

## О применении барицентрического метода в численном решении внутренней задачи электродинамики

И.С. Полянский

Академия ФСО России  
302034, Российская Федерация, г. Орёл  
ул. Приборостроительная, 35

В статье рассмотрены основные особенности применения барицентрического метода в численном решении внутренней задачи электродинамики с выделением ограничений метода и его основных этапов. Изложены методы нахождения гармонических барицентрических координат для односвязной однородной области анализа с кусочно-линейной границей. С использованием гармонических барицентрических координат определены соотношения по заданию аппроксимирующих неизвестный скалярный или векторный потенциал в области анализа функций. С целью обеспечения наглядности и определения предпочтительности применения барицентрического метода представлен алгоритм решения внутренней задачи электродинамики зеркальной антенны, включающей один источник электромагнитного поля (облучатель) и рефлектор. Приведены примеры численного расчета плотности тока на поверхности рефлектора барицентрическим методом в зависимости от порядка аппроксимации. Выделены достоинства и недостатки барицентрического метода.

*Ключевые слова:* барицентрический метод, численное решение внутренней задачи электродинамики, гармонические барицентрические координаты.

Барицентрический метод (БМ) относится к вариационным методам (методы конечных разностей, конечных элементов, импедансного аналога электромагнитного пространства [1]), применяемых для прямого численного решения уравнений электродинамики вида:

$$\nabla^2 \Phi + \kappa^2 \Phi = 0; \quad \nabla^2 \vec{A} + \kappa^2 \vec{A} = 0;$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \vec{J},$$

где  $\Phi$  и  $\vec{A}$  являются либо электродинамическими скалярным и векторным потенциалами, либо определяют продольную составляющую вектора и непосредственно вектор напряженности электрического  $\vec{E}$  или магнитного  $\vec{H}$  поля;  $\kappa$  – волновое число;  $\varepsilon_a$  и  $\mu_a$  – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды соответственно;  $\vec{J}$  – плотность тока.

Идея БМ [2; 3] и его отличие от известных методов вычислительной электродинамики состоит в обобщении процедуры аппроксимации потенциала при численном решении внутренних задач Дирихле и Неймана без разбиения области анализа  $\Omega$  на элементарные подобласти. Допущения БМ связаны с тем, что: 1) решение формируется в барицентрической системе координат  $\zeta_1(P), \zeta_2(P), \dots, \zeta_N(P)$ , позволяющей однознач-

но определить точку аффинного пространства  $P \in \Omega$  через точечный базис  $P_1, P_2, \dots, P_N$  – вершины  $\Omega$ ; 2)  $\Omega$  – односвязная однородная область с кусочно-линейной границей

$$\Gamma = \bigcup_{n=1}^N \Gamma_n,$$

где  $\Gamma_n = \{e_n t + P, t \in [0, 1]\}$  при  $e_n = P_{n+1} - P_n$ .

Основной этап БМ состоит в определении барицентрических координат (БК) для  $\Omega$ , которые должны удовлетворять свойствам [4; 5]:

$$1) \sum_{n=1}^N \zeta_n(P) P_n = P;$$

$$2) \zeta_n \geq 0 \quad (n = \overline{1, N});$$

$$3) \sum_{n=1}^N \zeta_n = 1;$$

$$4) \Delta \zeta_n = 0 \text{ при}$$

$$\zeta_n(P_{n'}) = \delta_n^{n'} = \begin{cases} 1, & n = n'; \\ 0, & n \neq n'; \end{cases} \quad (n, n' \in \{\overline{1, N}\}).$$

Методы определения гармонических БК основаны на: 1) геометрическом подходе [5] – построение проекций  $\Gamma_n$  на дуги единичной окружности  $B_0$ , положение которой определяется из решения задачи конформного отображения  $\Omega$  на  $B_0$  (решение задачи конформного отображе-

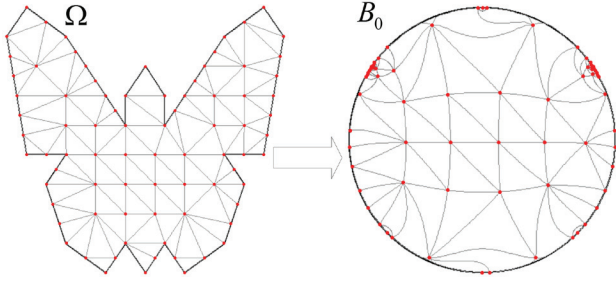


Рис. 1. Пример решения задачи конформного отображения  $\Omega$  на  $B_0$

ния предлагается осуществлять методами [6; 7], пример решения задачи представлен на рис. 1); 2) аналитическом подходе, который рассмотрен в [8] и связан с решением задачи Дирихле:

$$\begin{aligned} \Delta \zeta_n(P) &= 0, \quad P \in \Omega; \\ \zeta_n(P) &= t, \quad P \in \Gamma_{n-1}; \\ \zeta_n(P) &= 1-t, \quad P \in \Gamma_n; \\ \zeta_n(P) &= 0, \quad P \in \Gamma \setminus \{\Gamma_{n-1}, \Gamma_n\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Решение задачи (1) при задании  $\Omega \subset \mathbb{C}$  в [8] определено приближенно-аналитическим соотношением

