

Метод коллокаций в самосогласованной задаче об излучении из круглого отверстия в проводящем экране

К.И. Кисиленко, Г.С. Малышев, А.С. Раевский, С.Б. Раевский

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева
603950, Российская Федерация, г. Нижний Новгород
ул. Минина, 24

Рассматривается постановка самосогласованной задачи об излучении из отверстия в проводящем экране. Задача сводится к системе однородных интегральных уравнений, то есть формулируется однородная краевая задача на собственные функции и собственные значения, которая решается методом коллокаций. Предлагается процедура реализации последнего в применении к несимметричным и симметричным полям излучения.

Ключевые слова: самосогласованная задача, метод коллокаций, задача на собственные функции.

1. Решение задачи об излучении отверстия в экране

Рассматриваем однородную краевую задачу об излучении из круглого отверстия в идеально проводящем бесконечном плоском экране [1]. Исходные интегральные уравнения были получены путем выражения поля излучения через неизвестное поле на поверхности излучения и последующей подстановки в граничные условия на этой поверхности. Указанные интегральные уравнения образуют систему [1]:

$$\begin{cases} E_\rho = -\frac{i\omega\mu}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty H_\varphi \frac{e^{-ikr_0}}{r_0} \rho \, d\rho \, d\varphi_0, \\ H_\varphi = -\frac{i\omega\varepsilon}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty E_\rho \frac{e^{-ikr_0}}{r_0} \rho \, d\rho \, d\varphi_0; \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} E_\varphi = \frac{i\omega\mu}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty H_\rho \frac{e^{-ikr_0}}{r_0} \rho \, d\rho \, d\varphi_0, \\ H_\rho = \frac{i\omega\varepsilon}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty E_\varphi \frac{e^{-ikr_0}}{r_0} \rho \, d\rho \, d\varphi_0, \end{cases} \quad (2)$$

где E_ρ , E_φ , H_ρ , H_φ – тангенциальные компоненты поля на излучающей поверхности S_0 ; ε , μ – абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости. Величина r_0 в системах (1), (2) определяется следующим образом:

$$r_0 = \sqrt{R^2 + \rho^2 - 2\rho R \cos(\varphi - \varphi_0)},$$

где (ρ, φ_0) – полярные координаты точек источника на плоскости S_0 ; (R, φ) – координаты точки

наблюдения на плоскости S_0 ; r_0 – расстояние от излучающего элемента с координатами (ρ, φ_0) до точки наблюдения (R, φ) .

Покажем принципиальную возможность поиска собственных функций с помощью метода коллокаций. Сначала рассмотрим общий случай, когда излучающая поверхность представляет из себя металлический экран с отверстием A_0 произвольной формы. Для решения систем (1) и (2) будем использовать спектральный метод [2], согласно которому, в уравнениях (1), (2) компоненты поля представляются в виде автономных разложений. Исходя из физических соображений, эти разложения должны удовлетворять трем обязательным условиям: условию на ребре [3] (на краях отверстия A_0), нулевому условию на бесконечном удалении от отверстия (условие Зоммерфельда), условию на идеально проводящей поверхности. Связь между коэффициентами этих разложений устанавливается системой интегральных уравнений (1) и (2), то есть, в конечном итоге, системой уравнений Максвелла, из которой получены указанные интегральные уравнения. Алгебраизация этих уравнений приводит к двум системам линейных однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложений полей. Условия нетривиальности их решений дают два трансцендентных характеристических уравнения относительно двух параметров разложений полей, являющихся собственными значениями задачи. Совместное их решение позволяет опре-

делить собственные функции задачи на системе однородных интегральных уравнений.

Согласно условию на ребре, нормальная к кромке отверстия компонента магнитного поля H_ρ должна иметь особенность $|a - R|^{-1/2}$ при $R \rightarrow a$ [3], где a – это радиус отверстия. Радиальная компонента электрического поля E_ρ будет иметь особенность $(a - R)^{-1/2}$ при $R \rightarrow a$. Напротив, азимутальная компонента E_φ электрического поля будет конечна на кромке отверстия. Если азимутальная компонента H_φ магнитного поля отлична от нуля в центре отверстия, то она должна являться гладкой функцией в окрестности точки $R = 0$.

