

Алгоритм расчета коэффициентов рекурсивного цифрового фильтра второго порядка по заданным требованиям к АЧХ с применением точных расчетных формул

А.И. Тяжев

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики
443010, Российская Федерация, г. Самара
ул. Л. Толстого, 23

В статье получены точные расчетные формулы и на их основе разработан алгоритм расчета коэффициентов рекурсивного цифрового фильтра второго порядка по известным резонансной частоте и границам полосы пропускания фильтра при заданной неравномерности амплитудно-частотной характеристики в полосе пропускания этого фильтра.

Ключевые слова: рекурсивные цифровые фильтры, характеристики цифровых фильтров, полоса пропускания, неравномерность характеристики в полосе пропускания.

Введение

При расчете аналоговых фильтров вследствие нестабильности и разброса параметров входящих в них элементов нет особой необходимости использовать точные, но громоздкие расчетные формулы, поэтому на практике для расчета этих фильтров обычно применяют простые приближенные формулы, а затем характеристики фильтров доводят до требуемых путем подстройки параметров входящих в них элементов. Так как характеристики цифровых фильтров стабильны, поэтому для их расчета целесообразно использовать точные формулы. В устройствах цифровой обработки сигналов широко используются простые в реализации рекурсивные цифровые фильтры (РЦФ) второго порядка [1–5]. Эти фильтры являются цифровыми прототипами аналоговых LC-контуров. В данной статье получены точные расчетные формулы и на их основе разработан алгоритм расчета коэффициентов РЦФ второго порядка по заданным значениям резонансной частоты, полосы пропускания и неравномерности амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) в полосе пропускания.

1. Структурная схема, системная функция, комплексный коэффициент передачи и АЧХ РЦФ второго порядка

На рис. 1 приведена структурная схема РЦФ второго порядка и его амплитудно-частотная

характеристика. Все свойства и характеристики этого фильтра зависят от двух его коэффициентов A_1 и A_2 [1–5].

Системная функция РЦФ второго порядка на рис. 1 определяется выражением:

$$H(z) = (1 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2})^{-1} = \frac{z^2}{(z - z_1)(z - z_1^*)} = \frac{z^2}{z^2 - 2R \operatorname{Re} z_1 + |z_1|^2},$$

где

$$z_1 = R e^{-j\theta_0}, \quad z_1^* = R e^{j\theta_0}$$

– комплексно-сопряженные полюса системной функции РЦФ в полярных координатах; R – расстояние от начала координат до полюса в z -плоскости; $\theta_0 = \omega_0 / F_d$ – нормированная к частоте дискретизации F_d безразмерная резонансная частота РЦФ. На этой частоте коэффициент передачи РЦФ максимальный. Из выражения для системной функции РЦФ следуют формулы, связывающие параметры R и θ_0 с коэффициентами A_1 и A_2

$$\theta_0 = \arccos\left(-\frac{A_1}{2\sqrt{A_2}}\right), \quad R = \sqrt{A_2},$$

$$A_1 = -2R \cos \theta_0, \quad A_2 = R^2. \quad (1)$$

Для перехода от системной функции $H(z)$ к комплексному коэффициенту передачи $K(j\theta)$ необходимо провести в выражении для $H(z)$ замену: $z = e^{j\theta}$, где $\theta = \omega / F_d$ – нормированная к частоте дискретизации F_d безразмерная частота