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_n^M(P) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n'=1}^N \sum_{m=0}^M \sqrt{2m+1} Q_m \times \\ &\times \left( 2 \frac{P - P_{n'}}{e_{n'}} - 1 \right) X_{n',m}^n, \end{aligned} \quad (2)$$

обладающим экспоненциальной скоростью сходимости

$$\left\| \zeta_n(P) - \tilde{\zeta}_n^M(P) \right\|_C \leq \frac{\text{const} M 2^{-M}}{(2M+1)\sqrt{2M+3}}. \quad (3)$$

В выражениях (2), (3)  $\|\cdot\|_C$  определяет норму в пространстве функция из  $C([0,1])$ ;  $\text{const}$  положительна и не зависит от  $M$ ;  $Q_m(x)$  – многочлен Лежандра второго рода [9];  $\tilde{X}^n = (\mathbf{E} + \mathbf{T})^{-1} \tilde{U}^n$  – блочный вектор размера  $\tilde{N} = N(M+1)$ , составленный из элементов  $X_{n',m}^n$ ;  $\mathbf{E}$  – единичная матрица размера  $\tilde{N} \times \tilde{N}$ ;  $\tilde{U}^n$  – блочный вектор размера  $\tilde{N}$ , составленный из элементов

$$U_{n',m}^n = \begin{cases} 1, & (n = n' \vee n = n' - 1) \wedge m = 0, \\ -1/3, & n = n' \wedge m = 1, \\ 1/3, & n = n' - 1 \wedge m = 1, \\ 0, & \text{в др. случаях;} \end{cases}$$

$\mathbf{T}$  – блочная матрица размера  $\tilde{N} \times \tilde{N}$ , составленная из элементов

$$\begin{aligned} t_{m,m'}^{n,n'} &= \frac{(-1)^{m+m'}}{\pi} \sqrt{2m+1} \times \\ &\times \sqrt{2m'+1} \left( C_{m,m'}^{n,n'} + D_{m,m'}^{n,n'} \right), \end{aligned}$$

где при обозначении

$$W_{h,m} = \prod_{v=0}^{h-1} (v-m)(m+1+v)(v+1)^{-2},$$

$W_{0,m} \equiv 1$ ,  $R_{n,n'} = P_n - P_{n'}$  и выполнении условий  $n \neq n'$ ,  $n+1 \neq n'$  и  $n \neq n'+1$  [8]:

$$\begin{aligned} C_{m,m'}^{n,n'} &= \sum_{h=1}^{m+m'+1} \text{Im} \left[ B_{h-1,m,m'}^{n,n'} \left( \ln \left( \frac{R_{n+1,n'+1}}{R_{n+1,n'}} \right) + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left( \frac{R_{n,n'}}{-e_n} \right)^h \left[ \ln \left( \frac{R_{n+1,n'}}{R_{n,n'}} \right) + \sum_{v=1}^h \frac{1}{v} \left( \frac{-e_n}{R_{n,n'}} \right)^v \right] - \right. \\ &\left. \left. - \left( \frac{R_{n,n'+1}}{-e_n} \right)^h \left[ \ln \left( \frac{R_{n+1,n'+1}}{R_{n,n'+1}} \right) + \sum_{v=1}^h \frac{1}{v} \left( \frac{-e_n}{R_{n,n'+1}} \right)^v \right] \right] \right]; \end{aligned}$$

$$D_{m,m'}^{n,n'} = \begin{cases} -2 \sum_{v=0}^{\lfloor (m-1)/2 \rfloor} \frac{2(m-2v)-1}{(2v+1)(m-v)} \times \\ \times \sum_{h=1}^{m+m'+1} B_{h-1,m-2v-1,m'}^{n,n'}, & m > m'; \\ 0, & m \leq m'; \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} B_{h,m,m'}^{n,n'} &= \frac{1}{h+1} \sum_{v=0}^h \left( \frac{e_n}{R_{n,n'}} \right)^v \times \\ &\times W_{h-v,m'} \sum_{r=v}^{m+m'} \left( \frac{R_{n,n'}}{e_{n'}} \right)^r W_{r,m} \left( \frac{r}{v} \right). \end{aligned}$$

Для случаев наличия особенностей в (4) вспомогательные переменные  $C_{m,m'}^{n,n'}$  вычисляются с использованием следующих выражений при выполнении соответствующих условий:

1)  $n \neq n'$ ,  $n+1 \neq n'$  и  $n = n'+1$  [8]:

$$\begin{aligned} C_{m,m'}^{n,n'} &= \\ &= \sum_{h=1}^{m+m'+1} \text{Im} \left[ B_{h-1,m,m'}^{n'+1,n'} \left( \ln \left( \frac{R_{n'+2,n'+1}}{R_{n'+2,n'}} \right) + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left( \frac{R_{n'+1,n'}}{-e_{n'+1}} \right)^h \times \right. \right. \\ &\times \left. \left. \left[ \ln \left( \frac{R_{n'+2,n'}}{R_{n'+1,n'}} \right) + \sum_{v=1}^h \frac{1}{v} \left( \frac{-e_{n'+1}}{R_{n'+1,n'}} \right)^v \right] - \frac{1}{h} \right] \right]; \end{aligned} \quad (5)$$