С учетом условий, накладываемых на компоненты полей в центре отверстия и на его кромке, представим компоненты поля в виде разложений:

$$E_\rho(R, \varphi) = \begin{cases} \sum_{m=0}^N A_m J_{-1/2} \left(\gamma \frac{\alpha_m^{(-1/2)} (a - R)}{a} \right) \times \\ \times \cos(\bar{n}\varphi), & R \leq a; \\ 0, & R > a; \end{cases} \quad (3a)$$

$$E_\varphi(R, \varphi) = \begin{cases} \sum_{m=0}^N B_m J_n \left(\gamma \frac{\alpha_m^{(n)}}{a} (R + \Delta) \right) \times \\ \times \sin(\bar{n}\varphi), & R \leq a; \\ 0, & R > a; \end{cases} \quad (3b)$$

$$H_\rho(R, \varphi) = \sqrt{\frac{a}{|a - R|}} \sum_{m=0}^N C_m \times \\ \times L_{2m} \left(\beta \frac{R}{a} \right) \sin(\bar{n}\varphi); \quad (4a)$$

$$H_\varphi(R, \varphi) = \sum_{m=0}^N G_m L_{2m} \left(\beta \frac{R}{a} \right) \times \\ \times e^{-R/a} \cos(\bar{n}\varphi), \quad (4b)$$

где N – целое положительное число, определяющее порядок приближения; $L_m(x)$ – функции параболического цилиндра, выражающиеся через полиномы Эрмита $H_m(x)$. В физическом определении:

$$L_m(x) = \frac{\exp(-x^2/2) H_m(x)}{\sqrt{(2^m \sqrt{\pi} m!)}} \quad (5)$$

$$H_m(x) = (-1)^m \exp(x^2) \frac{d^m}{dx^m} \exp(-x^2).$$

В выражениях (4) разложения компонент магнитного поля производятся по функциям параболического цилиндра с четными индекса-

ми, что необходимо для обеспечения гладкости функций $H_\rho(R, \varphi)$ и $H_\varphi(R, \varphi)$ в нуле.

Сдвиг Δ по радиальной оси вводится в разложении (3б) для того, чтобы сумма ряда по функциям Бесселя с индексом $n \neq 0$ не обращалась в нуль при $R = 0$. В общем случае нет оснований утверждать, что поле E_φ в центре отверстия должно обращаться в нуль. Однако, найденные в процессе решения задачи коэффициенты B_m могут принять значения, при которых сумма ряда (3б) будет равна нулю при $R = 0$.

Целочисленные индексы n и \bar{n} в разложениях (3), (4) принимают фиксированные значения, то есть по ним суммирования не производим; $\alpha_m^{(n)}$, $m = 0, 1, \dots, N$ – корни функции Бесселя: $J_n(\alpha_m^{(n)}) = 0$; $\alpha_m^{(-1/2)}$, $m = 0, 1, \dots, N$ – корни функции Бесселя индекса $-1/2$: $J_{-1/2}(\alpha_m^{(-1/2)}) = 0$.

Подставляем разложения (3), (4) в системы интегральных уравнений (1), (2):

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{m=0}^N A_m J_{-1/2} \left(\gamma \frac{\alpha_m^{(-1/2)} (a - R)}{a} \right) \cos(\bar{n}\varphi), \\ & \left. \begin{aligned} & R \leq a; \\ & 0, \quad R > a \end{aligned} \right\} = \\ & = -\frac{i\omega\mu}{4\pi} \sum_{m=0}^N G_m \int_0^{2\pi} \int_0^\infty L_{2m} \left(\beta \frac{\rho}{a} \right) \cos(\bar{n}\varphi_0) \times \\ & \times \frac{e^{-ikr_0}}{r_0} e^{-\rho/a} \rho d\rho d\varphi_0; \end{aligned} \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} & e^{-R/a} \sum_{m=0}^N G_m L_{2m} \left(\beta \frac{R}{a} \right) \cos(\bar{n}\varphi) = \\ & = -\frac{i\omega\varepsilon}{4\pi} \sum_{m=0}^N A_m \int_0^{2\pi} \int_0^a J_{-1/2} \left(\gamma \frac{\alpha_m^{(-1/2)} (a - \rho)}{a} \right) \times \\ & \times \cos(\bar{n}\varphi_0) \frac{e^{-ikr_0}}{r_0} \rho d\rho d\varphi_0; \end{aligned} \quad (6b)$$

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{m=0}^N B_m J_n \left(\gamma \frac{\alpha_m^{(n)}}{a} (R + \Delta) \right) \sin(\bar{n}\varphi), \\ & \left. \begin{aligned} & R \leq a; \\ & 0, \quad R > a \end{aligned} \right\} = \\ & = \frac{i\omega\mu}{4\pi} \sqrt{a} \sum_{m=0}^N C_m \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{|a - \rho|}} L_{2m} \left(\beta \frac{\rho}{a} \right) \times \\ & \times \sin(\bar{n}\varphi_0) \frac{e^{-ikr_0}}{r_0} \rho d\rho d\varphi_0; \end{aligned} \quad (7a)$$

$$\sqrt{\frac{a}{|a - R|}} \sum_{m=0}^N C_m L_{2m} \left(\beta \frac{R}{a} \right) \sin(\bar{n}\varphi) =$$