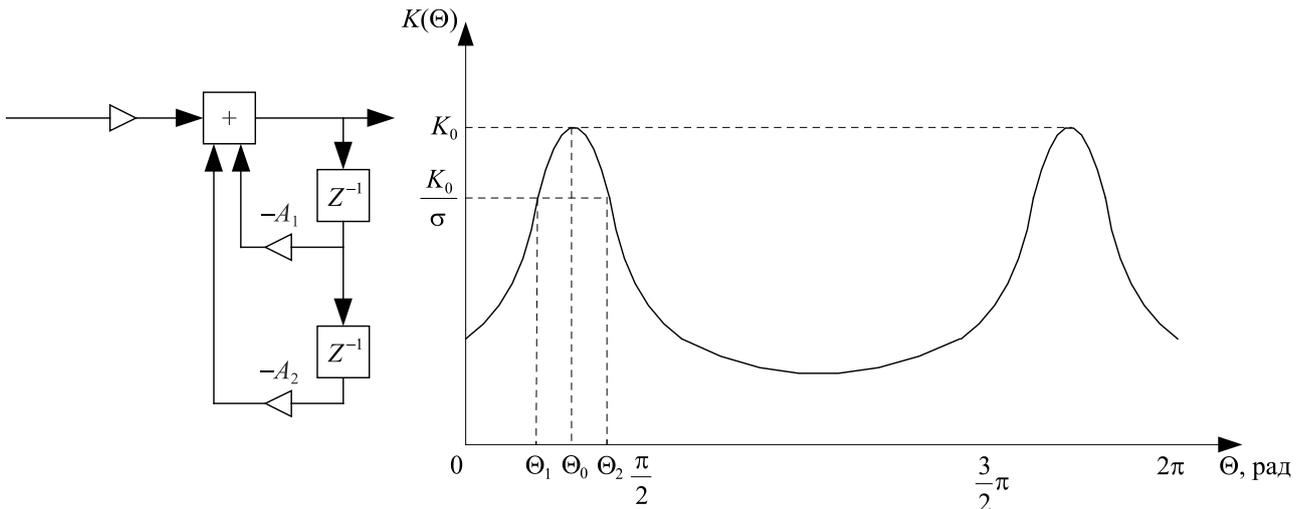


Рис. 1. Структурная схема рекурсивного цифрового фильтра второго порядка и его амплитудно-частотная характеристика

та, причем $\omega = 2\pi F$. В результате такой замены получим:

$$K(j\theta) = [(1 - Re^{-j(\theta-\theta_0)})(1 - Re^{-j(\theta+\theta_0)})]^{-1}.$$

Это выражение описывает комплексный коэффициент передачи РЦФ второго порядка, схема которого приведена на рис. 1. Для получения выражения, описывающего амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) РЦФ второго порядка, необходимо взять модуль от выражения для комплексного коэффициента передачи $K(j\theta)$. Возьмем модуль от $K(j\theta)$ и получим выражение, описывающее АЧХ РЦФ второго порядка:

$$K(\theta) = \{[1 + R^2 - 2R \cos(\theta - \theta_0)] \times [1 + R^2 - 2R \cos(\theta + \theta_0)]\}^{-1/2}.$$

Построенная по этому выражению АЧХ РЦФ второго порядка приведена на рис. 1. Как видно из этого рисунка, АЧХ фильтра периодична по оси абсцисс с периодом 2π .

2. Алгоритм расчета коэффициентов РЦФ второго порядка по заданным требованиям к АЧХ фильтра

Задача 1. Необходимо определить коэффициенты A_1 и A_2 РЦФ второго порядка по известным резонансной частоте θ_0 и нижней границе полосы пропускания θ_1 при заданной неравномерности σ в полосе пропускания. Для решения этой задачи зададимся неравномерностью σ на нижней границе θ_1 полосы пропускания РЦФ и получим уравнение:

$$\frac{K_0}{K(\theta_1)} = \sigma, \quad (2)$$

где

$$K_0 = [(1 - R)^2(1 + R^2 - 2R \cos 2\theta_0)]^{-1/2}$$

– коэффициент передачи РЦФ на резонансной частоте θ_0 . Возведем левую и правую часть уравнения (2) в квадрат и с учетом полученного выше выражения для АЧХ фильтра получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \sigma^2(1 - R)^2(1 + R^2 - 2R \cos 2\theta_0) &= \\ &= [1 + R^2 - 2R \cos(\theta_1 - \theta_0)] \times \\ &\times [1 + R^2 - 2R \cos(\theta_1 + \theta_0)]. \end{aligned}$$

