

Предполагая в дальнейшем дискретизацию времени с интервалом Δ, введем в уравнение (2) безразмерную временную переменную $\tau = t\ /\ \Delta$:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}+2\pi\nu\frac{dx}{d\tau}+4\pi^2\Omega_0^2x=2\pi\nu pS(a^2)\frac{dx}{d\tau}. \quad (3)$$

Здесь $\Omega_0=\omega_0\ /\ \omega_d$ – собственная частота, измеряемая в единицах частоты дискретизации $\omega_d=2\pi\ /\ \Delta$; $\nu=\Omega_0\ /\ Q$ – полоса резонатора.

2. Автогенератор в дискретном времени

Метод инвариантности импульсных характеристик широко применяется при синтезе дискретных линейных фильтров по аналоговым моделям-прототипам. Он основан на использовании последовательности временных отсчетов импульсной характеристики прототипа в качестве импульсной характеристики ДВ-фильтра. В работе [7] метод предложено применять для нелинейных систем.

В рассматриваемой ситуации правую часть уравнения (3) формально предлагается считать внешним воздействием линейный резонатор таким, что импульсная характеристика определяется уравнением

$$\frac{d^2h}{d\tau^2}+2\pi\nu\frac{dh}{d\tau}+4\pi^2\Omega_0^2h=4\pi^2\Omega_0^2\delta(\tau).$$

Последовательность отсчетов $h[n]=h(\tau_n)$ на временной сетке $\tau_n=n$ формирует импульсную характеристику линеаризованной ДВ-системы с прототипом (3):

$$h[n]=2\pi\Omega_0\exp\left(-\pi\nu n\right)\sin(2\pi\Omega_0 n),\quad n=0,1,2,\ldots \quad (4)$$

Дискретное преобразование Фурье последовательности (4) дает частотную характеристику, которая, в свою очередь, позволяет представить ДВ-генератор в форме рекурсивной системы второго порядка:

$$\begin{aligned}&x[n]-2\alpha\cos\left(2\pi\Omega_0\right)x[n-1]+\alpha^2x[n-2]=\\&=2\pi\alpha\nu p\,\mathrm{sinc}\left(2\pi\Omega_0\right)S(a^2[n-1])\dot{x}[n-1],\end{aligned} \quad (5)$$

где $\mathrm{sinc}\left(2\pi\Omega_0\right)$ – кардинальный синус; $\alpha=\exp(-\pi\nu)$ – параметр диссипативности.

Разностное уравнение (5) содержит производную $\dot{x}[n]=\left(dx\ /\ d\tau\right)_{\tau=n}$. Для ее определения воспользуемся выражением

$$\mathrm{sinc}\left(2\pi\Omega_0\right)\dot{x}[n]=\cos\left(2\pi\Omega_0\right)x[n]-x[n-1]. \quad (6)$$

Оно является точным для гармонических колебаний с частотой Ω_0, а для квазигармонических – может рассматриваться как гармоническая аппроксимация скорости. Выражение (6) и справедливое для гармонических колебаний равенство

$$w[n]=a^2[n]=x^2[n]+\frac{1}{4\pi^2\Omega_0^2}\dot{x}[n]$$

позволяют также вычислять мощность $w[n]$ по мгновенным значениям осцилляций:

$$\begin{aligned}&w[n]=\frac{1}{\sin^2\left(2\pi\Omega_0\right)}\times\\&\times\left(x^2[n]-2\cos\left(2\pi\Omega_0\right)x[n]x[n-1]+x^2[n-1]\right).\end{aligned} \quad (7)$$

Эта мощность – аргумент функции $S(a^2)$ в уравнении (5):

$$S(w)=1-\frac{1}{4}w.$$

Таким образом, с учетом выражений (6) и (7) уравнение движения ДВ-генератора (5) приобретает вид

$$\begin{aligned}&x[n]-2\alpha\cos\left(2\pi\Omega_0\right)x[n-1]+\alpha^2x[n-2]=\\&=\gamma\,S\left(w[n-1]\right)\left(\cos\left(2\pi\Omega_0\right)x[n-1]-x[n-2]\right),\end{aligned} \quad (8)$$

где $\gamma=2\pi\alpha\nu p$ – параметр глубины обратной связи.

Отметим, что лишь одно из двух выражений (7) и (8), описывающих ДВ-генератор, является уравнением динамической системы второго порядка – уравнение (8). Второе – уравнение (7) описывает безынерционное нелинейное преобразование. Поэтому в целом порядок динамической системы (7)–(8) равен двум.

3. Численный эксперимент с ДВ-генератором

Последовательность шагов синтеза ДВ-генератора (8) позволяет предполагать, что при совпадении частоты генерации Ω_a с собственной