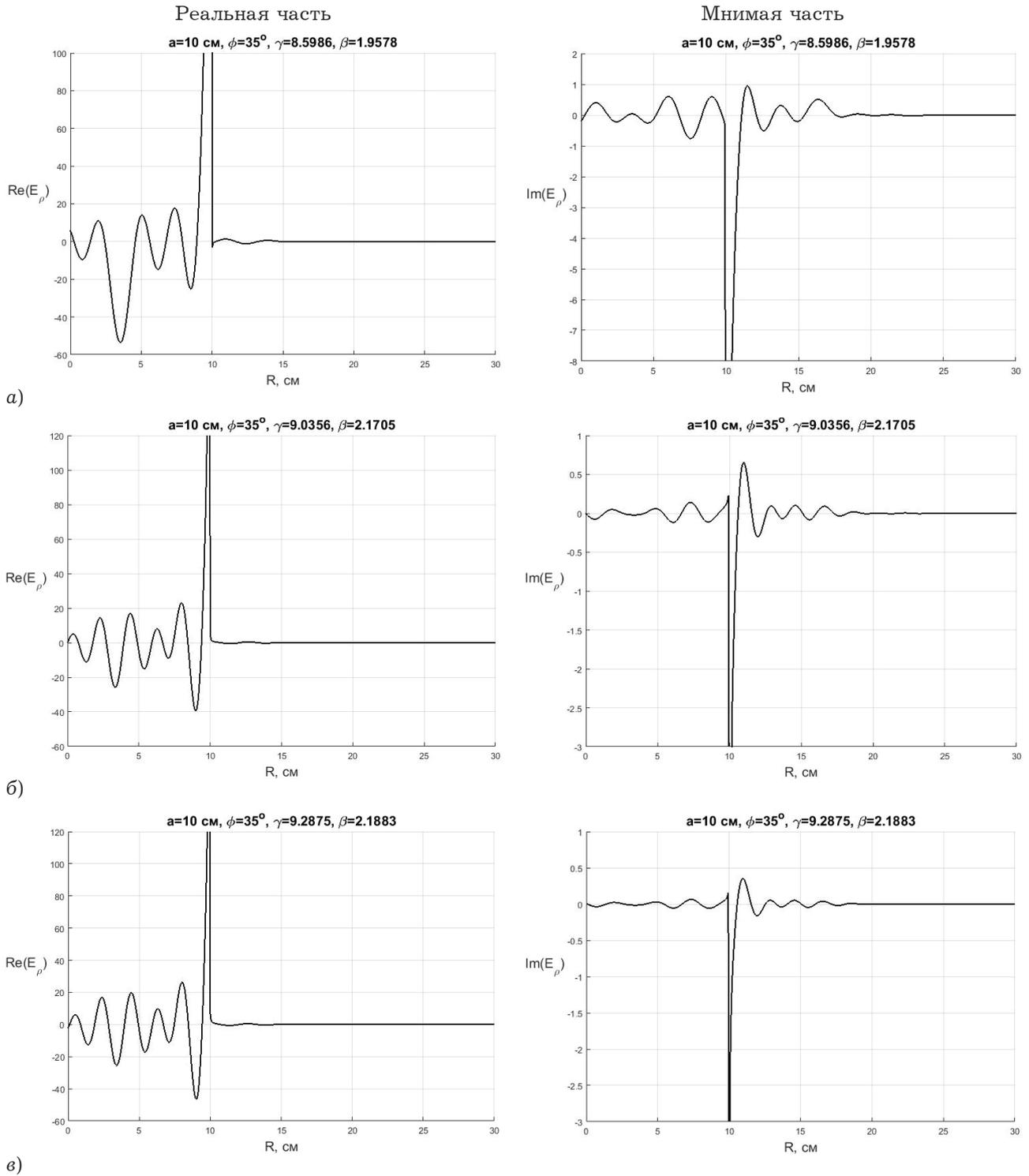


Рис. 1. Зависимость компоненты E_ρ от радиальной координаты, рассчитанная при $\phi = 35^\circ$: а) расчет для 4 узлов коллокации с радиальными координатами $R_1 = 0.3a, R_2 = 0.6a, R_3 = 0.9a, R_4 = 1.2a$; б) расчет для 5 узлов коллокации с радиальными координатами $R_1 = 0.05a, R_2 = 0.4a, R_3 = 0.8a, R_4 = 1.2a, R_5 = 1.4a$; в) расчет для 6 узлов коллокации с радиальными координатами $R_1 = 0.05a, R_2 = 0.3a, R_3 = 0.6a, R_4 = 0.9a, R_5 = 1.2a, R_6 = 1.5a$

$$= \frac{i\omega\epsilon}{4\pi} \sum_{m=0}^N B_m \int_0^{2\pi} \int_0^a J_n \left(\gamma \frac{\alpha_m^{(n)}}{a} (\rho + \Delta) \right) \times \quad (76)$$

$$\times \sin(\bar{n}\varphi_0) \frac{e^{-ikr_0}}{r_0} \rho d\rho d\varphi_0.$$

Для решения систем (6), (7) используем метод коллокаций [4]. Записываем уравнения (6) и (7) в точках

$$(R_i, \varphi_i), \quad i = 1, \dots, (N + 1),$$

где i – номер точки (R_i, φ_i) . Точки (R_i, φ_i) являются узлами коллокации. Угловые координаты