2)  $n \neq n'$ ,  $n+1 = n'$  и  $n \neq n'+1$  [7]:

$$\begin{aligned} C_{m,m'}^{n,n'} &= \\ &= \sum_{h=1}^{m+m'+1} \text{Im} \left[ B_{h-1,m,m'}^{n,n+1} \left( \ln \left( \frac{R_{n+1,n+2}}{-e_n} \right) + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \sum_{v=1}^h \frac{1}{v} - \left( \frac{R_{n,n+2}}{-e_n} \right)^h \right) \times \right] \end{aligned} \quad (6)$$

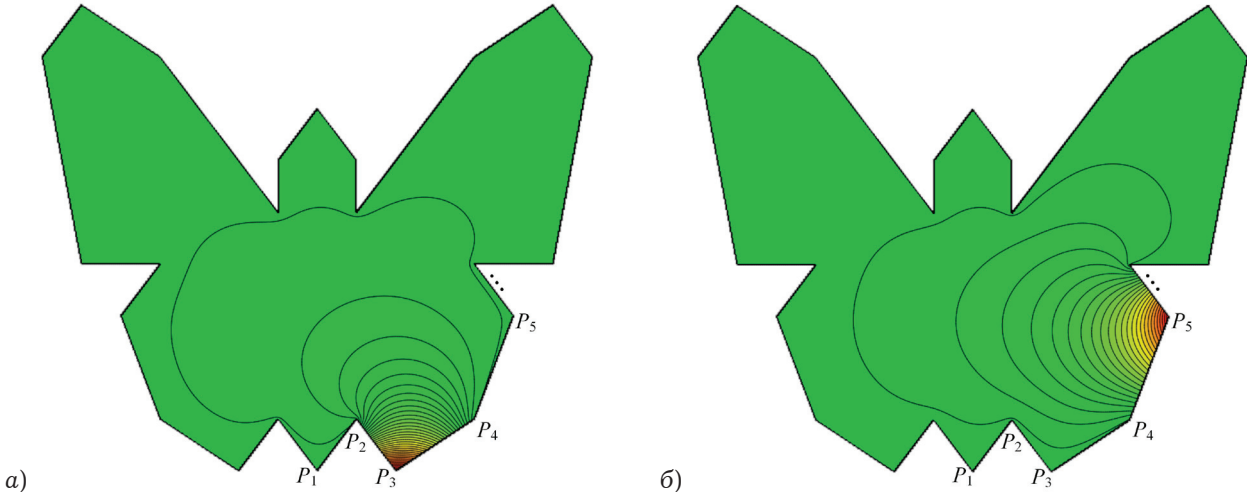


Рис. 2. Пример линий уровня БК  $\zeta_3$  (а) и  $\zeta_5$  (б) для вогнутого многоугольника

$$\times \left[ \ln \left( \frac{R_{n+1, n+2}}{R_{n, n+2}} \right) + \sum_{v=1}^h \frac{1}{v} \left( \frac{-e_n}{R_{n, n+2}} \right)^v \right].$$

Суть формирования соотношения (2) по заданию гармонических БК по [8] состоит в следующем. Выражение (2) определяет решение задачи Дирихле (1) методом Фредгольма при представлении  $\zeta_n$  в качестве логарифмического потенциала двойного слоя. Формируемое уравнение Фредгольма второго рода относительно неизвестной функции плотности потенциала на  $\Gamma$  определяется при численном решении интегрального уравнения методом РГ-ядер [10]. Ядро

$$\mathbb{K}_{n, n'}(t, s) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left( \frac{e_{n'}}{e_n t + P_n - e_n s - P_{n'}} \right)$$

интегрального уравнения представляется суммой многочленов Лежандра первого  $L_m(x)$  и второго  $Q_m(x)$  рода:

$$\mathbb{K}_{n, n'}(t, s) = \frac{-2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) L_m(2s-1) \times \\ \times \operatorname{Im} \left( Q_m \left( 2 \frac{e_n t + R_{n, n'}}{e_n} - 1 \right) \right),$$

при условии

$$\operatorname{Im} \left( Q_m \left( 2 \frac{e_n t + R_{n, n'}}{e_n} - 1 \right) \right) = 0$$

для  $n = n'$ . В постановке такого решения соотношения (4)–(6) задают аналитическое представление интеграла

$$(-1)^{m+m'} C_{m, m'}^{n, n'} + D_{m, m'}^{n, n'} = \\ = \int_{-1}^1 L_m(2s-1) \operatorname{Im} \left( Q_m \left( 2 \frac{e_n t + R_{n, n'}}{e_n} - 1 \right) \right) ds.$$

Точность определения БК зависит от выбора  $M$ , при этом высокая сходимость (3) обуславливает высокую точность решения (2) уже при небольших  $M \in [5; 8]$ . В подобной постановке БК  $\zeta_n$  определяют функцию формы  $\Omega$  относительно вершины  $P_n$  (рис. 2).