Это уравнение является уравнением четвертой степени относительно искомой величины R . Для его решения введем новую переменную x и после ряда преобразований и замены переменной получим следующее уравнение:

$$\sigma^2 x(x + A) = (x + B_1)(x + C_1). \quad (3)$$

В этом уравнении:

$$x = \frac{(1 - R)^2}{2R}, \quad A = 1 - \cos 2\theta_0,$$

$$B_1 = 1 - \cos(\theta_1 - \theta_0),$$

$$C_1 = 1 - \cos(\theta_1 + \theta_0).$$

Решим (3) относительно x . В результате получим:

$$x = (p^2 + Q)^{1/2} - p,$$

здесь

$$p = \frac{A\sigma^2 - B_1 - C_1}{2(\sigma^2 - 1)}, \quad Q = \frac{B_1 C_1}{\sigma^2 - 1}. \quad (4)$$

Определим величину x и из связывающей x и R формулы рассчитаем искомую величину R :

$$R = 1 + x - [(1 + x)^2 - 1]^{1/2}. \quad (5)$$

Зная R и θ_0 , по формулам (1) определим коэффициенты A_1 и A_2 РЦФ. Таким образом задача 1 решена. При необходимости для обеспечения на частоте θ_0 единичного коэффициента

передачи фильтра множитель M на входе РЦФ рассчитывается по формуле:

$$M = \frac{1}{K_0}. \quad (6)$$

Задача 2. Определить коэффициенты A_1 и A_2 РЦФ второго порядка по известным резонансной частоте θ_0 и верхней границе θ_2 полосы пропускания при заданной неравномерности σ . Для расчета величины R в задаче 2 необходимо использовать выражения (3), (4) и (5), в которые вместо коэффициентов B_1 и C_1 необходимо подставить коэффициенты B_2 и C_2 , определяемые по формулам:

$$B_2 = 1 - \cos(\theta_2 - \theta_0), \quad C_2 = 1 - \cos(\theta_2 + \theta_0).$$

Коэффициенты A_1 и A_2 определяем по формулам (1), а множитель M по выражению (6).

Задача 3. Определить коэффициенты A_1 и A_2 РЦФ второго порядка по известным нижней θ_1 и верхней θ_2 границам пропускания при заданной неравномерности σ на этих частотах. Отметим, что при резонансной частоте фильтра, удовлетворяющей условию:

$$\theta_0 \neq \kappa \frac{\pi}{2},$$

где $\kappa = 1, 2, 3 \dots$ – целые числа, АЧХ РЦФ не симметрична относительно частоты θ_0 , поэтому для точного решения задачи необходимо решить совместно систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} \frac{K_0}{K(\theta_1)} = \sigma, \\ \frac{K_0}{K(\theta_2)} = \sigma. \end{cases}$$

После преобразований и замены переменной в этих уравнениях получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} \sigma^2 x(x + A) = (x + B_1)(x + C_1), \\ \sigma^2 x(x + A) = (x + B_2)(x + C_2). \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе и после преобразований найдем связь между величинами θ_0 , θ_1 , θ_2 и x :

$$\cos \theta_0 = \frac{\cos \theta_1 + \cos \theta_2}{2(1 + x)}. \quad (7)$$

В этом уравнении два неизвестных θ_0 и x . Совместное решение этого уравнения с одним из уравнений приведенной выше системы приводит к уравнению четвертой степени относительно x или $\cos \theta_0$, которое не удается разрешить в радикалах. Ниже приводится алгоритм приближенного решения задачи 3.

1. Положим $\theta_0 = \theta_{\text{ср}}$, где $\theta_{\text{ср}} = (\theta_1 + \theta_2) / 2$ – среднее значение между θ_1 и θ_2 , и по алгоритму решения задачи 1 при известных θ_1 , θ_0 и σ определим величину R_1 по формулам (3), (4) и (5) с коэффициентами B_1 и C_1 .