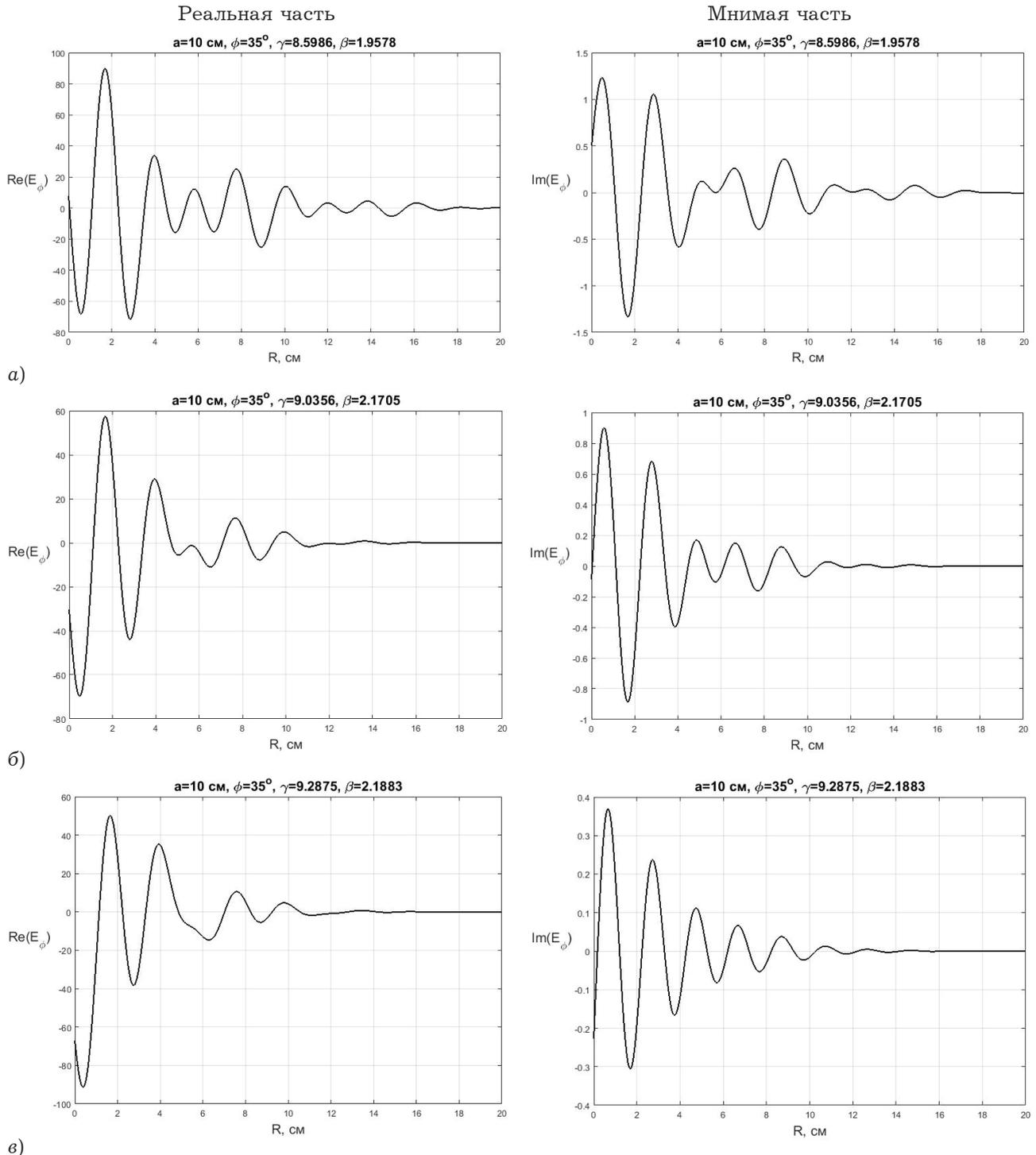


Рис. 2. Зависимость компоненты E_ϕ от радиальной координаты, рассчитанная при $\phi = 35^\circ$: а) расчет для 4 узлов коллокации с радиальными координатами $R_1 = 0.3a$, $R_2 = 0.6a$, $R_3 = 0.9a$, $R_4 = 1.2a$; б) расчет для 5 узлов коллокации с радиальными координатами $R_1 = 0.05a$, $R_2 = 0.4a$, $R_3 = 0.8a$, $R_4 = 1.2a$, $R_5 = 1.4a$; в) расчет для 6 узлов коллокации с радиальными координатами $R_1 = 0.05a$, $R_2 = 0.3a$, $R_3 = 0.6a$, $R_4 = 0.9a$, $R_5 = 1.2a$, $R_6 = 1.5a$