Затем в БМ с учетом выбранного правила нахождения гармонических БК задается аппроксимация неизвестного потенциала [2; 3; 11]. Например, аппроксимация

$$\Phi(P) = \sum_{j \in M_p} \tilde{\Phi}_j \alpha_j(P)$$

скалярного потенциала  $\Phi(P)$  ( $P \in \Omega$ ;  $\tilde{\Phi}_j$  – коэффициенты аппроксимации) для учета граничных условий на  $\Gamma$  (различны при представлении в качестве  $\Phi(P)$  продольной составляющей векторов электрического и магнитного полей) может быть задана через:

1) полиномы Лагранжевого типа [12]:

$$\alpha_j(P) = \prod_{n=1}^N \alpha_{j_n}^1(P);$$

$$\tilde{\alpha}_{j_n}^1(P) = \prod_{k=0}^{j_n} \frac{1}{k} (p\zeta_n(P) - k + 1), \quad (7)$$

$$j_n > 0; \quad \tilde{\alpha}_0^1(x) = 1;$$

2) полиномы типа Лежандра:

$$\alpha_j(P) = \prod_{n=1}^N \alpha_{p-j_n}^2(P);$$

$$\alpha_m^2(P) = V_m \sum_{k=0}^{[0,5m]} \frac{(-1)^k (2m-2k)!}{k!(n-k)!(n+1-2k)!} \times \quad (8)$$

$$\times \left[ (2\zeta_n(P) - 1)^{n+1-2k} - (-1)^{n+1-2k} \right];$$

$$V_m = \frac{\sqrt{2m+1}\sqrt{2m+3}}{2^{m+1}} \begin{cases} 1, & m=0; \\ \sqrt{4m-2}, & m>0; \end{cases}$$

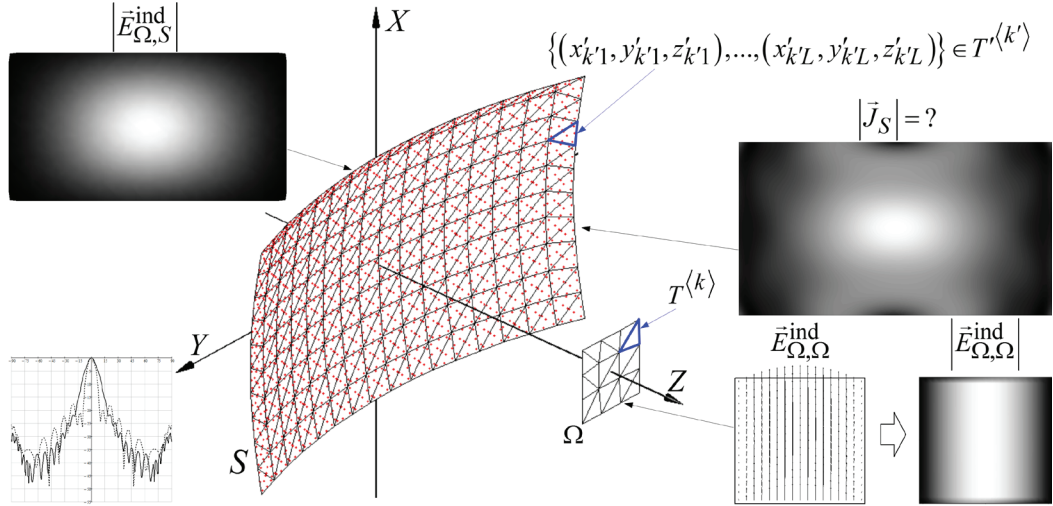


Рис. 3. Пример геометрического представление зеркальной антенны в решении внутренней задачи электродинамики

3) полиномы типа Бернштейна:

$$\alpha_j(P) = \prod_{n=1}^N \alpha_{j_n}^3(P);$$

$$\alpha_{j_n}^3(P) = \frac{\sqrt{2j_n + 1}}{j_n!} (\zeta_n(P))^{j_n}.$$

Здесь  $p \in \mathbb{N}$  – порядок аппроксимации (характеризует точность последующего численного решения);

$$\mathbb{M}_p = \left\{ j = (j_1, j_2, \dots, j_N) : \right.$$

$$\left. j_n \in \mathbb{Z}, j_n \geq 0, \sum_{n \in [1; N]} j_n = p \right\}$$

– множество мультииндексов  $j$ .