2. По алгоритму решения задачи 2 при известных θ_2 , θ_0 и σ определим величину R_2 по тем же формулам (3), (4) и (5), но с коэффициентами B_2 и C_2 .

3. Определим величину R как среднее между R_1 и R_2 по формуле: $R = (R_1 + R_2) / 2$.

4. Используя вычисленное среднее значение R , определим x по формуле замены переменной:

$$x = \frac{(1 - R)^2}{2R}.$$

Затем по формуле (7) вычислим $\cos \theta_0$.

5. По рассчитанным значениям R и $\cos \theta_0$ по формулам (1) определим коэффициенты A_1 и A_2 .

3. Примеры расчета РЦФ второго порядка по разработанным алгоритмам

Пример решения задачи 1. Задано: $F_d = 9600$ Гц, $F_0 = 935$ Гц, $F_1 = 715$ Гц, $\sigma = 2$. Необходимо рассчитать коэффициенты A_1 и A_2 РЦФ, амплитудно-частотная характеристика которого удовлетворяет заданным условиям.

Решение. Вначале необходимо рассчитать нормированные частоты: $\theta_0 = 2\pi F_0 / F_d = 0,612$, $\theta_1 = 2\pi F_1 / F_d = 0,468$. Затем по формулам (3), (4) и (5) с коэффициентами B_1 и C_1 получим $R_1 = 0,9305$. Тогда по формулам (1) получим: $A_1 = -1,523$, $A_2 = 0,8658$. Нормированная АЧХ РЦФ вида $Y = K(\theta) / K_0$ с этими коэффициентами приведена на рис. 2, а. Из него видно, что на частоте θ_1 неравномерность $\sigma = 1 / Y = 2$.

Пример решения задачи 2. Задано: $F_d = 9600$ Гц, $F_0 = 935$ Гц, $F_2 = 1155$ Гц, $\sigma = 2$. Необходимо определить коэффициенты A_1 и A_2 РЦФ, амплитудно-частотная характеристика которого удовлетворяет заданным условиям.

Решение. Рассчитаем нормированные частоты $\theta_0 = 2\pi F_0 / F_d = 0,612$ и $\theta_2 = 2\pi F_2 / F_d = 0,756$. По (3), (4) и (5) с коэффициентами B_2 и C_2 получим: $R_2 = 0,9097$. Тогда по формулам (1) получим: $A_1 = -1,4899$, $A_2 = 0,8276$. Нормированная АЧХ РЦФ с этими коэффициентами приведена на рис. 2, б. Из него видно, что на частоте θ_2 неравномерность $\sigma = 2$.

Пример решения задачи 3. Задано: $F_d = 9600$ Гц, $F_1 = 715$ Гц, $F_2 = 1155$ Гц, $\sigma = 2$. Необходимо определить коэффициенты A_1 и A_2 РЦФ, ам-

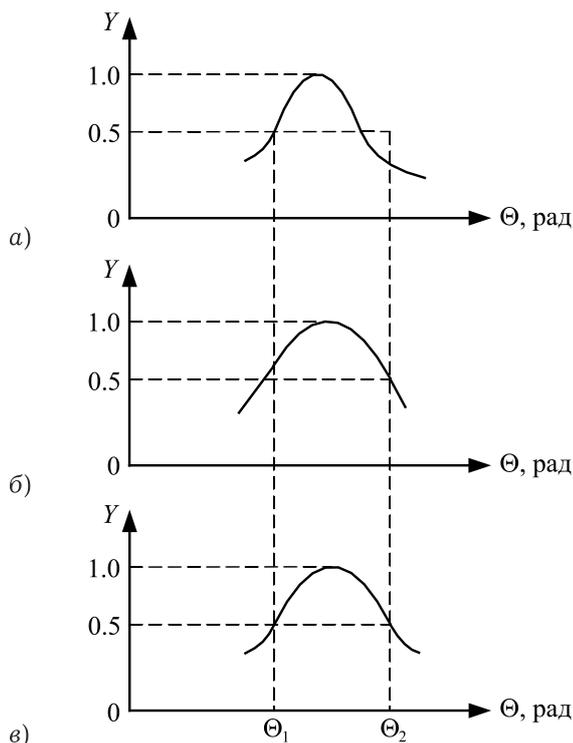


Рис. 2. Нормированные амплитудно-частотные характеристики РЦФ второго порядка, рассчитанные по алгоритмам решения задач 1, 2 и 3

плитудно-частотная характеристика которого удовлетворяет заданным условиям.