ϕ_i задаются из сегмента $[0, 2\pi]$. Для выбора радиальных координат узлов необходимо рассмотреть поведение поля вне отверстия. При $R > a$ электрическое поле должно обращаться в нуль, компоненты магнитного поля должны стремиться к нулю. Для выполнения последнего условия компоненты магнитного поля представлены в

виде рядов по функциям параболического цилиндра (данное разложение позволит обеспечить быстрое убывание суммы рядов (4) при $R > a$). Например, для функций $L_{2m}(z)$ с индексами 0, 2, 4, 6, 8 и 10 носитель находится на ограниченном сегменте $[-7, 7]$ (носитель – это интервал, на котором функция отлична от нуля [5]).

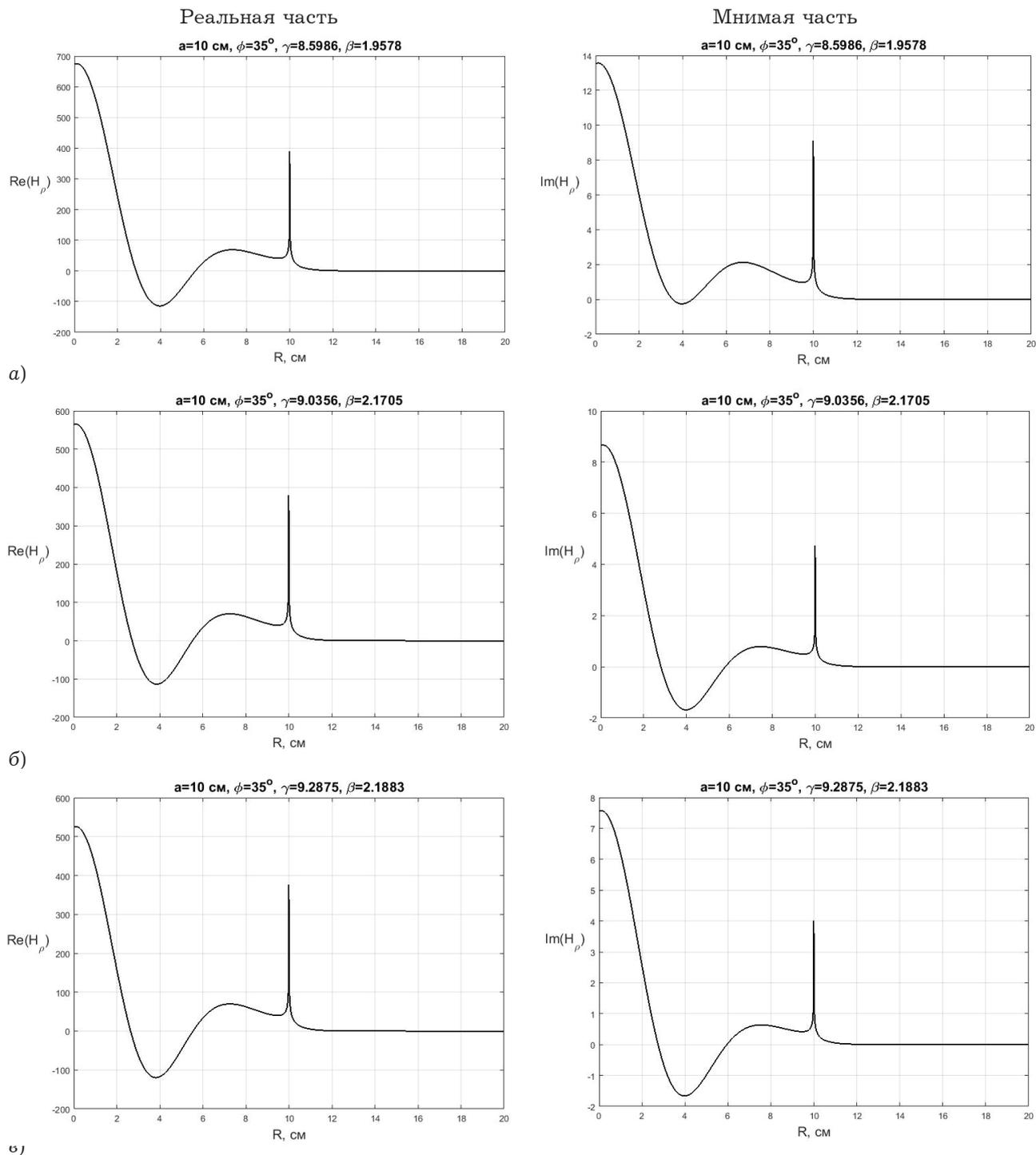


Рис. 3. Зависимость компоненты H_ρ от радиальной координаты, рассчитанная при $\phi = 35^\circ$: а) расчет для 4 узлов коллокации с радиальными координатами $R_1 = 0.3a, R_2 = 0.6a, R_3 = 0.9a, R_4 = 1.2a$; б) расчет для 5 узлов коллокации с радиальными координатами $R_1 = 0.05a, R_2 = 0.4a, R_3 = 0.8a, R_4 = 1.2a, R_5 = 1.4a$; в) расчет для 6 узлов коллокации с радиальными координатами $R_1 = 0.05a, R_2 = 0.3a, R_3 = 0.6a, R_4 = 0.9a, R_5 = 1.2a, R_6 = 1.5a$

Таким образом, поведение поля вне отверстия является предсказуемым, поэтому целесообразно задавать радиальные координаты R_i узлов коллокации в области отверстия и в области, близкой к отверстию. Получаем системы уравнений размером $2(N+1) \times 2(N+1)$ относительно неизвестных коэффициентов A_m и G_m (B_m и

C_m), $m = 0, 1, \dots, N$. Так, например, для $N = 3$ нужно задать четыре узла коллокации в плоскости (R, ϕ) . Тогда уравнения (6), (7) дадут системы размером 8×8 .

Фиксируя частоту ω и приравнявая определители систем нулю, получаем систему двух характеристических уравнений относительно

γ и β . Для каждого фиксированного γ получаем свои корни β характеристических уравнений. Двигаясь с некоторым шагом по γ , получаем «траектории движения» корней на плоскости (γ, β) . Так как имеем два характеристических уравнения – одно из системы (6), другое из системы (7), – получаем два независимых семейства «траекторий» на плоскости (γ, β) , каждое из которых соответствует своему характеристическому уравнению. Решениями задачи будут точки пересечения этих кривых. Точки пересечения и соответствующие этим точкам значения γ и β позволяют связать решения систем (6), (7).