Аппроксимация

$$\bar{A}(P) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \bar{A}_j \bar{\beta}_j(P)$$

векторного потенциала  $\bar{A}(x)$  ( $P \in \Omega$ ;  $\bar{A}_j$  – коэффициенты аппроксимации) задается через БК либо при дифференцировании по соответствующей поперечной координате полиномов (7)–(8) при задании с их помощью аппроксимации продольной составляющей, либо при обобщении свойств краевых базисных векторных функций Неделека [2]:

$$\bar{\beta}_j(P) = \sum_{\substack{n=1 \\ j_n > 0}}^N \hat{\alpha}_{j_n}(P) \bar{\Theta}_n(P), \quad (10)$$

где

$$\hat{\alpha}_{j_n}(P) = \hat{\alpha}_{j_n}^1(P) \prod_{\substack{n'=1 \\ n \neq n'}}^N \alpha_{j_n}^1(P);$$

$\hat{\alpha}_{j_n}^1(P)$  – сдвинутый полином Лагранжевого типа [13];

$$\bar{\Theta}_n(P) = [\zeta_n(P) \nabla \zeta_{n+1}(P) - \zeta_{n+1}(P) \nabla \zeta_n(P)] |P_{n+1} - P_n|$$

(9) – дифференциальная форма Уитни.

Дальнейшее численное решение волновых уравнений БМ производится аналогично известным вариационным методам и состоит в сведении исходной задачи к системе линейных уравнений (для уравнения Гельмгольца) или обыкновенных дифференциальных уравнений (для волнового уравнения Даламбера).

Также БМ применим для решения сингулярных интегральных уравнений, например формируемых в задачах анализа характеристик зеркальных антенн [14] с учетом постановки модельной задачи дифракции электромагнитной волны на ограниченном тонком экране  $S$  [15]:

$$4\pi i \kappa \bar{E}_{\tan}^{\text{ind}} = \nabla \iint_S \Psi(\nabla \cdot \bar{J}) dS + \iint_S \kappa^2 \bar{J} \Psi dS, \quad (11)$$

где  $\Psi = e^{-i\kappa|\bar{r}-\bar{r}'|}/|\bar{r}-\bar{r}'|$  – функция Грина ( $\bar{r}$  и  $\bar{r}'$  – радиус-векторы точек наблюдения и источника соответственно);  $\bar{E}_{\tan}^{\text{ind}}$  – тангенциальная составляющая наводимого электрического поля на  $S$ .

Для численного решения задачи вида (11) в БМ задается аппроксимация неизвестной функции плотности тока соотношением

$$\bar{J}(P) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \bar{J}_j \bar{\gamma}_j(P), \quad (12)$$

$$\bar{\gamma}_j(P) = \bar{n}^0(P) \times \bar{\beta}_j(P),$$

где  $\bar{n}^0(P)$  – орт вектора нормали в точке интегрирования  $P$  на  $S$ .

Затем подстановка аппроксимации (12) в (11) позволяет свести исходное интегральное уравнение к решению системы линейных уравнений по

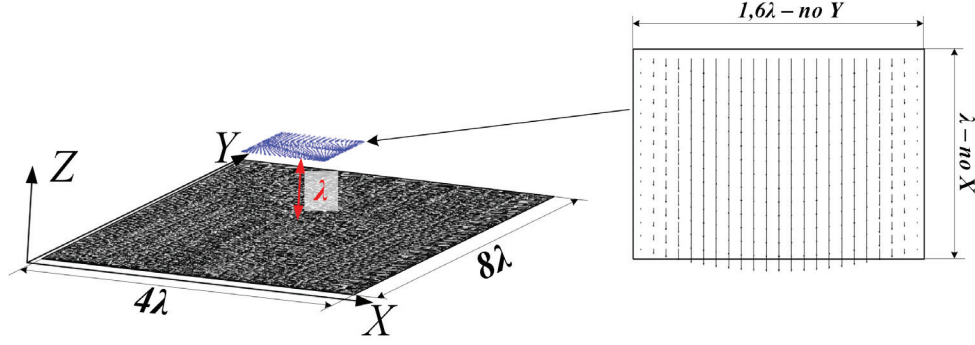


Рис. 4. Геометрическое представление анализируемой зеркальной антенны

определению  $\tilde{J}_j$  – коэффициентов аппроксимации (12).

Пример более подробного решения задачи (11) рассмотрим при описании следующего алгоритма решения внутренней задачи электродинамики зеркальной антенны, включающей один источник электромагнитного поля – облучатель с раскрывом  $\Omega$  и рефлектор  $S$  с раскрывом  $\Omega'$  (рис. 3).

**Шаг 1.** Разбиение раскрывов  $\Omega$  и  $\Omega'$  на  $K$  и  $K'$  треугольных элементов  $T^{(k)}$  и  $T^{(k')}$  соответственно ( $k = \overline{1, K}$ ,  $k' = \overline{1, K'}$ ) при построении триангуляции Делоне с учетом того, что размер треугольной области  $\leq \lambda$  [16] ( $\lambda$  – длина волны).

**Шаг 2.** Выбор в  $k, k'$ -х треугольных областях положений узловых точек интегрирования  $P'_{kl} = (x'_{kl}, y'_{kl}, z'_{kl}) \in T^{(k')}$ ,  $P_{kl} = (x_{kl}, y_{kl}, z_{kl}) \in T^{(k)}$  ( $l = \overline{1, L}$ , где  $L$  – число точек интегрирования на отдельном треугольном элементе) при определении для  $l$ -х точек соответствующих весов  $a_l$  [17].