Решение. Рассчитаем нормированные частоты $\theta_1 = 2\pi F_1 / F_d = 0,468$ и $\theta_2 = 2\pi F_2 / F_d = 0,756$. Положим $\theta_0 = \theta_{cp} = (\theta_1 + \theta_2) / 2 = 0,612$ и при известных θ_1 , θ_0 и σ по алгоритму решения задачи 1 получим $R_1 = 0,9305$. Затем по алгоритму решения задачи 2 при известных θ_0 , θ_2 и σ получим $R_2 = 0,9097$, далее определим среднее значение $R = (R_1 + R_2) / 2 = 0,9201$. Вспомогательная переменная $x = (1 - R^2) / 2R = 3,47 \cdot 10^{-3}$. Зная значения $x = 3,47 \cdot 10^{-3}$, $\theta_1 = 0,468$ и $\theta_2 = 0,756$, по формуле (7) рассчитаем $\cos \theta_0 = 0,807$. Заметим, что величина $\theta_0 = \arccos 0,807 = 0,6317$ в этой задаче не совпадает с величиной $\theta_{cp} = 0,612$. В завершение по формулам (1) рассчитаем ко-

эффициенты фильтра $A_1 = -1,485$, $A_2 = 0,8466$. Нормированная АЧХ РЦФ с этими коэффициентами приведена на рис. 2, в. Точный анализ этой характеристики показывает, что на частотах θ_1 и θ_2 неравномерность $\sigma = 1,95$, а разница между $K(\theta_1)$ и $K(\theta_2)$ составляет всего 0,1 %. Таким образом, разработанная в этой статье точность приближенного решения задачи 3 вполне достаточна для инженерных расчетов.

Заключение

Полученные в статье формулы для расчета коэффициентов РЦФ второго порядка по заданным требованиям к амплитудно-частотным характеристикам и разработанный на их основе алгоритм точного расчета коэффициентов названных фильтров, удовлетворяющий требованиям к АЧХ этих фильтров, позволит разработчикам радиоэлектронной аппаратуры (РЭА) широко применять эти фильтры в различных радиотехнических устройствах и системах для построения целого класса узлов и устройств РЭА.

Список литературы

1. Иванова В.Г., Тяжев А.И. Цифровая обработка сигналов и сигнальные процессоры / под общ. ред. А.И. Тяжева. Самара: Офорт, 2008. 264 с.
2. Тяжев А.И. Цифровые фильтры с рельефными амплитудно-частотными характеристиками // Успехи современной радиоэлектроники. 2015. № 11. С. 54–57.
3. Елисеев С.Н., Тяжев А.И. Аналоговые и цифровые фильтры Чебышева 1-го и 2-го рода // Вестник СОНИИР. 2008. № 1. С. 65–69.
4. Антонью А. Цифровые фильтры: анализ и проектирование. М.: Радио и связь, 1983. 320 с.
5. Тяжев А.И. Выходные устройства приемников с цифровой обработкой сигналов. Самара: Самарский университет, 1992. 276 с.

Algorithm for calculation of recursive digital filter coefficients of the second order according to the specific requirements for the access with the application accurate design forms

A.I. Tyazhev

The article obtained exact calculation formulas and, on their basis, developed an algorithm for calculating second-order recursive digital filter coefficients using known resonant frequency and filter bandwidth limits for a given non-uniformity of amplitude-frequency characteristic in the passband of this filter.

Keywords: recursive digital filters, characteristics of digital filters, bandwidth, non-uniformity of characteristics in the passband.