2. Результаты расчета собственных значений несимметричной краевой задачи

Задачу будем решать для случая четырех, пяти и шести узлов коллокации. Расчет производился для частоты $f = 1$ ГГц, радиуса отверстия $a = 10$ см, индекса $\bar{n} = 1$ и сдвига $\Delta = a / 10$. Так как индекс $\bar{n} = 1$, то поле не является симметричным, то есть зависит от азимутальной координаты. Рассматривался случай, когда узлы коллокации расположены вдоль одного луча $\varphi_i = 35^\circ$. Для набора из четырех узлов коллокации с радиальными координатами $R_1 = 0.3a$, $R_2 = 0.6a$, $R_3 = 0.9a$, $R_4 = 1.2a$ было получено совместное решение $\gamma = 8.5986$, $\beta = 1.9578$. Для набора из пяти узлов коллокации с радиальными координатами $R_1 = 0.05a$, $R_2 = 0.4a$, $R_3 = 0.8a$, $R_4 = 1.2a$, $R_5 = 1.4a$ было получено совместное решение $\gamma = 9.0356$, $\beta = 2.1705$. Для набора из шести узлов коллокации с радиальными координатами $R_1 = 0.05a$, $R_2 = 0.3a$, $R_3 = 0.6a$, $R_4 = 0.9a$, $R_5 = 1.2a$, $R_6 = 1.5a$ было получено совместное решение $\gamma = 9.2875$, $\beta = 2.1883$. Можно отметить, что полученные совместные решения имеют близкие численные значения.

Подставляя значения γ и β в системы (6), (7), получаем неизвестные коэффициенты A_m , G_m и B_m , C_m , $m = 0, 1, \dots, N$ разложений (3) и (4). Зная эти коэффициенты, по формулам (3) и (4) рассчитываем поля в плоскости S_0 . На рис. 1–4 показаны радиальные зависимости действительных и мнимых частей компонент полей, рассчитанные по формулам (3) и (4). При этом поле рассчитывалось для фиксированной угловой координаты $\varphi = 35^\circ$. Значения γ и β , для которых производился расчет, указаны на рис. 1–4. Рисунки построены для случая расположения узлов вдоль одного луча.