**Шаг 3.** По заданному распределению поля в раскрыве облучателя  $\vec{E}_{\Omega, \Omega}^{\text{ind}}$  (поле источника) в точках интегрирования  $P'_{kl}$  определить напряженность электрического поля в раскрыве рефлектора  $S$ , наведенного  $\Omega$ , –  $\vec{E}_{kl}^{\text{ind}} = \vec{E}_{\Omega, S}^{\text{ind}}(P'_{kl})$ . Решение выполняется с учетом приближений метода дискретных источников [18] и заданного разбиения области  $\Omega$  при  $\vec{E}_{kl}^{\text{ind}} = \vec{E}_{\Omega, \Omega}^{\text{ind}}(P_{kl})$ :

$$\vec{E}_{k'l'}^{\text{ind}} = \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L \left( \left| \vec{E}_{k,l}^{\text{ind}} \right| \vec{E}_{k,l,k',l'}^0 \Psi_{k,l,k',l'} a_l \left| T^{(k)} \right| \right),$$

где  $\left| T^{(k)} \right|$  – удвоенная площадь  $k$ -го треугольника области  $\Omega$ ;  $\Psi_{k,l,k',l'}$  – функция Грина, вычисленная относительно положения точек  $P'_{k'l'}$  и  $P_{kl}$  при  $l' = \overline{1, L}$ ;

$$\begin{aligned} \vec{E}_{k,l,k',l'}^0 &= \vec{E}_{k,l,k',l'} / \left| \vec{E}_{k,l,k',l'} \right| \\ \text{при } \vec{E}_{k,l,k',l'} &= \vec{H}_{k,l,k',l'}^0 \times \vec{\Pi}_{k,l,k',l'}^0, \\ \vec{H}_{k,l,k',l'}^0 &= \vec{H}_{k,l,k',l'} / \left| \vec{H}_{k,l,k',l'} \right|, \\ \vec{\Pi}_{k,l,k',l'}^0 &= \vec{\Pi}_{k,l,k',l'} / \left| \vec{\Pi}_{k,l,k',l'} \right|, \end{aligned}$$

$$\vec{\Pi}_{k,l,k',l'} = P'_{k'l'} - P_{kl},$$

$$\vec{H}_{k,l,k',l'} = \vec{\Pi}_{k,l,k',l'}^0 \times \vec{E}_{k,l}^{\text{ind}_0},$$

$$\vec{E}_{k,l}^{\text{ind}_0} = \vec{E}_{k,l}^{\text{ind}} / \left| \vec{E}_{k,l}^{\text{ind}} \right|.$$

**Шаг 4.** Определить для заданного положения точек интегрирования  $P_{kl} = (x_{kl}, y_{kl}, z_{kl}) \in T^{(k)}$ ,  $P'_{k'l'} = (x'_{k'l'}, y'_{k'l'}, z'_{k'l'}) \in T^{(k')}$  на  $\Omega$  и  $S$  значения аппроксимационных функций  $\vec{\gamma}_j^{(\Omega)}$ ,  $\vec{\gamma}_j^{(S)}$  по правилу (12) и дивергенций  $\nabla \cdot \vec{\gamma}_j^{(\Omega)}$ ,  $\nabla \cdot \vec{\gamma}_j^{(S)}$ . Затем вычислить значения функции Грина  $\Psi$  и ее градиента  $\nabla \Psi$  относительно положения точек  $P'_{kl}$ ,  $P'_{k'l'}$ . При вычислении значений  $\Psi(\vec{r}, \vec{r}')$  и  $\nabla \Psi(\vec{r}, \vec{r}')$  в пределах одного и того же треугольного элемента при  $\vec{r} \rightarrow \vec{r}'$  может возникнуть ситуация деления на нуль. Чтобы этого избежать по аналогии с [19] в первом приближении предлагается разносить внутренние точки численного интегрирования, определяя их в пределах треугольника для различных ортогональных многочленов (Лежандра, Гегенбауэра, Чебышева и пр.) с последующим использованием при численном интегрировании соответствующих квадратурных формул [20].

**Шаг 5.** Для определенных значений  $\vec{E}_{\Omega, \Omega}^{\text{ind}}$ ,  $\vec{E}_{\Omega, S}^{\text{ind}}$ ,  $\vec{\gamma}_j^{(\Omega)}$ ,  $\vec{\gamma}_j^{(S)}$ ,  $\nabla \cdot \vec{\gamma}_j^{(\Omega)}$ ,  $\nabla \cdot \vec{\gamma}_j^{(S)}$ ,  $\Psi$ ,  $\nabla \Psi$  в соответствующих точках интегрирования с использованием выбранных квадратурных формул [20] и  $\left| T^{(k)} \right|$ ,  $\left| T^{(k')} \right|$ ,  $a_l$  составить соответствующую (11) систему линейных уравнений и вычислить искомый вектор коэффициентов  $\tilde{J}$  аппроксимации из (12).