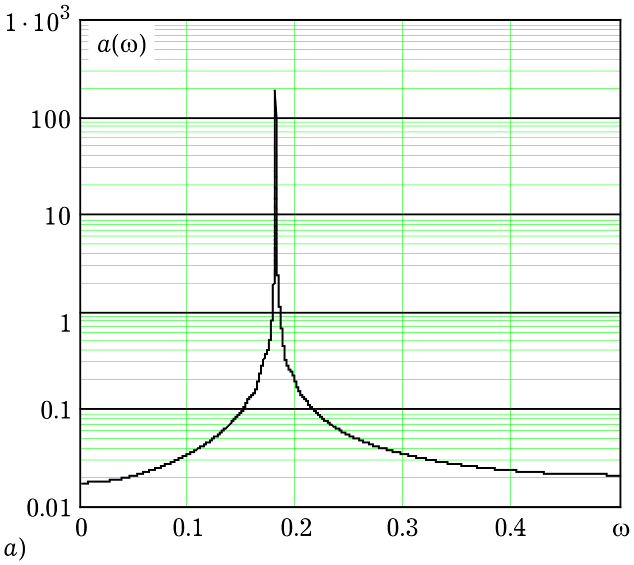

Рис. 1. Амплитудные спектры автоколебаний в ДВ-генераторах (8) и (9)

частотой Ω_0 его автоколебания не содержат гармоник. Численный эксперимент подтверждает справедливость предположения. Действительно, на рис. 1, *а* приведен амплитудный спектр автоколебаний в ДВ-генераторе с параметрами $\Omega_0 = 0.18$, $Q = 30$ и $p = 5$ ($\gamma = 0.185$). Оценка спектра проведена дискретным преобразованием Фурье временного ряда $x[n]$ длиной $N = 16384$. Для сравнения на рис. 1, *б* показан аналогичный спектр для ДВ-осциллятора Ван дер Поля [7]:

$$x[n] - 2\alpha\cos\left(2\pi\Omega_0\right)x[n-1] + \alpha^2 x[n-2] = \\ = \gamma\left(1 - x^2[n-1]\right)\times \\ \times\left(\cos\left(2\pi\Omega_0\right)x[n-1] - x[n-2]\right). \tag{9}$$

Отсутствие гармонических составляющих спектра хорошо видно на рис. 1, *а*, в то время как, рис. 1, *б* демонстрирует спектр, обогащенный гармониками, в том числе подмененными.

Влияние гармоник основной частоты на форму сигнала позволяет оценить рис. 2, на котором показаны траектории автоколебаний на фазовой плоскости $\left(x[n-1], x[n]\right)$. Кривая (8) – эллипс.

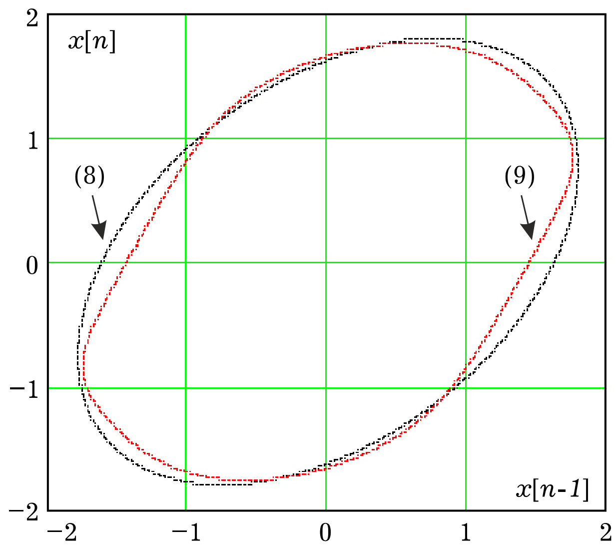

Рис. 2. Траектории автоколебаний

Синтезируемые предложенным способом ДВ-генераторы можно использовать в качестве нелинейных функциональных узлов в численных моделях сложных радиоэлектронных устройств. Кроме того, они могут служить основой алгоритмов обработки дискретных (цифровых) сигналов.

Заключение

Предложенный метод синтеза ДВ-генераторов со строго гармоническими автоколебаниями не связан с моделью кубической нелинейности системы-прототипа. Крутизна $S(a^2)$ в уравнении (2) должна лишь допускать наличие стационарного режима автоколебаний. Основным положением является аппроксимация (6) скорости осцилляций и основанная на ней оценка (7) амплитуды (мгновенной мощности) автоколебаний.

Список литературы

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с.
2. Теодорчик К.Ф. Автоколебательные системы. М.: Гостехиздат, 1952. 272 с.
3. Зайцев В.В., Стулов И.В. О влиянии подмененных гармоник на динамику автоколебаний в дискретном времени // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2015. Т. 23. № 6. С. 40–46.
4. Зайцев В.В., Стулов И.В., Шилин А.Н. Субгармоническая синхронизация автоколебаний в дискретном времени //

Вестник Самарского государственного университета. 2015. № 10 (132). С. 134–142.

5. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера, 2006. 856 с.

6. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Изд. 4-е, испр. и доп. М.: Наука, 1974. 504 с.

7. Зайцев В.В. Дискретный осциллятор Ван дер Поля: конечные разности и медленные амплитуды // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25. № 6. С. 70–78.

The generator of monochromatic self-oscillations in discrete time

V.V. Zaitsev, E.Yu. Fedyunin

For design of generators of self-oscillations in discrete time it is offered to use harmoniously linearized models of self-oscillatory systems of Thomson type. Estimates of speed and instant power of oscillations, necessary for these models, are carried out on the basis of a formula of numerical differentiation of harmonious signals with the known frequencies. It is shown that within such approach in discrete time it is possible to realize the nonlinear systems generating strictly monochromatic self-oscillations.

Keywords: self-oscillatory system, harmonious linearization, discrete time, harmonious approximation of speed, spectrum of self-oscillations.