Проведем анализ результатов, представленных на рис. 1–4. Видно, что для случая четырех, пяти и шести узлов коллокации мнимые значения компоненты поля почти на два порядка меньше действительных значений компонент. Важно отметить, что для всех компонент поля, за исключением E_p , сохраняется качественная зависимость компоненты от радиальной координаты вне зависимости от количества узлов коллокации. Однако, начиная с пяти узлов коллокации, качественная зависимость компоненты E_p от радиальной координаты также остается неизменной.

Также из рис. 1–4 видно, что для случаев пяти и шести узлов коллокации компонента E_φ убывает практически до нуля к краю отверстия, а компонента E_p близка к нулю на металле. То есть можно говорить о сходимости результатов вычислений.

Наконец, из рис. 1–4 ясно, что выбранные базисы разложений позволили обеспечить выполнение всех условий, накладываемых на поля в центре отверстия, на его кромке и на бесконечности.

Рис. 1–4 получены для случая, когда узлы коллокации расположены вдоль одного луча $\varphi = \text{const}$. Очевидно, что при таком малом количестве узлов и при таком их расположении расчет собственных функций по формулам (3) и (4) носит приближенный характер. Вне луча $\varphi = \text{const}$ распределение поля, рассчитанное по этим формулам, может существенно отличаться от зависимостей, представленных на рис. 1–4.

3. Расчет собственных значений самосогласованной задачи об излучении для случая симметричного поля

Особый интерес представляет случай симметричного поля, когда отсутствует зависимость по азимутальной координате. При таком распределении поля достаточно взять узлы коллокации при фиксированной угловой координате, что позволит обеспечить высокую точность решения задачи при сравнительно малом количестве узлов.

Физические граничные условия, накладываемые на поле, остаются без изменений. Поэтому компоненты полей можно представить в виде, аналогичном (3), (4), но при этом исключить гармоническую функцию, которая ранее обеспечивала зависимость от азимутальной координаты.