Точность численного решения внутренней задачи электродинамики в БМ определяется размерностью составленной системы линейных уравнений, которая характеризуется мощностью множества мультииндексов  $\left| \mathbb{M}_p \right|$  при задании порядка аппроксимации  $p \in \mathbb{N}$ . На рис. 5 представлены изменения рассчитываемой  $\left| \tilde{J} \right|$  на поверхности плоского рефлектора (рис. 4) от  $p$  при численном решении задачи (11) БМ с представлением числа узловых точек  $\left| \mathbb{M}_p \right|$ .

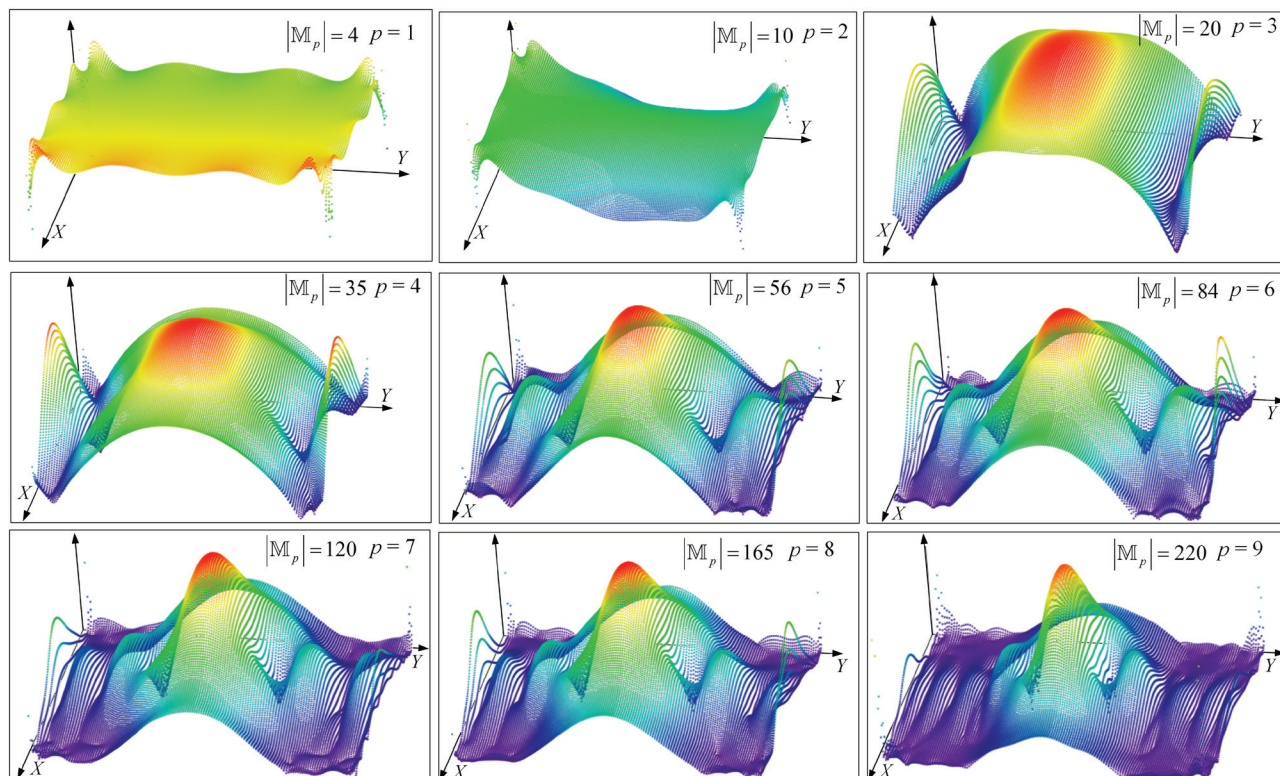


Рис. 5. Изменение расчета  $|J|$  на поверхности плоского рефлектора от  $p$

Основное достоинство БМ связано с тем, что он в сравнении с известными методами при одинаковом порядке аппроксимации позволяет существенным образом (от 2,5 до 5 раз) повысить точность численного решения внутренней задачи электродинамики [2; 3; 11; 12].

Основной недостаток состоит в сложности решения задачи определения гармонических БК для  $\Omega$ , которая возрастает в случае если  $\Omega$  является многосвязной областью и сложной относительно геометрической формы структурой.