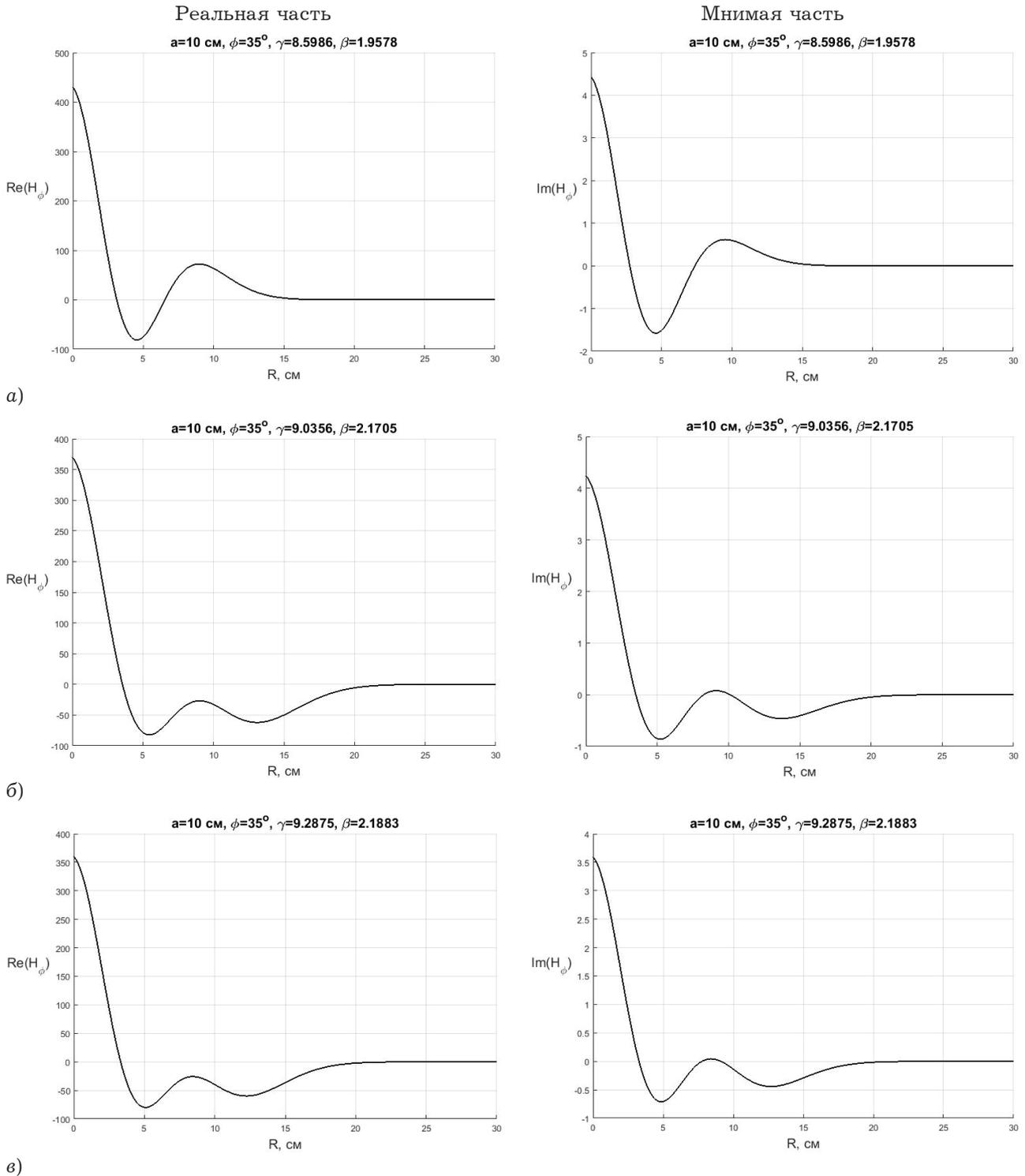


Рис. 4. Зависимость компоненты H_ϕ от радиальной координаты, рассчитанная при $\phi = 35^\circ$: а) расчет для 4 узлов коллокации с радиальными координатами $R_1 = 0.3a, R_2 = 0.6a, R_3 = 0.9a, R_4 = 1.2a$; б) расчет для 5 узлов коллокации с радиальными координатами $R_1 = 0.05a, R_2 = 0.4a, R_3 = 0.8a, R_4 = 1.2a, R_5 = 1.4a$; в) расчет для 6 узлов коллокации с радиальными координатами $R_1 = 0.05a, R_2 = 0.3a, R_3 = 0.6a, R_4 = 0.9a, R_5 = 1.2a, R_6 = 1.5a$

$$E_\rho(R, \phi) = \begin{cases} \sum_{m=0}^N A_m J_{-1/2} \left(\gamma \frac{\alpha_m^{(-1/2)} (a - R)}{a} \right), & R \leq a; \\ 0, & R > a; \end{cases} \quad (8a)$$

$$E_\phi(R, \phi) = \begin{cases} \sum_{m=0}^N B_m J_n \left(\gamma \frac{\alpha_m^{(n)} (R + \Delta)}{a} \right), & R \leq a; \\ 0, & R > a; \end{cases} \quad (8b)$$

$$H_\rho(R, \varphi) = \sqrt{\frac{a}{|a-R|}} \sum_{m=0}^N C_m L_{2m} \left(\beta \frac{R}{a} \right); \quad (9a)$$

$$H_\varphi(R, \varphi) = \sum_{m=0}^N G_m L_{2m} \left(\beta \frac{R}{a} \right) e^{-R/a}. \quad (9б)$$

Дальнейший алгоритм решения задачи не отличается от алгоритма, составленного для случая несимметричного поля.

Задача была решена для случая четырех, пяти и шести узлов коллокации. Расчет производился для частоты $f = 1$ ГГц, радиуса отверстия $a = 10$ см, и сдвига $\Delta = a / 10$. Во всех рассмотренных случаях узлы коллокации выбирались вдоль луча $\varphi = \text{const}$. Независимо от выбора азимутальной координаты узла коллокации, результат интегрирования будет один и тот же. Это позволило произвести решение только для одного набора узлов коллокации, с разными радиальными координатами. В случае симметричного поля метод коллокаций продемонстрировал лучшую сходимость в сравнении с несимметричной задачей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 17-19-01628.

Список литературы

1. Самосогласованная задача об излучении из круглого отверстия в бесконечном идеально проводящем экране / Г.С. Малышев [и др.] // Антенны. 2015. Вып. 3. № 214. С. 3–9.
2. Раевский С.Б., Титаренко А.А. Решение внешней краевой задачи о распространении электромагнитных волн в направляющей диэлектрической структуре произвольного поперечного сечения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49. № 12. С. 2201–2213.
3. Электродинамика и распространение радиоволн / В.А. Неганов [и др.]. М.: Радиотехника, 2007. 743 с.
4. Алексидзе М.А. Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач. М.: Наука, 1991. 352 с.
5. Юнаковский А.Д. Начала вычислительных методов для физиков. Нижний Новгород: Институт прикладной физики РАН, 2007. 220 с.

Method of collocations in the self-consistent problem of radiation from a round hole in a conducting screen

K.I. Kisilenko, G.S. Malyshev, A.S. Raevsky, S.B. Raevsky

The formulation of a self-consistent problem of radiation from an aperture in a conducting screen is considered. The problem reduces to a system of homogeneous integral equations, that is, we formulate a homogeneous boundary value problem for eigenfunctions and eigenvalues, which is solved by the collocation method. A procedure is proposed for implementing the latter in application to asymmetric and symmetric radiation fields.

Keywords: self-consistent problem, collocation method, eigenfunction problem.