### Список литературы

- Климов К.Н., Сестрорецкий Б.В. Построение алгоритмов для решения двумерных задач электродинамического анализа систем с произвольным распределением диэлектрической и магнитной проницаемостей на основе метода импедансных сеток // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46. № 4. С. 389–413.
- Полянский И.С. Векторный барицентрический метод в вычислительной электродинамике // Труды СПИИРАН. 2017. № 2(51). С. 206–222.
- Полянский И.С., Пехов Ю.С. Барицентрический метод в решении сингулярных интегральных уравнений электродинамической теории зеркальных антенн // Труды СПИИРАН. 2017. № 5(54). С. 244–262.
- Полянский И.С. Барицентрические координаты Пуассона для многомерной аппроксимации скалярного потенциала внутри произвольной области (Часть 1) // Вестник СГТУ. 2015. № 1(78). С. 30–36.
- Полянский И.С. Барицентрические координаты Пуассона – Римана // Труды СПИИРАН. 2016. № 6(49). С. 32–48.
- Радыгин В.М., Полянский И.С. Модифицированный метод последовательных конформных отображений наперед заданных многоугольных областей // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2016. № 1(39). С. 25–35.
- Радыгин В.М., Полянский И.С. Методы конформных отображений многогранников в  $\mathbb{R}^3$  // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. № 1(27). С. 60–68.
- Ильинский А.С., Полянский И.С. Приближенный метод определения гармонических барицентрических координат для произвольных многоугольников // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2018 [принята к публикации]
- Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция, функция Лежандра / пер. с англ. Н.Я. Виленкина. М.: Наука, 1965. 296 с.
- Краснов М.Л. Интегральные уравнения. (Введение в теорию). М.: Наука, 1979. 408 с.
- Архипов Н.С., Полянский И.С., Степанов Д.Е. Барицентрический метод в задачах анализа поля в регулярном волноводе с произвольным поперечным сечением // Антенны. 2015. № 1(212). С. 32–40.
- Полянский И.С. Барицентрический метод в задаче оптимального управления формой отражающей поверхности зеркальной антенны // Математическое моделирование. 2017. № 11(29). С. 140–150.
- Graglia R.D., Peterson A.F. Higher-Order Techniques in Computational Electromagnetics. Mario Boella Series on

- Electromagnetism in Information and Communication. Edison: SciTech Publishing, 2016. 392 p.
14. Клюев Д.С., Соколова Ю.В. Расчет характеристик зеркальных антенн методом гиперсингулярных интегральных уравнений // Радиотехника и электроника. 2015. Т. 60. № 1. С. 38–44.
  15. Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. М.: ИПРЖР, 1996. 176 с.
  16. Архипов Н.С., Полянский И.С., Степанов Д.Е. Представление отражающих поверхностей антенной системы в задачах анализа и синтеза зеркальных антенн методом физической оптики // Телекоммуникации. 2014. № 7. С. 15–21.
  17. Голованов Н.Н. Геометрическое моделирование. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2002. 472 с.
  18. Еремин Ю.А., Свешников А.Г. Метод дискретных источников в задачах электромагнитной дифракции. М.: Изд-во МГУ, 1992. 182 с.
  19. Медведик М.Ю., Смирнов Ю.Г., Соболев С.И. Параллельный алгоритм расчета поверхностных токов в электромагнитной задаче дифракции на экране // Выч. мет. программирование. 2005. Т. 6. № 1. С. 99–108.
  20. Никольский С.М. Квадратурные формулы; 2-е изд. М.: Наука, 1974. 224 с.

## About application the barycentric method in the numerical solution of internal problem of electrodynamics

*I.S. Polyanskii*

The main features of the application of the barycentric method in the numerical solution internal problem of electrodynamics with the allocation of the limitations of the method and its main stages are considered in the article. Methods for finding harmonic barycentric coordinates for a single-connected homogeneous analysis domain with a piecewise linear boundary are presented. In order to provide clarity and determine the preference for the use of barycentric method, the algorithm for solving the internal problem of electrodynamics of a mirror antenna, including one source of the electromagnetic field (irradiator) and a reflector is presented. Examples of numerical calculation of the current density on the reflector surface by the barycentric method depending on the order of approximation are given. Advantages and disadvantages of the barycentric method are highlighted.

*Keywords:* barycentric method, numerical solution internal problem of electrodynamics, harmonic barycentric coordinates.

**Неганов, В.А.**

**Теория и применение устройств СВЧ: учебн. пособие для вузов / В.А. Неганов, Г.П. Яровой;** под ред. В.А. Неганова. – М.: Радио и связь, 2006. – 720 с.

**ISBN 5-256-01812-4**

УДК 621.396.67

ББК 32.840

Н 41



В учебном пособии рассматриваются методы проектирования и конструктивной реализации устройств СВЧ: линий передачи различных видов, резонаторов, согласующих и трансформирующих устройств, фильтров, фазовращателей, аттенюаторов, тройниковых соединений, направленных ответвителей, различных мостовых соединений, ферритовых устройств (вентилей, циркуляторов, фазовращателей) и СВЧ-устройств на полупроводниковых диодах (умножителей, смесителей, переключателей, выключателей). Приводятся примеры применения устройств СВЧ в радиосвязи, радиолокации, измерительной аппаратуре и т. д. В книгу вошел оригинальный материал, полученный авторами. Учебное пособие может использоваться как справочник по устройствам СВЧ.

*Для специалистов в области теории и техники СВЧ, преподавателей вузов, докторантов, аспирантов, студентов старших курсов радиотехнического и радиофизического профиля.*